Алгоритмы на графах

Модуль 2. Кратчайшие расстояния.

Лекция 7.
Алгоритм Прима.

Адигеев Михаил Георгиевич

2024

План лекции

1. Алгоритм Прима
   - ✓ Общая схема алгоритма
   - ✓ Реализация на основе кучи
3. Сравнение алгоритмов

Алгоритм Прима

Алгоритм Прима

Вход: связный неориентированный граф $G(V, E)$, $|V| = n, |E| = m$.

Выход: минимальное остовное дерево $G'(V', E')$, $V' = V$.

Решение будем строить итерационно. На каждом шаге текущее решение – *дерево* $G'(V', E')$. Добавляем к G' новые рёбра и вершины, пока не получим *<u>остовное</u>* дерево.

Алгоритм Прима

1. $G'(V', E')$: $V' = \{s\}, E' = \emptyset$.

2. Создать массивы C[1..*n*], P[1..*n*].
   - $C[s] = 0$; P[s]=*s*.
   - For each $v \in V \backslash V'$: $C[v] = w(s, v)$; $P[v] = s$

3. While $V' \neq V$:
   - Найти $v \in V \backslash V'$: для v значение $C[v]$ минимально.
   - Добавить вершину v в V'; добавить ребро $(P[v], v)$ в E'.
   - Update_C&P(v).

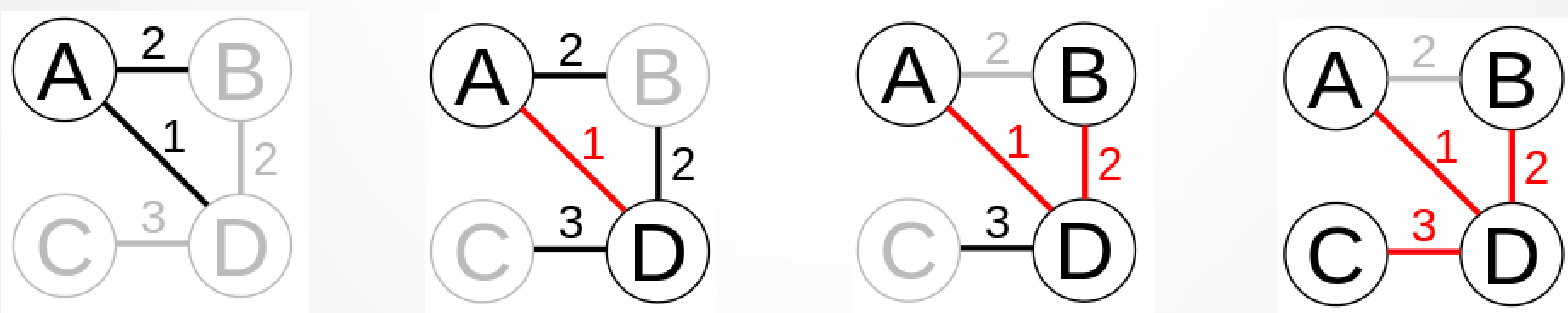
Алгоритм Прима

Update_C&P(v)

