Частотные методы улучшения изображений

Лекция 6

Частотная обработка изображений

- Базируется на Фурье-анализе
- Частично подходы частотной обработки аналогичны подходам пространственной обработки
- Частично подходы частотной обработки дополняют подходы пространственной обработки

Главное научное достижение Фурье

Изложено в мемуарах в 1807

Полностью опубликовано в 1822 в книге «Аналитическая теория тепла»

В 1878 переведена на английский Фрименом

Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье

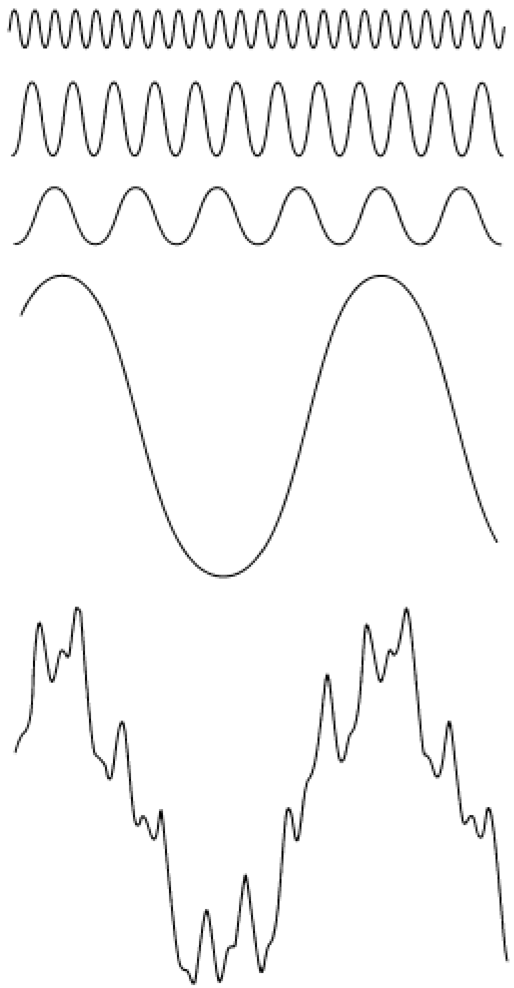
Жан Батист Жозеф Фурье
(1768 — 1830)

Результат Фурье

Любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы синусов и/или косинусов различных частот, умноженных на некоторые коэффициенты.

Сумма – ряд Фурье

Нижняя функция – сумма четырех верхних



Результат Фурье

Если функция **не** является **периодической**, но **площадь под графиком её модуля конечна**, она может быть выражена в виде интеграла от синусов и/или косинусов, умноженных на некоторую весовую функцию.

Преобразование Фурье

Характерная особенность

Функция, заданная как рядом, так и преобразованием Фурье, может быть **полностью восстановлена** при помощи процедуры обращения.

Идея частотных преобразований

Область определения функции

↓

Область Фурье

↓

Область определения функции

Где применяется

- В начале 60-х Революция в области обработки сигналов
  - ЭВМ
  - БПФ

- Обработка сигналов
- Обработка звука
- Форматы звуковых файлов (например, MP3 и JPEG)
- Обработка изображений
- Медицинская диагностика
- Шифрование
- Средства электронной связи
- …

Применение к обработке изображений

Изображения – функции конечной протяженности

↓

Преобразование Фурье

Одномерный случай

- Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

- Обратное Фурье-преобразование

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ux}du$$

Пара преобразований Фурье

Фурье-пара

$F(u)$ $f(x)$

Двумерный случай

- Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

- Обратное Фурье-преобразование

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

Дискретная форма

Прямое дискретное преобразование Фурье

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi ux/M}, \quad u = 0,1,2,...,M-1$$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi ux/M}, \quad x = 0,1,2,...,M-1$$

Частотная и временная область

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\left[\cos 2\pi ux / M - i\sin 2\pi ux / M\right], \quad u = 0,1,2,\ldots,M-1$$

