

# Ранг матрицы

## Понятие ранга матрицы

**Минором  $k$ -го порядка** матрицы  $A$  называется определитель  $k$ -го порядка, составленный из элементов матрицы  $A$ , расположенных на пересечении выбранных строк и столбцов.

Например, для матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  можно составить 4 минора 3-го порядка, исключая по очереди один из столбцов, 18 миноров 2-го порядка, вычеркивая 2 столбца и 1 строку, и 12 миноров 1-го порядка, которые равны элементам матрицы.

**Рангом** матрицы  $A$  называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначается  $Rg(A)$  или  $r(A)$ .

Для любой ненулевой матрицы размером  $m \times n$  выполняется условие:  $1 \leq Rg(A) \leq \min(m, n)$ .

У матрицы  $A$ , приведенной выше, все миноры 3-го порядка равны 0, а минор второго порядка  $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ . Следовательно, ранг этой матрицы равен 2.

---

## Элементарные преобразования матрицы

**Элементарными преобразованиями** матрицы называются преобразования следующих типов:

1. перестановка двух строк (или столбцов) матрицы;
2. умножение строки (или столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке (или столбцу) матрицы другой ее строки (или столбца), умноженной на любое число.

Матрицы  $A$  и  $B$ , называются **эквивалентными** ( $A \sim B$ ), если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований.

**Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.**

## Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Метод элементарных преобразований для вычисления ранга матрицы заключается в том, что матрица  $A$  с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где  $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr} \neq 0$ .

Тогда ранг матрицы  $B$  равен числу ее ненулевых строк  $r$ .

**Например**, для нахождения ранга матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  приведем ее к ступенчатому виду. Для этого ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на  $(-2)$ , а к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на  $(-3)$ :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем к третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на  $(-1,5)$ :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся эквивалентная матрица имеет две ненулевые строки, поэтому  $Rg(A) = 2$ .

---

Выполним рассмотренный выше пример в **Engage**.

```
[ ]: A = [1 0 -3 0; 2 0 4 0; 3 0 6 0];
print("A =");
display(A);
B = A;
B[2,:] = A[2,:] + A[1,:] * (-2);
B[3,:] = A[3,:] + A[1,:] * (-3);
print("B =");
display(B);
C = B;
C[3,:] = B[3,:] + B[2,:] * (-1.5);
print("C =");
display(C);
```

В получившейся ступенчатой матрице две ненулевые строки. Следовательно, ранг матрицы  $A$  равен 2.

---

## Вычисление ранга матрицы в Engae

В **Engae** ранг матрицы вычисляется с помощью функции `rank`, содержащейся в библиотеке `LinearAlgebra`.

**Например**, ранг матрицы  $A$  из предыдущего примера вычисляется так:

```
[ ]: using LinearAlgebra;
      A = [1 0 -3 0; 2 0 4 0; 3 0 6 0];
      println("Rg(A)=", rank(A));
```

---

### ⇒Задание 1

Найдите в **Engae** ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 12 & -3 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 43 & -56 & 72 & 91 \\ 13 & -64 & 37 & 55 \\ 86 & 77 & -52 & 34 \\ 83 & 21 & 9 & -44 \end{pmatrix}$$

с помощью функции `rank`.

```
[ ]:
```

```
####
```

Решение

```
[ ]: using LinearAlgebra;
      A = [-7 4 2; -4 1 3; 12 -3 -9];
      println("Rg(A)=", rank(A));
      B = [1 2 3; 2 4 6; 4 8 12];
      println("Rg(B)=", rank(B));
      C = [43 -56 72 91; 13 -64 37 55; 86 77 -52 34; 83 21 9 -44];
      println("Rg(C)=", rank(C));
```

---

## Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку (или столбец), то ранг матрицы не изменится.
- 3.

**При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.**

⇒ **Задание 2**

Проверьте в **Engage** справедливость свойств 1, 2 и 3 для матрицы  $A =$

$$\begin{pmatrix} 542 & 431 & 747 & 233 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -657 & -325 & 184 & 832 \\ 378 & 853 & -692 & 948 \end{pmatrix}.$$

Для проверки свойства 3 к третьей строке матрицы  $A$  прибавьте первую строку, умноженную на 3.

[ ]:

####

Решение

[ ]:

```
using LinearAlgebra;
A = [542 431 747 233; 0 0 0 0; -657 -325 184 832; 378 853 -692 948];
# Проверка свойства 1
println("Rg(A)=", rank(A));
println("Rg(A')=", rank(transpose(A)));
# Проверка свойства 2
B = [542 431 747 233; -657 -325 184 832; 378 853 -692 948];
print("B=");
display(B);
println("Rg(B)=", rank(B));
# Проверка свойства 3
C = A;
C[3,:] = A[3,:] + A[1,:] * 3;
print("C=");
display(C);
println("Rg(C)=", rank(C));
```

**Тест для получения сертификата**

Пройти тест по разделу »