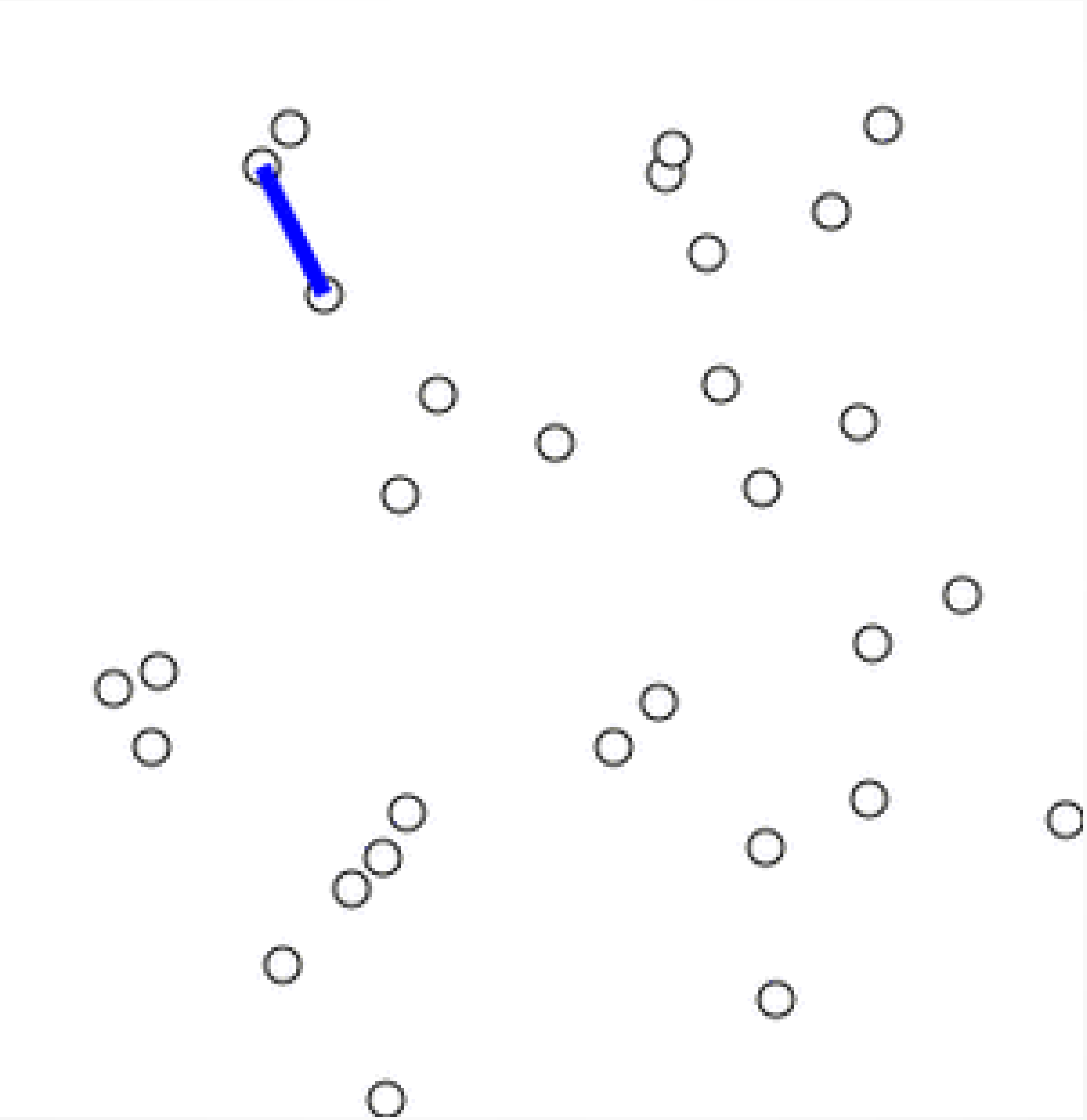
For each $(v, u) \in E$:

if $u \in V \backslash V'$ & $C[u] > w(v, u)$:

$$C[u] = w(v, u)$$
$$P[u] = v$$



Алгоритм Прима



Алгоритм Прима

1. $G'(V', E'): V' = \{s\}, E' = \emptyset$.

2. Создать массивы C[1..*n*], P[1..*n*].
   - $C[s] = 0$; P[s]=*s*.
   - For each $v \in V \backslash V'$: $C[v] = w(s, v)$; $P[v] = s$

3. While $V' \neq V$: *n*-1 итераций
   - Найти $v \in V \backslash V'$: для v значение $C[v]$ минимально. ???
   - Добавить вершину v в V'; добавить ребро $(P[v], v)$ в E'. O(1)
   - Update_C&P(v). ???

Алгоритм Прима

Необходимо оценить суммарную временную сложность всех вызовов процедуры Update_C&P.

Алгоритм обновляет массивы C[] and P[] максимум один раз для каждого ребра => общее количество обновлений составляет $O(m)$.

Сложность выбора ближайшей вершины $v \in V \backslash V'$ зависит от программной реализации.

Алгоритм Прима

1) Наивная реализация: перебирать $V \backslash V'$ и искать минимальное значение $C[v]$. Каждый проход требует времени $O(n)$ $\Rightarrow$ совокупная сложность получается $O(m + n^2) = O(n^2)$.

2) Использовать *очередь с приоритетами* для хранения $C[v]$ и получения минимального значения на каждой итерации. Совокупная временная сложность зависит от реализации очереди с приоритетами:

   a) Двоичная очередь: $O(m \log n)$

   b) Очередь Фибоначчи: $O(m + n \log n)$

Алгоритм Прима

Очередь с приоритетами – абстрактная структура данных, которая позволяет эффективно выполнять операции добавления новых элементов и получения элемента с минимальным/максимальным *ключом*.

