



- Система уравнений называется **невырожденной**, если  $\Delta \neq 0$ , и **вырожденной**, если  $\Delta = 0$ .

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все ее свободные члены равны нулю.

Однородная система всегда совместна. Одно из ее решений – нулевое (**тривиальное**) решение.

Для того, чтобы система  $n$  линейных однородных уравнений с  $n$  неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.  $\Delta = 0$ . В этом случае система имеет бесконечное множество решений.

---

**Пример.** Запишем в матричной форме следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 = 4x_2 \\ 4 + x_2 - x_1 = x_3. \end{cases}$$

Для этого перенесем слагаемые с неизвестными в левые части уравнений, а свободные члены – в правые части. Упорядочим слагаемые с неизвестными по возрастанию их номеров, т.е. сначала должно идти слагаемое с  $x_1$ , затем – с  $x_2$  и, наконец, с  $x_3$ . Получим:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + x_2 = 3 \\ -4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Мы видим, что в первом уравнении отсутствует неизвестная  $x_3$ , а во втором уравнении –  $x_1$ . Добавим в уравнения отсутствующие неизвестные с коэффициентами, равными 0. Если в уравнении присутствует неизвестная, коэффициент перед которой явно не указан, то он равен 1. Таким образом, система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 - 4x_2 + 1x_3 = 0 \\ -1x_1 + x_2 - 1x_3 = -4. \end{cases}$$

Теперь мы можем записать систему линейных уравнений в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

или  $A \cdot X = B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

---

### ⇒Задание 1

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Создайте в **Engage** матрицу  $A$  коэффициентов при  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Первый столбец этой матрицы должен состоять из коэффициентов при  $x_1$ , второй – из коэффициентов при  $x_2$ , третий – из коэффициентов при  $x_3$ .

Создайте вектор-столбец  $B$  свободных членов (чисел, стоящих в правых частях уравнений).

Создайте вектор-столбец  $X$ , содержащий решение системы:  $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Проверьте, что  $X$  является решением, умножив матрицу  $A$  на вектор  $X$ . Результат умножения должен совпадать с вектором  $B$ .

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
A = [2 2 2; 1 1 3; 1 4 1];
B = [2; 5; 10];
X = [-4; 3; 2];
A * X
```

### ⇒Задание 2

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_3 + 2x_1 + 1 = 2x_2 \\ x_1 + x_3 = 0,5. \end{cases}$$

Перенесите слагаемые с неизвестными в левые части уравнений, а свободные члены – в правые части. Упорядочьте слагаемые с неизвестными по возрастанию их номеров. В третьем уравнении отсутствует неизвестная  $x_2$ , поэтому добавьте ее в уравнение с коэффициентом 0.

Затем создайте в Engage матрицу  $A$  системы и вектор-столбец  $B$  свободных членов.

Создайте вектор-столбец  $X$ , содержащий решение системы:  $X = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 2,25 \\ 1,25 \end{pmatrix}$ .

Проверьте, что  $X$  является решением, умножив матрицу  $A$  на вектор  $X$ . Результат умножения должен совпадать с вектором  $B$ .

[ ]:

#### Подсказка

После преобразований должна получиться следующая матрица системы:  $A =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и вектор свободных членов:  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

#####

#### Решение

[ ]:

```
A = [3 2 -1; 2 -2 4; 1 0 1];
B = [1; -1; 0.5];
X = [-0.75; 2.25; 1.25];
A * X
```

### Решение систем линейных уравнений в Engage

В **Engage** системы линейных уравнений вида  $A \cdot X = B$  решаются путем вычисления левого частного матриц  $A$  и  $B$  с помощью оператора (обратная косая черта).

$$X = AB.$$

**Например,** систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

можно решить следующим образом:

```
[ ]: A = [2 2 2; 1 1 3; 1 4 1];  
      B = [2; 5; 10];  
      X = A \ B
```

Сделаем проверку, умножив матрицу  $A$  на вектор  $X$ :

```
[ ]: A * X
```

Как мы видим, результат умножения совпадает с вектором  $B$ .

---

**Пример.** Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ y = 2 + 3x. \end{cases}$$

Сначала решим систему графически. Для этого построим на одном графике прямые  $y = 6 - x$  и  $y = 2 + 3x$  и найдем координаты точки пересечения этих прямых.

```
[ ]: using Plots;  
      x = LinRange(-5, 5, 100);  
      y1 = 6 .- x;  
      y2 = 2 .+ 3 * x;  
      plot(x, y1, xlabel="x", ylabel="y", label="y=6-x")  
      plot!(x, y2, label="y=2+3x")
```

Из графика видно, что точка пересечения прямых имеет координаты  $x = 1, y = 5$ . Это и есть решение данной системы линейных уравнений.

Теперь решим эту систему уравнений с помощью оператора  $\backslash$ . Для этого сначала преобразуем систему к виду, требуемому для задания матриц  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} 1x + 1y = 6 \\ -3x + 1y = 2. \end{cases}$$

```
[ ]: A = [1 1; -3 1];  
      B = [6; 2];  
      X = A \ B
```

Сделаем проверку:

[ ]: A \* X

---

### Задание 3

Решите в **Engge** систему линейных уравнений с помощью оператора \:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

и сделайте проверку.

[ ]:

####

Решение