Область значений переменной *u* – ***частотная область***

Каждый из *M* элементов *F(u)* – ***частотная компонента*** преобразования

Область значений переменной x – ***временная область***

Каждый из M элементов f(x) – ***временная компонента***

Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

Представление в полярных координатах $F(u) = |F(u)| e^{-i\varphi(u)}$

Модуль или спектр Фурье-преобразования

$$|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$$

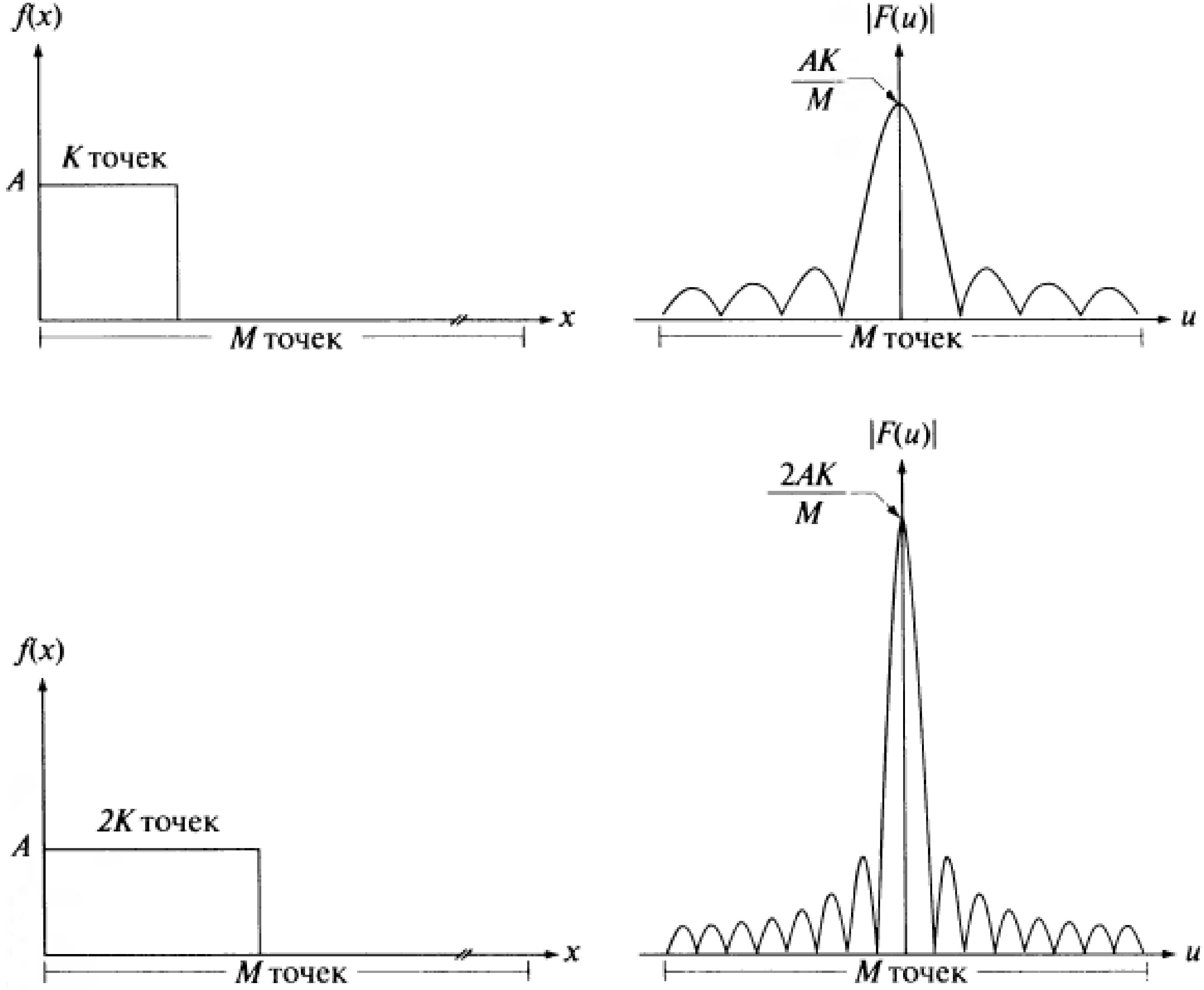
Энергетический спектр или спектральная плотность

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Фаза или фазовый спектр Фурье-преобразования

$$\varphi(u) = arctg\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

Пример. Фурье-спектры



Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{X} \qquad M\Delta u = \frac{1}{\Delta x} \qquad \Delta x = \frac{1}{M\Delta u} = \frac{1}{U}$$

частотное разрешение

диапазон частот

Двумерное ДПФ и его обращение

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,u)e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- u, v – переменные преобразования или частотные переменные
- x, y – переменные изображения или пространственные переменные

Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

$$\left|F(u,v)\right| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

$$P(u,v) = \left|F(u,v)\right|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

