

## Основные операции над матрицами

### Умножение матрицы на число

**Произведением матрицы**  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  **на число**  $k$  называется матрица  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  такая, что  $b_{ij} = ka_{ij}$ . Т.е. при умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  и  $k = 2$ , то  $kA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ .

**Матрица**  $-A = (-1) \cdot A$  **называется противоположной матрице**  $A$ .

В **Engge** умножение матрицы на число выполняется с помощью оператора умножения `*`. Например, умножить матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  на число  $k = 3$  можно так:

```
[ ]: k = 3;  
A = [1 -2; -3 4];  
B = k * A
```

или так:

```
[ ]: A = [1 -2; -3 4];  
B = 3 * A
```

или даже так:

```
[ ]: B = 3 * [1 -2; -3 4]
```

### ⇒Задание 1

Умножьте в **Engge** матрицу  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 12 \\ 7 & -2 & 28 \\ -6 & 15 & -9 \end{pmatrix}$  на число  $k = -7.25$ .

```
[ ]:
```

####

Решение

```
[ ]: A = [5 3 12; 7 -2 28; -6 15 -9];  
k = -7.25;  
B = k * A
```

## Сложение матриц

**Суммой** двух матриц  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  называется такая матрица  $C_{m \times n} = (c_{ij})$ , что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Т.е. при сложении матриц их соответствующие элементы складываются. Сумма двух матриц обозначается  $C = A + B$ .

Операция сложения матриц возможна только для матриц одинаковых размеров.

**Например:** 
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

В **Engge** сложение матриц выполняется так же, как и сложение чисел, с помощью оператора +. Например, сумма матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  может быть вычислена так:

```
[ ]: A = [1 2; 3 4];  
      B = [5 6; 7 8];  
      C = A + B
```

или так:

```
[ ]: C = [1 2; 3 4] + [5 6; 7 8]
```

### Задание 2

Сложите в **Engge** матрицу из Задания 1  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 12 \\ 7 & -2 & 28 \\ -6 & 15 & -9 \end{pmatrix}$  с диагональной матрицей, у которой на главной диагонали находятся числа 5, 34 и -40.

```
[ ]:
```

####

Подсказка

Диагональная матрица задается с помощью функции `diagm`, аргументом которой является вектор элементов главной диагонали матрицы: `B = diagm([b11, b22, b33])`.

#####

Решение

```
[ ]: using LinearAlgebra;  
      A = [5 3 12; 7 -2 28; -6 15 -9];  
      B = diagm([5, 34, -40]);  
      C = A + B
```

---

## Вычитание матриц

**Разностью** двух матриц  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  называется такая матрица  $C_{m \times n} = (c_{ij})$ , что  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ . Т.е. при вычитании матриц их соответствующие элементы вычитаются. Разность двух матриц обозначается  $C = A - B$ .

Операция вычитания матриц возможна только для матриц одинаковых размеров.

Например: 
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

В **Engge** вычитание матриц выполняется так же, как и вычитание чисел, с помощью оператора `-`.

---

### ⇒Задание 3

Найдите в **Engge** разность  $A - B$  и  $B - A$  матриц из предыдущего примера:  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ .

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
A = [2 -3 0; 4 5 6];
B = [3 3 -1; -2 -5 4];
C = A - B;
print("A - B =");
display(C);
D = B - A;
print("B - A =");
display(D);
```

---

### ⇒Задание 4

Найдите в **Engge** линейную комбинацию матриц  $5A - 4B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ .

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
A = [3 8; 6 2];  
B = [-9 -1; -4 -10];  
C = 5 * A - 4 * B
```

## Умножение матриц

**Произведением** матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на матрицу  $B_{n \times p} = (b_{jk})$  называется такая матрица  $C_{m \times p} = (c_{ik})$ , что  $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$ , т.е. элемент  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца произведения  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $k$ -го столбца матрицы  $B$ .

При умножении матрицы размером  $m \times n$  на матрицу размером  $n \times p$  получается матрица размером  $m \times p$ .

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом произведение  $B \cdot A$  не определено, т.к. число столбцов матрицы  $B$  (3) не совпадает с числом строк матрицы  $A$  (2).

