

Матрицы. Основные виды матриц

Понятие матрицы

Одним из основных понятий линейной алгебры является **матрица**.

Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

или сокращенно $A = (a_{ij})$, где i - номер строки, j - номер столбца.

Матрица A называется матрицей **размера** $m \times n$ и обозначается $A_{m \times n}$.

Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла, образуют главную диагональ.

Рассмотрим, как формируются матрицы в **Engage**. Элементы матрицы записываются в квадратных скобках построчно. Сначала записываются элементы первой строки, разделенные пробелами. Затем ставится точка с запятой и записываются элементы второй строки и т.д.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ задается так:

```
[ ]: A = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]
```

Равенство матриц

Матрицы **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Основные виды матриц

Квадратная матрица

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей **n -го порядка**.

Пример квадратной матрицы третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

В **Engge** диагональная матрица задается функцией `diagm`, содержащейся в библиотеке `LinearAlgebra`. Аргументом функции является вектор элементов главной диагонали, взятый в квадратные скобки:

```
[ ]: using LinearAlgebra;  
A = diagm([1, 2, 3])
```

⇒Задание 1

Сформируйте в **Engge** диагональную матрицу четвертого порядка, на главной диагонали которой находятся числа 17, -23, 48 и -164.

```
[ ]:
```

####

Решение

```
[ ]: using LinearAlgebra;  
A = diagm([17, -23, 48, -164])
```

В **Engge** для задания матрицы случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$, используется функция `rand`. Аргументами функции служат число строк и число столбцов матрицы. Например:

```
[ ]: A = rand(4, 4)
```

В следующем примере создается матрица случайных целых чисел в диапазоне от 1 до 100:

```
[ ]: A = rand(1:100, 5, 5)
```

⇒Задание 2

Сформируйте в **Engge** матрицу случайных целых чисел в диапазоне от 0 до 10, имеющую 7 строк и 9 столбцов.

```
[ ]:
```

```
####
```

Решение

```
[ ]: A = rand(0:10, 7, 9)
```

Трехдиагональная матрица

Матрица, у которой все ненулевые элементы располагаются на трех диагоналях: главной, первой сверху и первой снизу, называется **трехдиагональной**.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

В **Engge** трехдиагональную матрицу можно задать так. Сначала зададим три вектора, содержащие элементы трех ненулевых диагоналей, начиная с нижней. Затем с помощью функции `Tridiagonal`, содержащейся в библиотеке `LinearAlgebra`, сформируем объект `A` типа `Tridiagonal`. И, наконец, с помощью функции `convert` преобразуем тип этого объекта в матрицу.

```
[ ]: using LinearAlgebra;
x = [3, 6, 9];
y = [1, 4, 7, 10];
z = [2, 5, 8]
A = Tridiagonal(x, y, z);
A = convert(Array, A)
```

⇒Задание 3

Указанным выше способом сформируйте в **Engge** трехдиагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;  
x = [5, 2, 3];  
y = [7, 8, 9, 1];  
z = [4, 10, 6]  
A = Tridiagonal(x, y, z);  
A = convert(Array, A)
```

Единичная матрица

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной** и обозначается буквой E .

Например: $E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица 3-го порядка.

В **Engage** единичную матрицу можно задать так. Сначала с помощью функции I , содержащейся в библиотеке `LinearAlgebra`, создается объект E типа `UniformScaling`. Аргументом функции I является порядок матрицы. Затем с помощью функции `convert` тип этого объекта преобразуется в матрицу.

[]:

```
using LinearAlgebra;  
E = I(5)  
E = convert(Array, E)
```

⇒Задание 4

Указанным выше способом сформируйте в **Engage** единичную матрицу 10-го порядка.

[]:

####

Решение

[]:

```
using LinearAlgebra;  
E = I(10);  
E = convert(Array, E)
```

Треугольная матрица

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали (т.е. выше или ниже главной диагонали), равны нулю.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \text{верхнетреугольная матрица,}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \text{нижнетреугольная матрица.}$$

Нулевая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается буквой O .

Например: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нулевая матрица может быть любого размера.

В **Engge** нулевую матрицу можно задать с помощью функции `zeros`. Аргументами функции являются число строк и число столбцов матрицы. Например, нулевая матрица размером 4×3 задается так:

```
[ ]: 0 = zeros(4, 3)
```

⇒Задание 5

Сформируйте в **Engge** нулевую матрицу, имеющую 9 строк и 12 столбцов.