Разрезный критерий оптимальности

Определение.

Пусть G' - остовное дерево графа G, ребро (u, v) принадлежит дереву G'. При удалении (u, v) из G' дерево G' распадается на 2 компоненты (п.4 из теоремы о деревьях). Через $\delta(G', (u, v))$ обозначим полученный ***разрез***, то есть множество рёбер, у которых концы лежат в разных компонентах полученного леса.

Разрезный критерий оптимальности

<u>**Теорема**</u> (Разрезный критерий оптимальности остовного дерева).

Остовное дерево $G'(V', E')$ минимально $\Leftrightarrow$ для любого *древесного* ребра $(u, v) \in E'$ и любого *недревесного* ребра $(x, y) \in \delta(G', (u, v))$ выполняется: $w(u, v) \leq w(x, y)$.

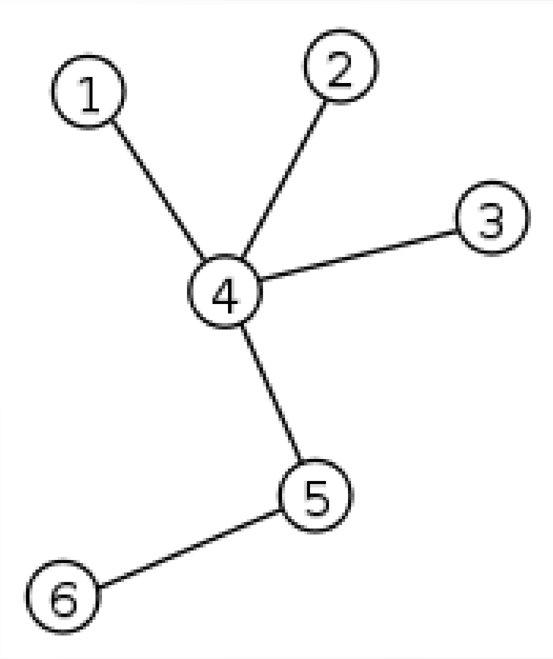
Доказательство.

Деревья

<u>Теорема о деревьях</u>.

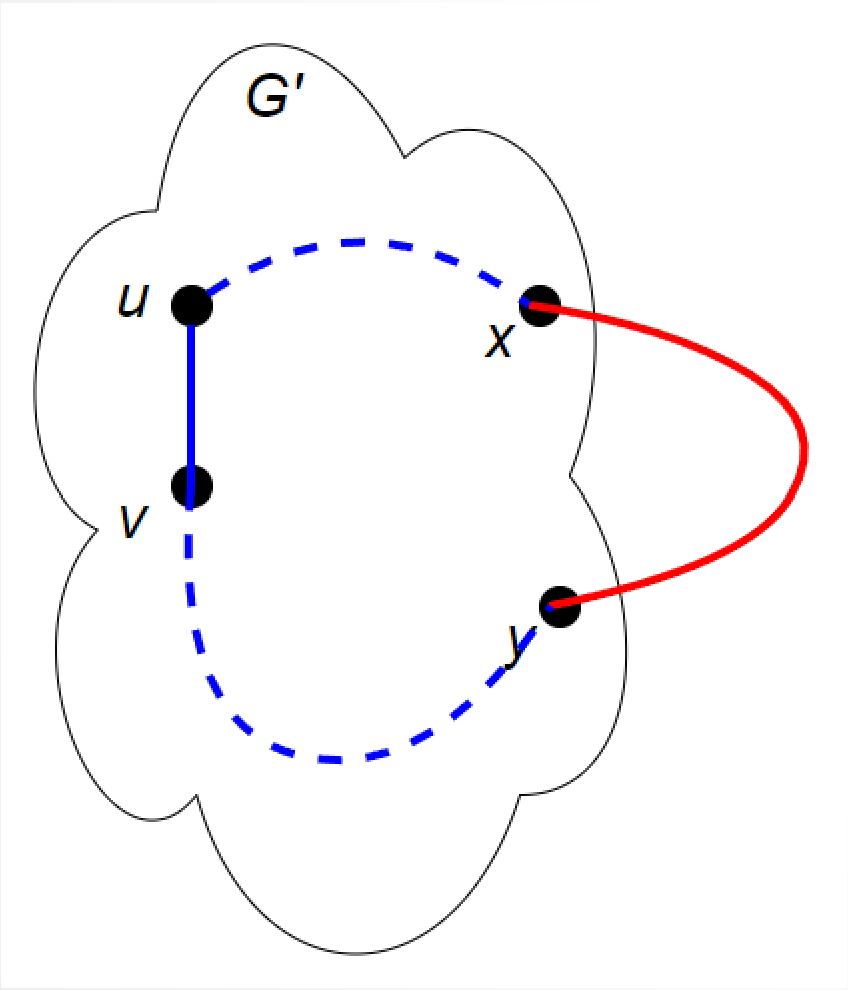
Для конечного графа $G(V,E)$ следующие утверждения эквивалентны:

1) *G* — дерево.
2) *G* — не содержит циклов и $|E| = |V| - 1$.
3) *G* — связен и $|E| = |V| - 1$.
4) *G* — связен и каждая дуга является мостом.
5) Любые две вершины можно соединить единственной простой цепью.
6) *G* не содержит циклов, и добавление к нему любой новой дуги приводит к образованию единственного простого цикла.



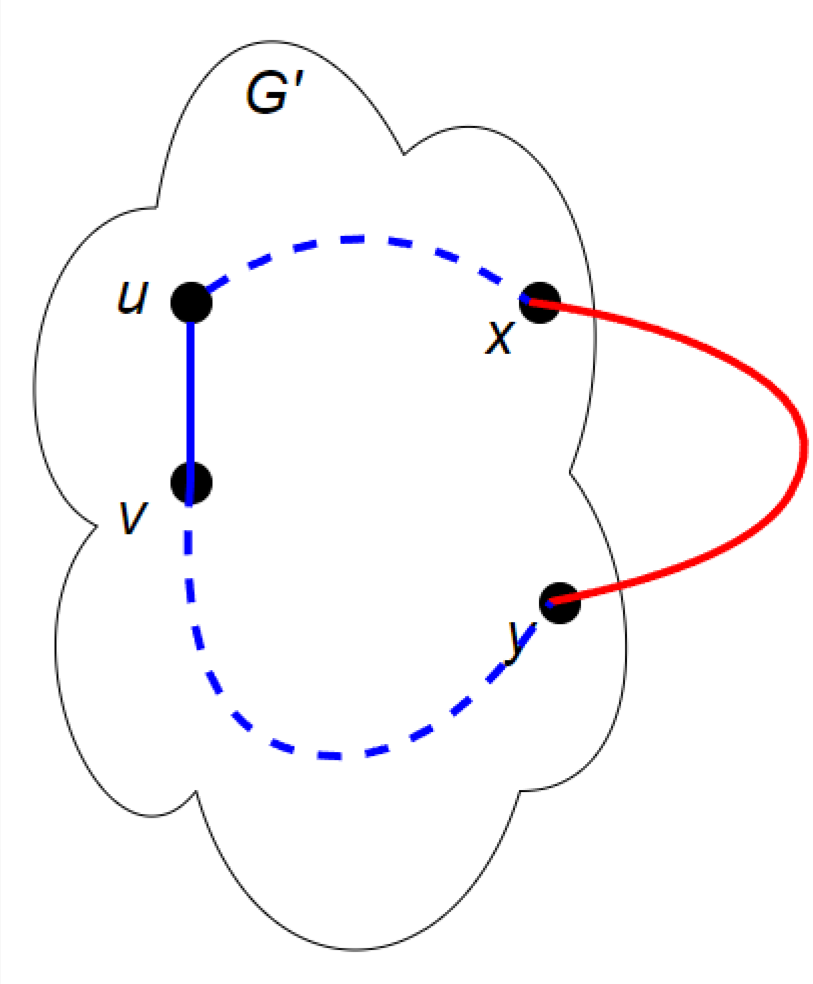
Разрезный критерий оптимальности

Доказательство.



$\Rightarrow$ Пусть G' - минимальное остовное дерево. Граф $H = (G' \backslash \{(u,v)\}) \cup \{(x,y)\}$ – тоже остовное дерево (применяем п. 4 из теоремы о деревьях). Поэтому $w(G') \leq w(H)$, и, следовательно, $w(u,v) \leq w(x,y)$.