```
[ ]: A = [7 2 3; 5 -3 2; 10 -11 5];  
B = [15; 15; 36];  
X = A \ B  
println("X =");  
display(X);  
println("A*X =");  
display(A * X);
```

---

### Формулы Крамера

Невырожденная система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где  $\Delta$  – определитель системы,  $\Delta_1$  – определитель, полученный из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца коэффициентов столбцом свободных членов,  $\Delta_2$  – определитель, полученный из  $\Delta$  путем замены второго столбца коэффициентов столбцом свободных членов и т.д.

Формулы Крамера обычно применяются для решения небольших систем (с двумя или тремя неизвестными).

---

**Пример.** Решим по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$$

```
[ ]: using LinearAlgebra;
A = [2 -4 9; 7 3 -6; 7 9 -9];           # матрица системы
D = det(A);                             # определитель системы
D1 = det([28 -4 9; -1 3 -6; 5 9 -9]);   # определитель Delta1
D2 = det([2 28 9; 7 -1 -6; 7 5 -9]);     # определитель Delta2
D3 = det([2 -4 28; 7 3 -1; 7 9 5]);      # определитель Delta3
X[1] = D1 / D;
X[2] = D2 / D;
X[3] = D3 / D;
print("X =");
display(X);
println("A*X =");
display(A * X);                         # проверка
```

## Матричный способ решения систем линейных уравнений

Решение невырожденной системы из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $X = A \cdot B$  может быть найдено матричным способом:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где  $A^{-1}$  - матрица, обратная к матрице системы  $A$ ,  $B$  - вектор-столбец свободных членов.

### ⇒Задание 4

Решите в **EngEE** матричным способом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

и сделайте проверку.

```
[ ]:
```

```
####
```

Подсказка

### Решение

```
[ ]: A = [1 1 -1; 1 -1 1; -1 1 1];  
      B = [36; 13; 7];  
      X = inv(A) * B;  
      println("X =");  
      display(X);  
      println("A*X =");  
      display(A * X);
```

Пусть дана система из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

[illegible]

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

**Пример.** Исследуем совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Для формирования расширенной матрицы воспользуемся функцией `cat`, которая выполняет конкатенацию (объединение) матриц и содержится в библиотеке `LinearAlgebra`. Аргументами этой функции являются имена объединяемых матриц  $A$  и  $B$ , а также переменная `dims`, указывающая, по какой размерности будет



производится объединение матриц. Значение `dims=2` соответствует объединению по горизонтали.

```
[ ]: using LinearAlgebra;
      A = [2 -3 5 7; 4 -6 2 3; 2 -3 -11 -15]; # матрица системы
      B = [1; 2; 1];                         # столбец свободных членов
      D = cat(A, B; dims=2);                  # расширенная матрица
      println("rank(A)=", rank(A));           # ранг матрицы системы
      println("rank(D)=", rank(D));           # ранг расширенной матрицы
```

Мы видим, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы:  $Rg(D) = Rg(A) = 2$ . Следовательно, данная система уравнений совместна. Ранг системы (2) меньше числа неизвестных (3), следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

---

### ⇒Задание 5

Исследуйте в **Engge** совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

[ ]:

####

Решение

```
[ ]: using LinearAlgebra;
      A = [3 -5 2 4; 7 -4 1 3; 5 7 -4 -6];
      B = [2; 5; 3];
      D = cat(A, B; dims=2);
      println("rank(A)=", rank(A));
      println("rank(D)=", rank(D));
```

Мы видим, что ранг расширенной матрицы (3) не равен рангу матрицы системы (2), следовательно, система несовместна.

---

### ⇒Задание 6

Исследуйте в **Engge** совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Если система совместна, то найдите ее решение.

Такая система уравнений, в которой уравнений больше, чем неизвестных, называется **переопределенной**.

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
using LinearAlgebra;
A = [2 5 -8; 4 3 -9; 2 3 -5; 1 8 -7];
B = [8; 9; 7; 12];
D = cat(A, B; dims=2);
println("rank(A)=", rank(A));
println("rank(D)=", rank(D));
```

Мы видим, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы:  $Rg(D) = Rg(A) = 3$ . Следовательно, данная система уравнений совместна. Ранг системы (3) равен числу неизвестных (3), следовательно, система имеет единственное решение.

Для нахождения этого единственного решения исключим любое уравнение из системы, например, четвертое. И затем решим полученную систему с помощью стандартных средств **Engage**.

[ ]:

```
A = [2 5 -8; 4 3 -9; 2 3 -5];
B = [8; 9; 7];
X = A \ B
```

## Метод Гаусса

**Метод Гаусса** для решения систем линейных алгебраических уравнений состоит из двух этапов. На первом этапе (**прямой ход**) с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду:



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 36 \\ -2x_2 - 5x_3 = -89 \\ 4x_3 = 58 \end{cases}.$$

Теперь выполним обратный ход метода Гаусса. Из третьего уравнения выразим  $x_3$ , из второго –  $x_2$ , из первого –  $x_1$ :

```
[ ]: X[3] = D[3,4] / D[3,3];
X[2] = (D[2,4] - D[2,3] * X[3]) / D[2,2];
X[1] = (D[1,4] - D[1,2] * X[2] - D[1,3] * X[3]) / D[1,1];
println("X =");
display(X);
```

Сделаем проверку:

```
[ ]: A * X
```

## Тест для получения сертификата

[Пройти тест по разделу »](#)