$$\varphi(u,v) = arctg\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

частотное разрешение

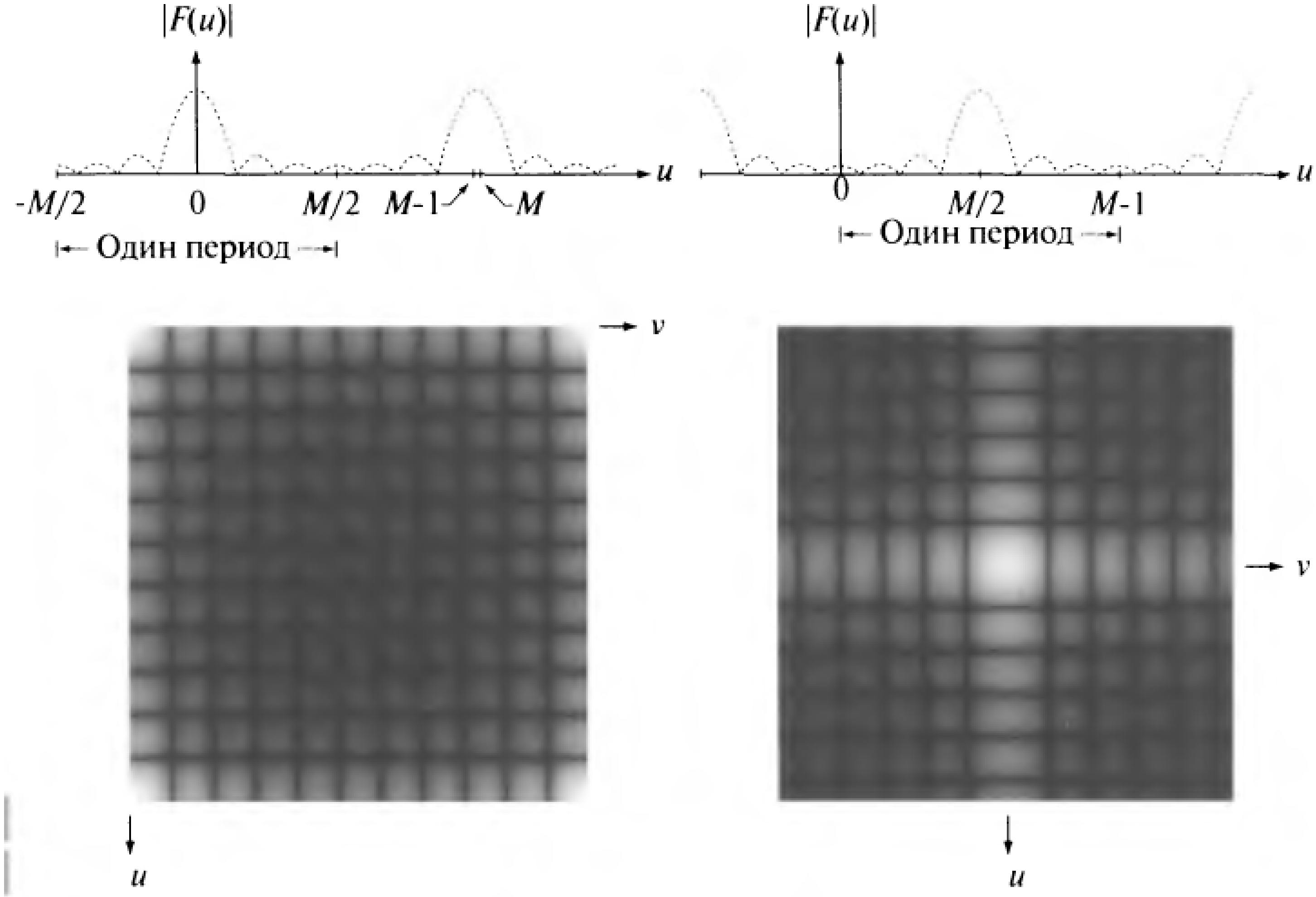
Фурье-образ для действительных функций будет симметрично сопряжённым

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

Периодичность

$$\Im\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right] = F(u - M/2, v - N/2)$$



Постоянная составляющая спектра

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

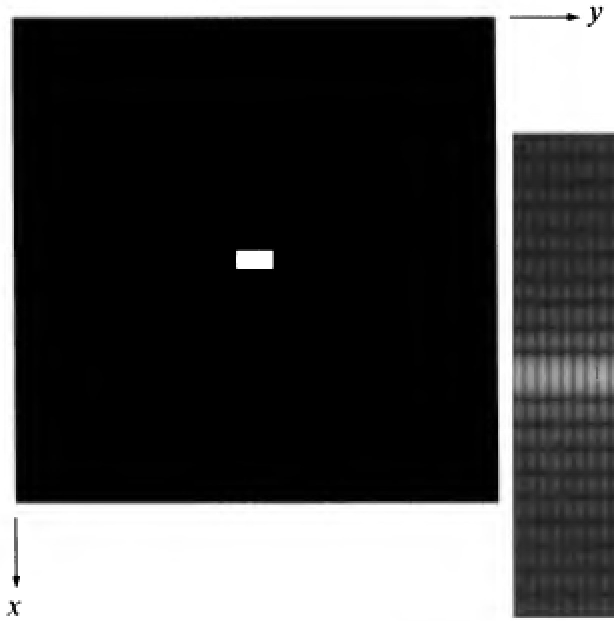
$$F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

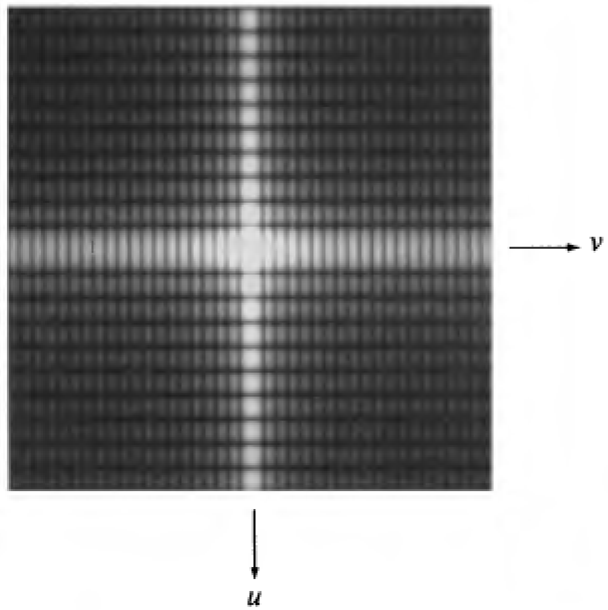
Среднее значение яркости на изображении

Основные свойства частотной области

- Постоянная частотная составляющая (u=v=0) совпадает со средней яркостью изображения
- Низкие частоты (вблизи начала координат) соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения
- Высокие – быстро меняющимся

Пример. Центрированный спектр простой двумерной функции





Белый (20 x 40) на черном (512 x 512)

