

Обратная матрица

Вырожденные и невырожденные матрицы

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. Если $\det A = 0$, то матрица A называется **вырожденной**.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ – вырожденная, т.к. ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

А матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – невырожденная, т.к. ее определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

⇒Задание 1

Проверьте в **Engage**, какие из следующих матриц являются вырожденными, а какие – невырожденными:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 12 & -3 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;
A = [-7 4 2; -4 1 3; 12 -3 -9];
println("det(A)=", det(A));
B = [7 2 -5; 3 1 4; 6 -2 1];
println("det(B)=", det(B));
C = [0 1 1; 0 1 0; 1 0 0];
println("det(C)=", det(C));
```

Следовательно, матрица A – вырожденная, матрицы B и C – невырожденные.

Присоединенная матрица

Матрицей, **присоединенной** (или **союзной**) к матрице A , называется матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам

a_{ij} матрицы A :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Например, найдем присоединенную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Запишем алгебраические дополнения к элементам этой матрицы: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 3$. Тогда присоединенная матрица имеет вид: $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Понятие обратной матрицы

Матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T.$$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $\det A = -2$, $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$, $(A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

В **Engage** обратная матрица вычисляется с помощью функции `inv`. Например, матрица, обратная к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, вычисляется так:

```
[ ]: A = [2 1; 4 3];  
      B = inv(A);  
      print("inv(A) =");  
      display(B);
```

Сделаем проверку. Убедимся в том, что произведение матриц A и B дает единичную матрицу:

```
[ ]: print("A * inv(A) =");  
      display(A * B);
```

⇒Задание 2

Найдите в **Engge** матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку, убедившись в том, что произведение матрицы A на обратную к ней дает единичную матрицу.

[]:

####

Решение

[]:

```
A = [5 -1 -1; 2 3 2; 3 1 1];
B = inv(A);
println("inv(A) =");
display(B);
println("A * inv(A) =");
display(A * B);
```

Свойства обратной матрицы

1. $E^{-1} = E$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⇒Задание 3

Проверьте в **Engge** справедливость свойства 4 для матрицы A и свойства 5 для матриц A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

[]:

####

Решение

[]:

```
A = [7 2 3; 5 -3 2; 10 -11 5];
B = [2 -4 9; 7 3 -6; 7 9 -9];
# Проверка свойства 4
```

```
C = inv(transpose(A));  
print("C =");  
display(C);  
D = transpose(inv(A));  
print("D =");  
display(D);  
# Проверка свойства 5  
F = inv(A * B);  
print("F =");  
display(F);  
G = inv(B) * inv(A);  
print("G =");  
display(G);
```

Тест для получения сертификата

[Пройти тест по разделу »](#)