```
[ ]:
```

```
####
```

Решение

```
[ ]: 0 = zeros(9, 12)
```

Вектор-строка и вектор-столбец

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или **вектором-строкой**, или **вектором-столбцом** соответственно).

Вектор-столбец имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$, а вектор-строка: $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$.

В **Engage** вектор-столбец задается в квадратных скобках перечислением его элементов, разделенных запятой либо точкой с запятой. Например, вектор-столбец

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ можно задать так:

```
[ ]: A = [1, 2, 3, 4]
```

или так:

```
[ ]: A = [1; 2; 3; 4]
```

Вектор-строка задается в квадратных скобках перечислением его элементов, разделенных пробелами. Например, вектор-строка $B = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ задается так:

```
[ ]: B = [1 2 3 4]
```

⇒Задание 6

Сформируйте в **Engage** вектор-столбец и вектор-строку, содержащие элементы -264, 357, -841, 519 и 936.

```
[ ]:
```

```
####
```

Решение

```
[ ]: A = [-264; 357; -841; 519; 936];  
print("A =");  
display(A);  
print("B =");  
B = [-264 357 -841 519 936]
```

Транспонированная матрица

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** к данной и обозначается A^T .

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

В **Engge** операция транспонирования матрицы выполняется функцией `transpose`.
Например:

```
[ ]: A = [1 2; 3 4];
print("A =");
display(A);
print("A transposed =");
B = transpose(A)
```

Эрмитово-сопряженная матрица

Эрмитово-сопряженной называется матрица A^* с комплексными элементами, полученная из исходной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента комплексно-сопряженным ему.

Если применить эрмитово сопряжение к матрице с действительными элементами, то получится просто транспонирование матрицы.

В **Engge** операция эрмитова сопряжения выполняется с помощью оператора `'` (апостроф), который ставится после матрицы:

```
[ ]: A = [1 2; 3 4];
print("A =");
display(A);
print("A adjointed =");
B = A'
```

⇒ Задание 7

Выполните в **Engge** транспонирование матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 9 & -1 \\ 6 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ двумя способами: с помощью функции `transpose` и оператора `'`.

[]:

####

Решение

[]:

```
A = [4 7 -5 8; 5 3 9 -1; 6 0 -8 2];
print("A =");
display(A);
B = transpose(A);
print("A transposed =");
display(B);
print("A transposed =");
C = A'
```

Симметричная и антисимметричная матрицы

Матрица A называется **симметричной**, если $A^T = A$. Для такой матрицы $a_{ij} = a_{ji}$.

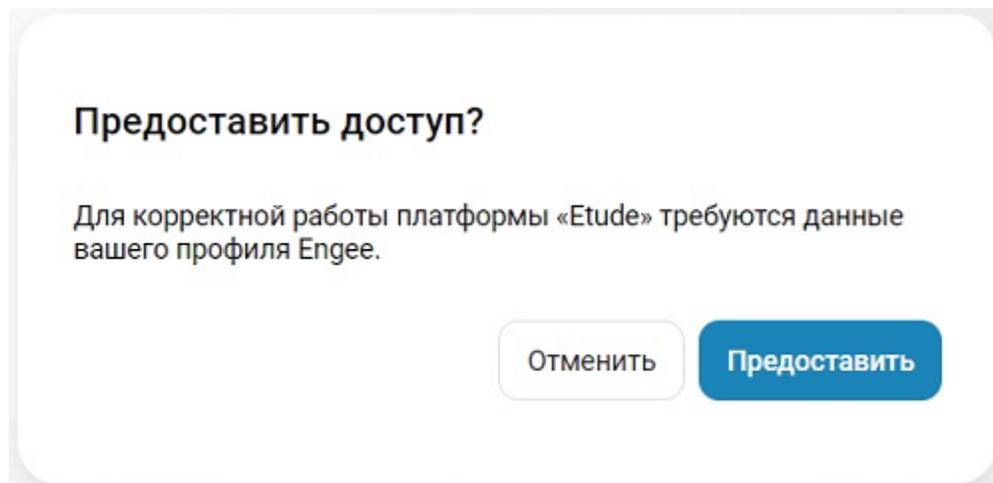
Пример симметричной матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Матрица A называется **антисимметричной** (или **кососимметричной**), если $A^T = -A$. Для такой матрицы $a_{ij} = -a_{ji}$.

Пример антисимметричной матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тест для получения сертификата

Если вы впервые проходите тестирование на платформе **Этюд** по ссылке из **Engge**, то, нажав на ссылку ниже, вы увидите следующее диалоговое окно:



Нажмите на кнопку “Предоставить”, чтобы авторизоваться на платформе **Этюд** с данными вашего профиля Engage ID.

Если вы раньше уже проходили тестирование по ссылке из **Engage**, то ваша авторизация выполнится автоматически и тестирование начнется сразу же после нажатия на ссылку.

[Пройти тест по разделу »](#)