* $(-1)^{x+y}$

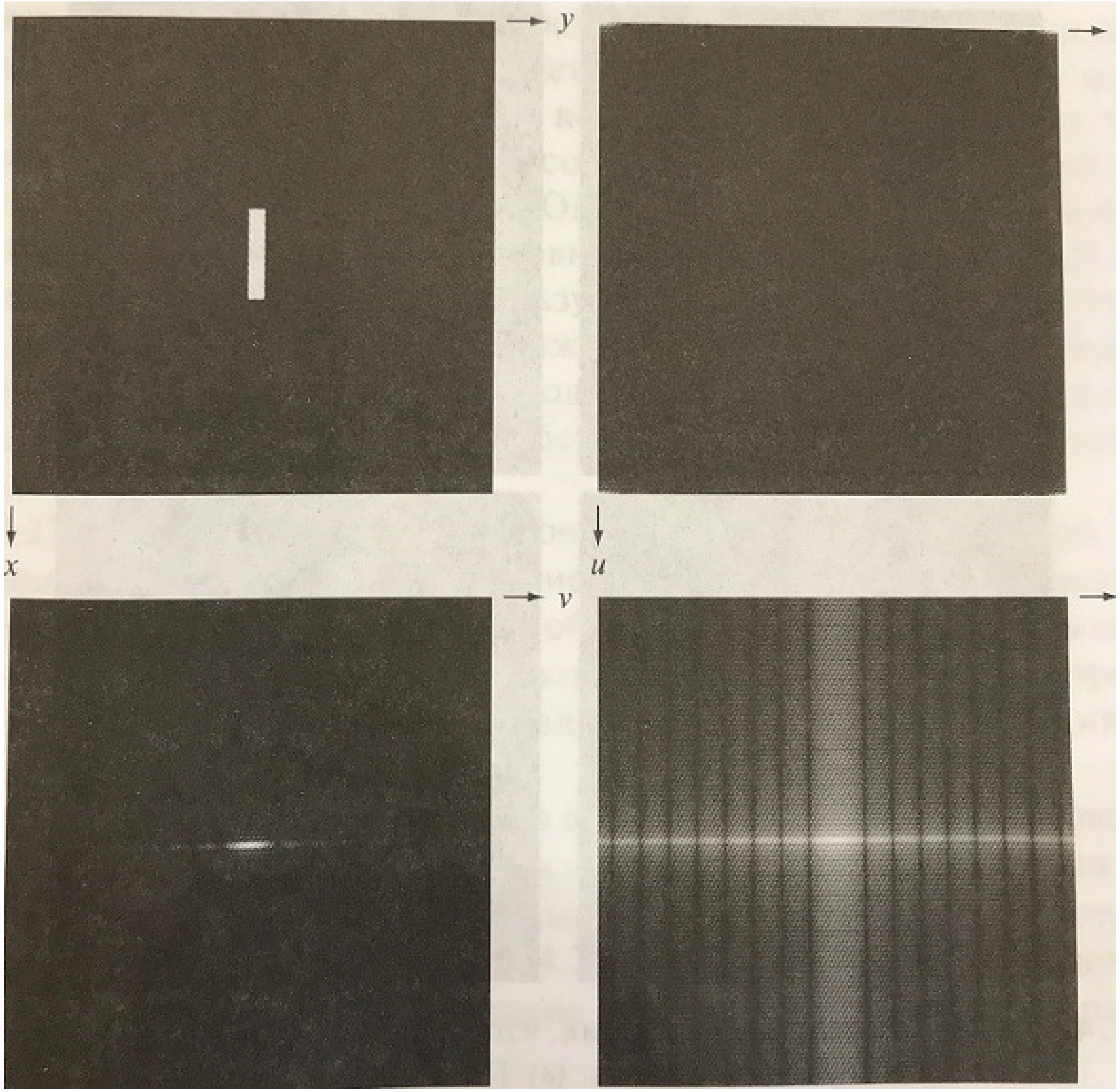
Центрированный спектр (после логарифмического преобразования яркости)