Пример умножения матрицы на вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

- Если матрицы  $A$  и  $B$  квадратные одного размера, то произведения  $AB$  и  $BA$  всегда существуют.
- $AE = EA = A$ , где  $A$  - квадратная матрица,  $E$  - единичная матрица того же размера.
- Произведение нулевой матрицы на любую другую матрицу равно нулевой матрице:  $O \cdot A = O$ .
- В общем случае  $AB \neq BA$ , т.е. умножение матриц некоммукативно. Если  $AB = BA$ , то матрицы  $A$  и  $B$  называются **перестановочными**.

В **Engge** умножение матриц выполняется так же, как и умножение чисел, с помощью оператора \*. Рассмотренный выше пример умножения матриц можно записать так:

```
[ ]: A = [1 3; 1 2];  
      B = [1 2 1; 3 1 0];  
      C = A * B
```

или так:

```
[ ]: D = [1 3; 1 2] * [1 2 1; 3 1 0]
```

Аналогично выполняется умножение трех и большего числа матриц.

Например, произведение трех матриц  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  можно вычислить так:

```
[ ]: A = [0 1; 1 0];  
      B = [1 1; 0 0];  
      C = [1 0; 1 0];  
      D = A * B * C
```

---

### ⇒Задание 5

Найдите в **Engge** произведение  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Перестановочны ли данные матрицы?

```
[ ]:
```

####

Решение

```
[ ]: A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];  
      B = [9 8 7; 6 5 4; 3 2 1];  
      C = A * B;  
      print("A * B =");  
      display(C);  
      D = B * A;  
      print("B * A =");  
      display(D);
```

Данные матрицы не являются перестановочными, т.к.  $AB \neq BA$ .

---

## Задание 6

Проверьте в **Engage**, что умножение квадратной матрицы  $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 9 & 15 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  слева и справа на единичную матрицу такого же размера не изменяет этой матрицы.

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
using LinearAlgebra;
A = [5 8 11; 7 9 15; 4 2 6];
E = convert(Array, I(3));
print("E =");
display(E);
B = A * E;
print("A * E =");
display(B);
C = E * A;
print("E * A =");
display(C);
```

## Возведение матрицы в степень

$n$ -й степенью квадратной матрицы  $A$  называется умножение матрицы  $A$  саму на себя  $n$  раз.

Операция возведения в степень определена только для квадратных матриц и для натурального показателя степени  $n$ .

Например:

$$A^1 = A,$$

$$A^2 = A \cdot A,$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A \text{ и т.д.}$$

В **Engage** матрицу можно возводить в  $n$ -ю степень либо умножая ее саму на себя  $n$  раз, либо с помощью оператора возведения в степень  $^$ . Например, возвести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  во вторую степень можно следующими двумя способами:

[ ]:

```
A = [2 0; 0 3];
B = A * A;
print("A^2 =");
```

```
display(B);  
print("A^2 =");  
C = A^2
```

### Задание 7

Возведите в **Engae** матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  в третью степень как с помощью умножения трех одинаковых матриц, так и с помощью оператора ^.

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];  
B = A * A * A;  
print("A^3 =");  
display(B);  
print("A^3 =");  
C = A^3
```

### Свойства операций над матрицами

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $A + O = O + A = A$
4.  $A - A = O$
5.  $1 \cdot A = A$
6.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
7.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8.  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
9.  $A(BC) = (AB)C$
10.  $A(B + C) = AB + AC$
11.  $(A + B)C = AC + BC$
12.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Для операции транспонирования верны следующие свойства:

1.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
2.  $(kA)^T = kA^T$
- 3.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

### ⇒Задание 8

Проверьте в **Engage** справедливость свойства  $(AB)^T = B^T A^T$  для матриц  $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
using LinearAlgebra;
A = [7 9; 4 2];
B = [5 3; 6 1];
C = transpose(A * B)
display(C);
D = transpose(B) * transpose(A)
```

Как мы видим, матрицы  $C = (AB)^T$  и  $D = B^T A^T$  равны друг другу.

### Тест для получения сертификата

Пройти тест по разделу »