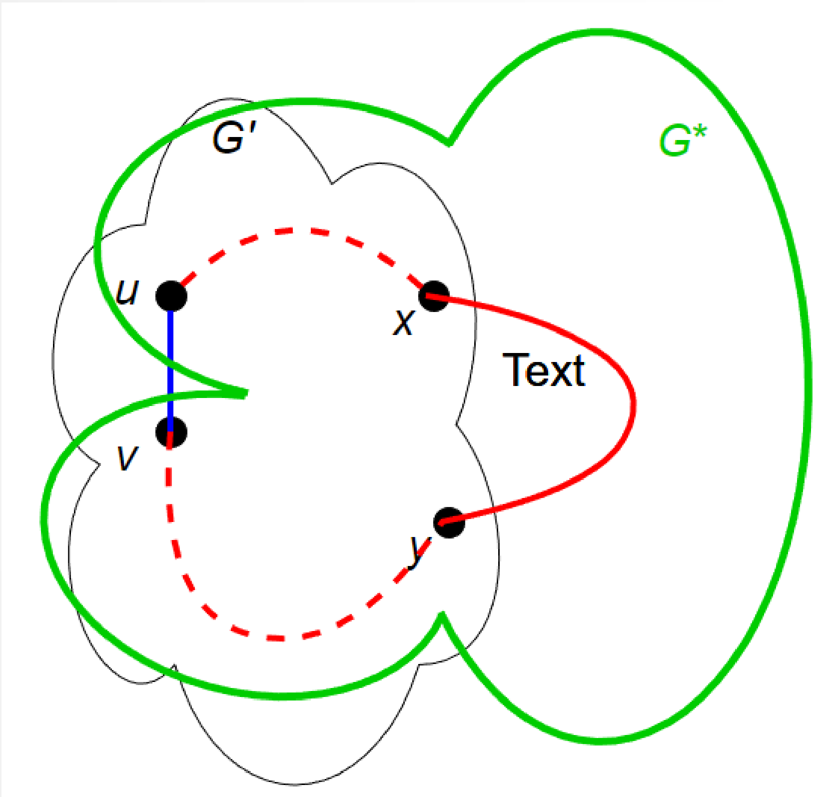
Разрезный критерий оптимальности



$\Leftarrow$ Пусть для G' выполняется условие теоремы, но G' - не минимальное остовное дерево.

Пусть G^* - то из минимальных остовных деревьев, которое имеет максимально возможное количество общих рёбер с G'. Выберем в качестве (u, v) такое ребро, которое принадлежит G' и не принадлежит $G^*((u, v) \in G' \setminus G^*)$.

Разрезный критерий оптимальности



Рассмотрим в G^* единственную цепь, соединяющую вершины u и v. На этой цепи как минимум одно ребро (x, y) принадлежит разрезу $\delta(G', (u, v))$. По условию теоремы, $w(u, v) < w(x, y)$.

Построим граф $H = (G^* \backslash \{(x, y)\} \cup \{(u, v)\}$. Это остовное дерево и $w(H) < w(G^*)$ – противоречие с тем, что G^* - минимальное остовное дерево.

Алгоритм Прима

Теорема. Алгоритм Прима строит минимальное остовное дерево.

Доказательство.

Пусть $G'(V, E')$ - результат работы алгоритма Прима. По построению алгоритма, G' - остовное дерево. Докажем, что это минимальное остовное дерево.

Покажем, что G' удовлетворяет разрезному критерию оптимальности. Пусть (u, v) - произвольное древесное ребро. Предположим, что для него нарушено условие разрезного критерия, то есть существует недревесное ребро $(x, y) \in \delta\big(G', (u, v)\big)$, для которого $w(u, v) > w(x, y)$. Но в этом случае на итерации, на которой было добавлено (u, v), вместо этого ребра должно было быть добавлено (x, y). Теорема доказана.

Сравнение алгоритмов Краскала и Прима

Алгоритм Краскала

- Сложность: $O(m \cdot \log n)$.
- Структура для хранения: список рёбер (с весами).
- Структура для работы: Union_Find.

Алгоритм Прима:

- Сложность: $O(m \cdot \log n)$.
- Структура для хранения: список смежности.
- Структура для работы: очередь с приоритетами.

Для разреженных графов эффективнее алгоритм Краскала, для плотных – алгоритм Прима (есть реализация со сложностью $O(n^2)$).