Изображение → Спектр

Изображение

Спектр

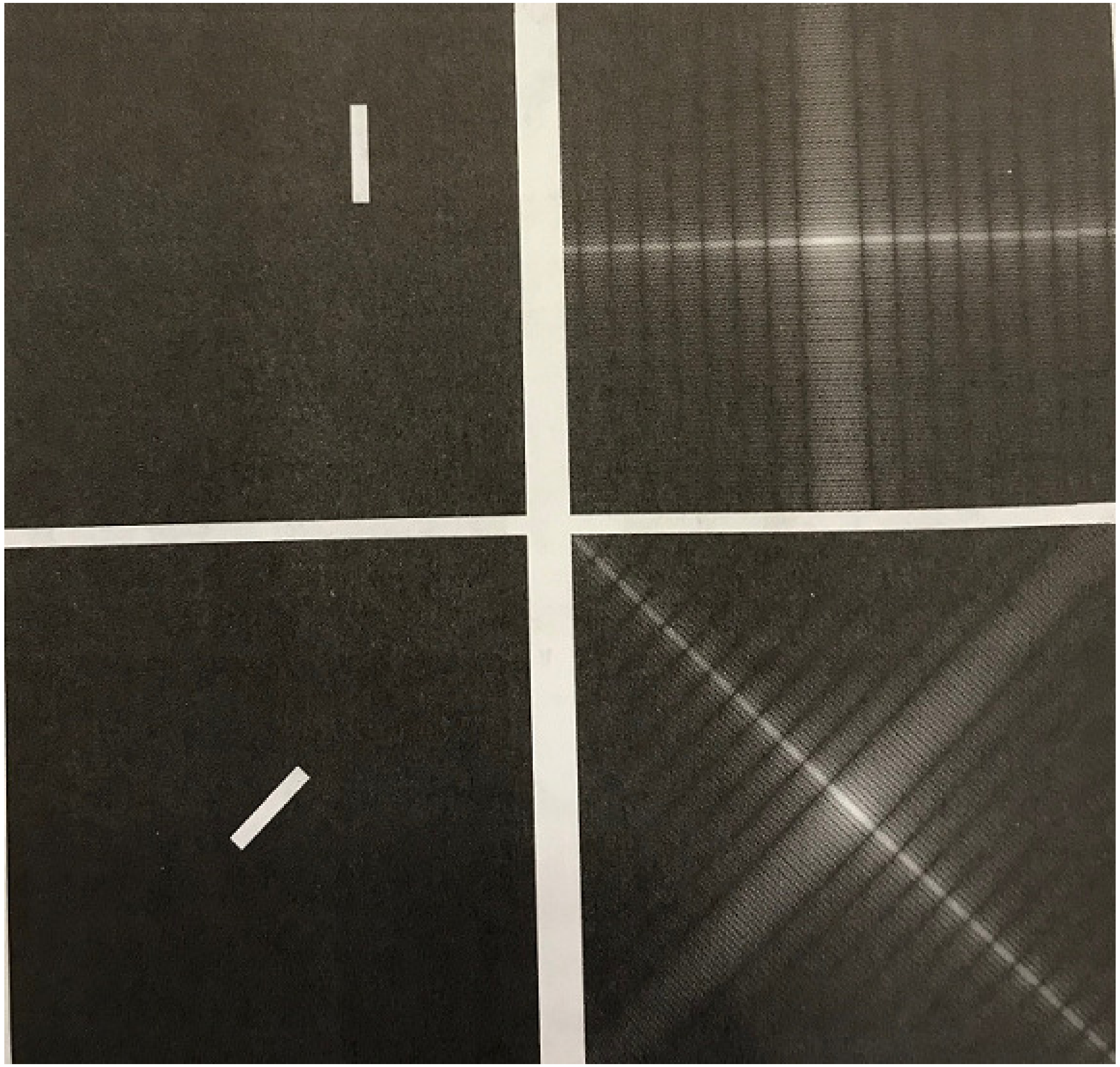
Яркие пятна в углах



Центрированный спектр

Результат логарифмических преобразований

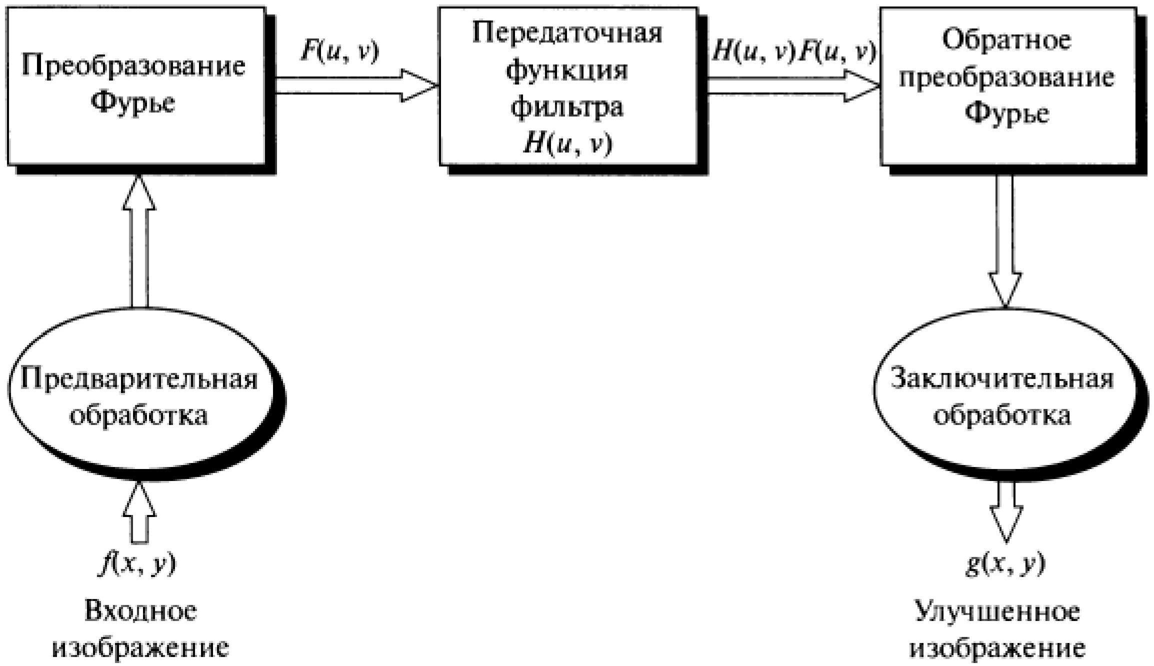
Сдвинутый и повёрнутый прямоугольник



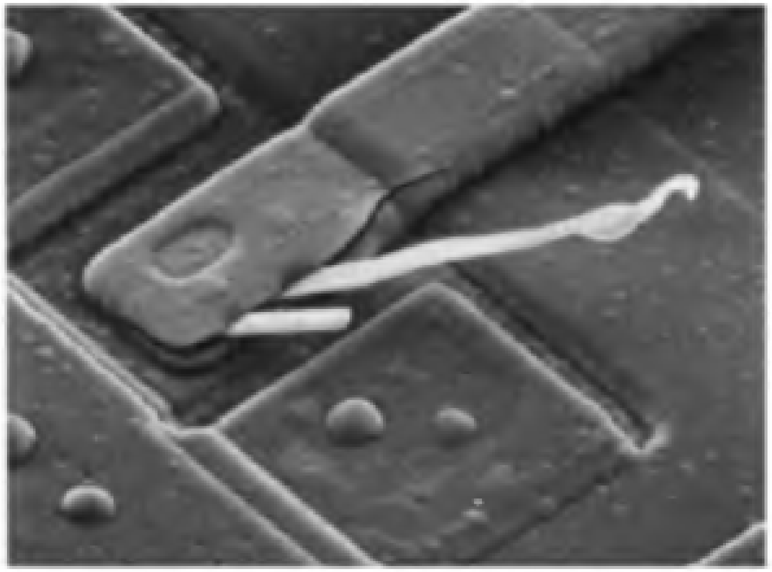
Процедура фильтрации в частотной области

1. Изображение * $(-1)^{x+y}$
2. Вычисляется прямое ДПФ $F(u,v)$
3. Функция $F(u,v)$* функцию фильтра $H(u,v)$
4. Вычисляется обратное ДПФ
5. Выделяется вещественная часть
6. * $(-1)^{x+y}$

