

Определители

Каждой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее **определителем** (или **детерминантом**).

Для матрицы порядка 1, состоящей из одного элемента, определитель равен этому элементу.

Определители второго порядка

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 27.$

В **Engge** определитель квадратной матрицы вычисляется с помощью функции `det`, содержащейся в библиотеке `LinearAlgebra`.

Например, определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ вычисляется следующим образом:

```
[ ]: using LinearAlgebra;  
A = [2 -3; 5 6];  
det(A)
```

Задание 1

Найдите в **Engge** определитель матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ 54 & -3 \end{pmatrix}$

```
[ ]:
```

####

Решение

```
[ ]: using LinearAlgebra;  
A = [-7 16; 54 -3];  
det(A)
```

Определители третьего порядка

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Например: $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = 9.$

В **Engge** определитель матрицы третьего порядка также вычисляется с помощью функции `det`.

Задание 2

Найдите в **Engge** определитель матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;  
A = [5 -2 1; 3 1 -4; 6 0 -3];  
det(A)
```

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$

Строки и столбцы называют **рядами** определителя.

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$ Переставив строки определителя, получим: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 = 5.$

5. Определитель, содержащий нулевой ряд, равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

6. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0$, т.к. все элементы 3-й строки определителя пропорциональны соответствующим элементам второй строки.

7. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 + 1 \cdot (-4) & 5 + 2 \cdot (-4) & 6 + 3 \cdot (-4) \\ 7 + 1 \cdot (-7) & 8 + 2 \cdot (-7) & 9 + 3 \cdot (-7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$

Рассмотрим в **Engage** пример, приведенный в свойстве 7. Зададим исходную матрицу A и вычислим ее определитель. Затем преобразуем матрицу: первую строку оставим без изменений, ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на (-4) , а к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-7) . Получится новая матрица B . Вычислим ее определитель и убедимся в том, что он совпадает с определителем матрицы A .

```
[ ]: using LinearAlgebra;
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
println("det(A)=", det(A));
B = A;
B[2,:] = A[2,:] + A[1,:] * (-4);
B[3,:] = A[3,:] + A[1,:] * (-7);
print("B =");
display(B);
println("det(B)=", det(B));
```

Задание 3

Проверьте в **EngEE** справедливость свойств 1, 2 и 7 для определителя $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Сначала поменяйте местами строки со столбцами в определителе и убедитесь в том, что определитель не изменился. Затем поменяйте местами первую и вторую строки в исходном определителе и убедитесь в том, что определитель поменял знак. И, наконец, прибавьте к первой строке исходного определителя вторую строку, умноженную на 2, и убедитесь в том, что определитель не изменился.

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;
A = [5 -2 1; 3 1 -4; 6 0 -3];
println("det(A)=", det(A));
B = transpose(A);           # заменили строки столбцами
print("B =");
display(B);
println("det(B)=", det(B));
C = [3 1 -4; 5 -2 1; 6 0 -3]; # поменяли местами первую и вторую строки
println("C =");
display(C);
println("det(C)=", det(C));
D = A;
D[1,:] = A[1,:] + A[2,:] * 2; # к 1-й строке прибавили 2-ю строку, умноженную на 2
println("D =");
display(D);
println("det(D)=", det(D));
```

Миноры и алгебраические дополнения

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Обозначается m_{ij} .

Например, если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком **плюс**, если сумма $i + j$ – четное число, и со знаком **минус**, если эта сумма нечетная.

Обозначается A_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Например, если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, то $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$.

⇒Задание 4

Вычислите в **Engge** миноры и алгебраические дополнения для элементов $a_{22} = 5$

и $a_{32} = 8$ определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;
m22 = det([1 3; 7 9]); # минор элемента a(2,2)
println("m(2,2)=", m22);
A22 = (-1)^(2+2)*m22 # алгебраическое дополнение элемента a(2,2)
println("A(2,2)=", A22);
m32 = det([1 3; 4 6]); # минор элемента a(3,2)
println("m(3,2)=", m32);
A32 = (-1)^(3+2)*m32; # алгебраическое дополнение элемента a(3,2)
println("A(3,2)=", A32);
```

Свойства определителей, использующие алгебраические дополнения

8. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения. Это свойство называется **разложением определителя по элементам некоторого ряда**.

Например, вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$$

9. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Определители высших порядков

Свойство 8 представляет собой способ “ручного” вычисления определителей более высоких порядков.

Например, следующий определитель четвертого порядка можно вычислить, разложив его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 24 + 1 \cdot 140 + 0 - 1 \cdot 90 = 122.$$

В качестве ряда, по которому ведется разложение определителя, удобно выбирать тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. алгебраические дополнения, умножаемые на нули, можно не вычислять.

В **EngEE** с помощью функции `det` можно вычислить определитель любого порядка.

⇒Задание 5

Вычислите в EngEE определитель пятого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;
A = [2 3 1 0 4; 1 5 2 7 0; 3 1 6 5 9; 2 0 5 3 1; 0 4 8 5 6];
det(A)
```

Тест для получения сертификата

Пройти тест по разделу »