Основные этапы фильтрации в частотной области



Пример. Изображение и его Фурье-спектр



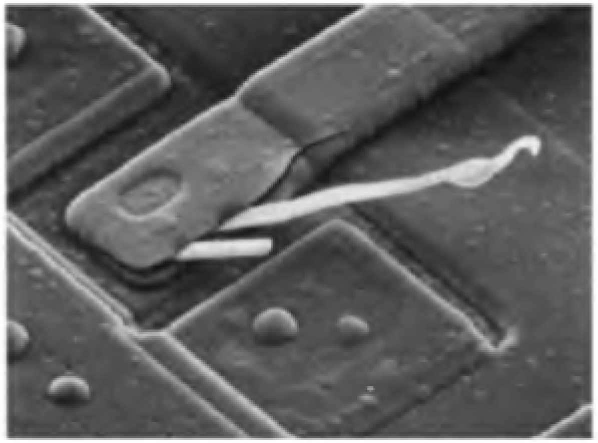
Увеличенное в 2500 раз изображение интегральной схемы, полученное сканирующим электронным микроскопом

Brockhouse Institute for Material Research

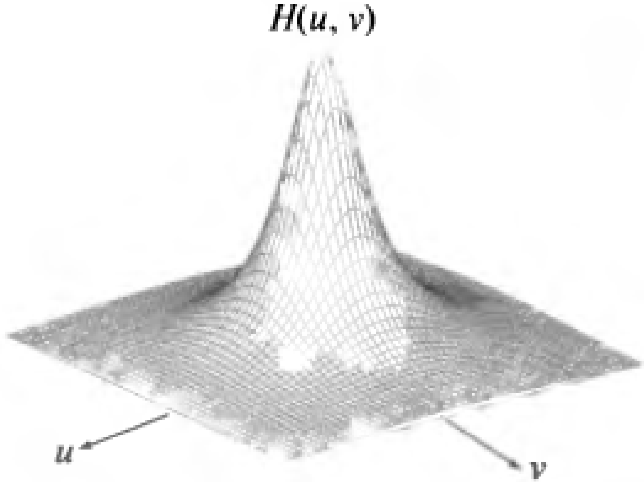
Основные фильтры

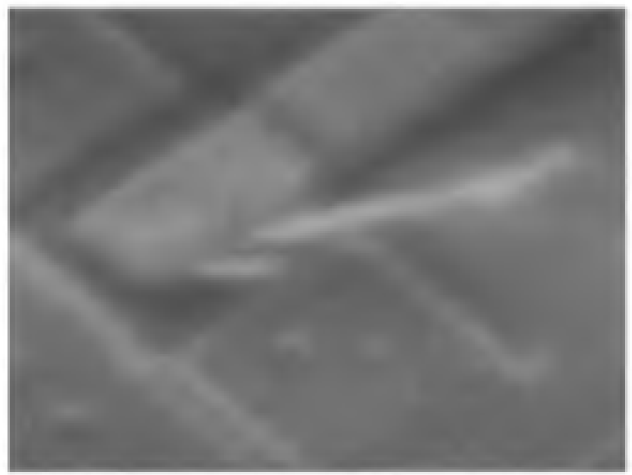
Фильтр пробка – узкополосный режекторный фильтр – обнуление среднего

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & npu\ (u,v)=(M/2,N/2)\\ 1, & \text{в другом случае}\end{cases}$$

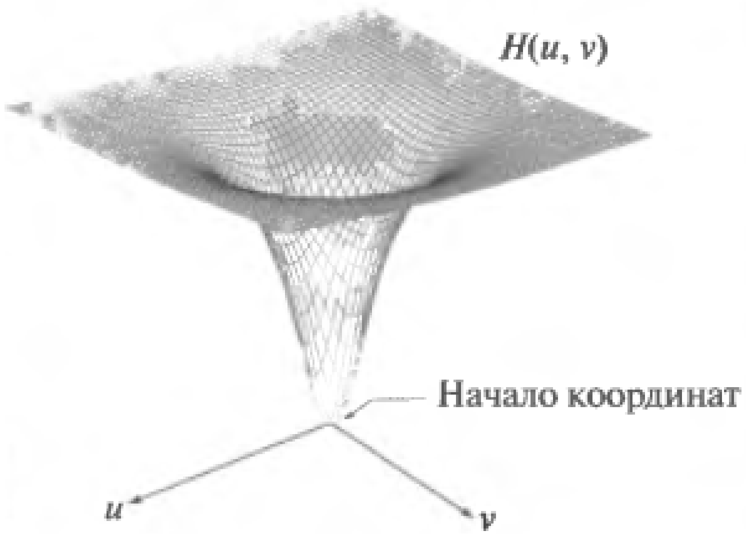


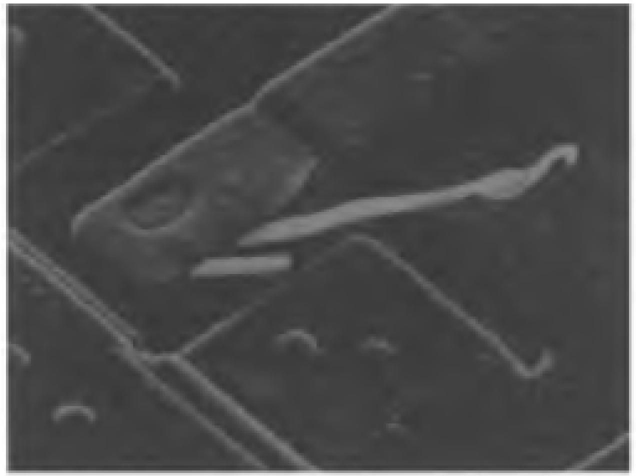
Низкочастотный фильтр



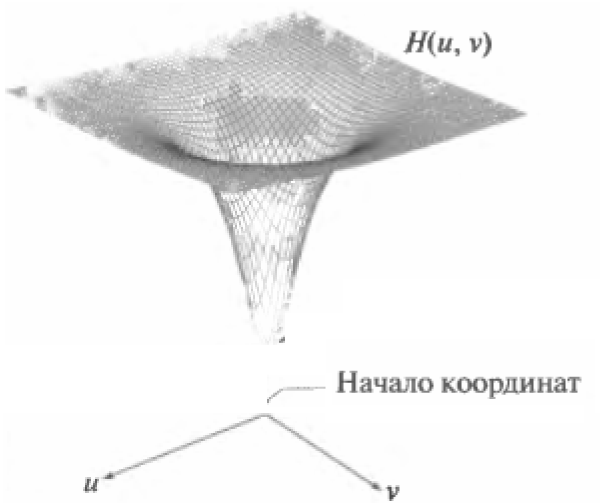


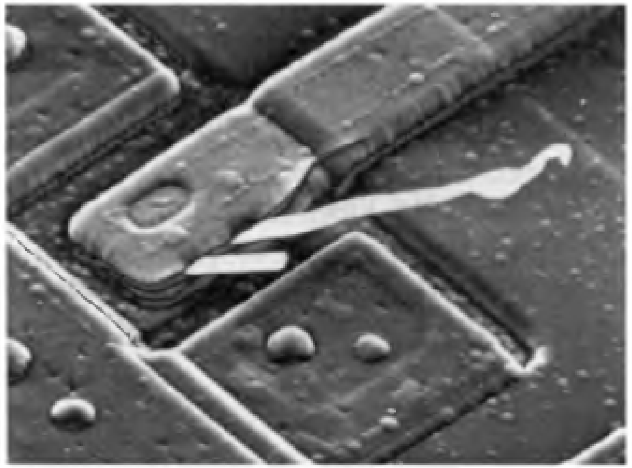
Высокочастотный фильтр



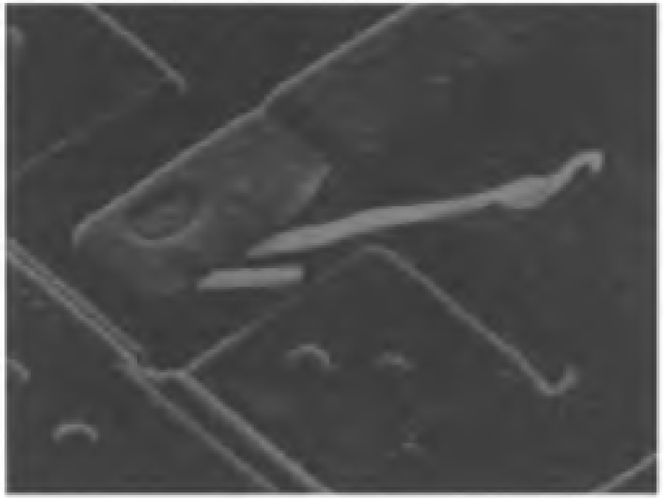
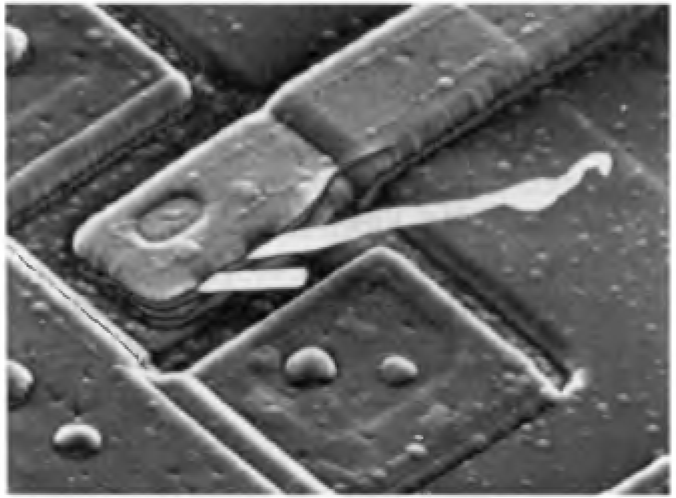


Высокочастотный фильтр с добавлением к передаточной функции константы, равной половине высоты фильтра





Результаты высокочастотной фильтрации изображения

Модификация фильтра добавлением к передаточной функции константы, равной половине высоты фильтра

Теорема о свёртке

Соответствие между фильтрацией в частотной и пространственной областями

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

Дискретная свёртка

$$f(x,y)*h(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

Сравнение фильтров

- Частотные почти всегда нагляднее
- Пространственные много меньшего размера

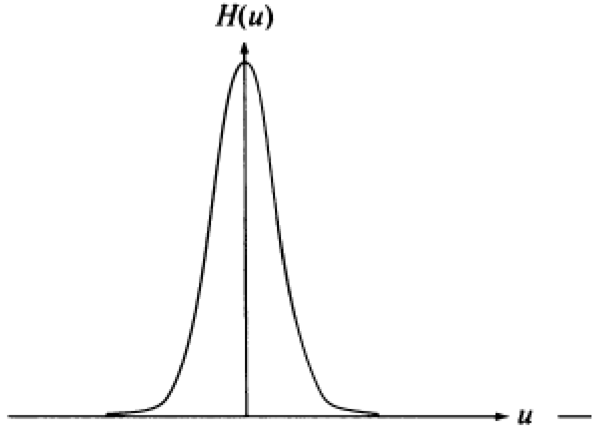
Частотный → Прообраз (пространственный) → Маска меньшего размера

Получение пространственного фильтра из частотного

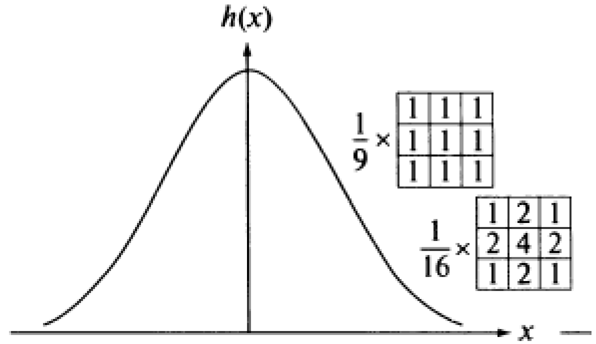
1. Функция фильтра $H(u,v)$ * $(-1)^{u+v}$
2. Вычисляется обратное ДПФ
3. Вещественная часть * $(-1)^{x+y}$

Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$



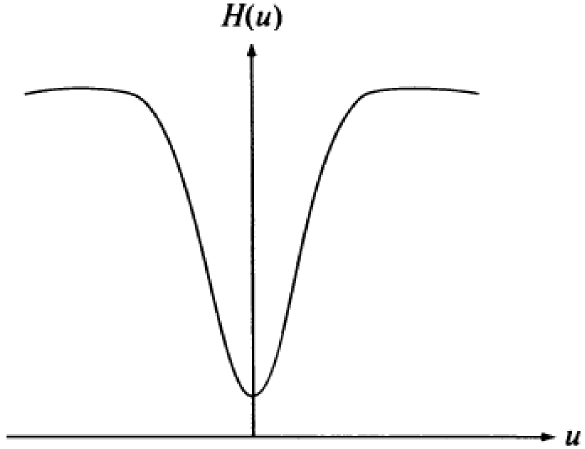
$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 x^2}$$



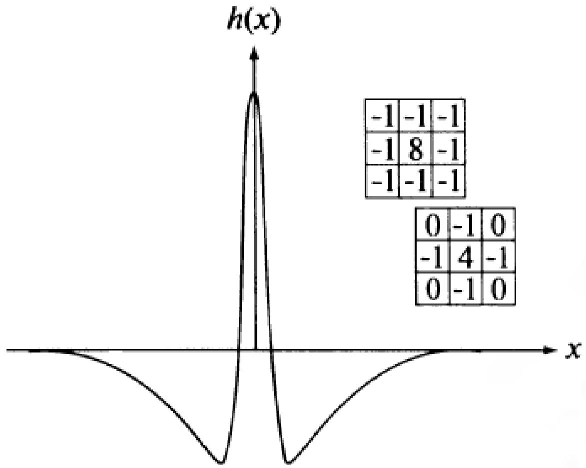
Низкочастотный

Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2}$$

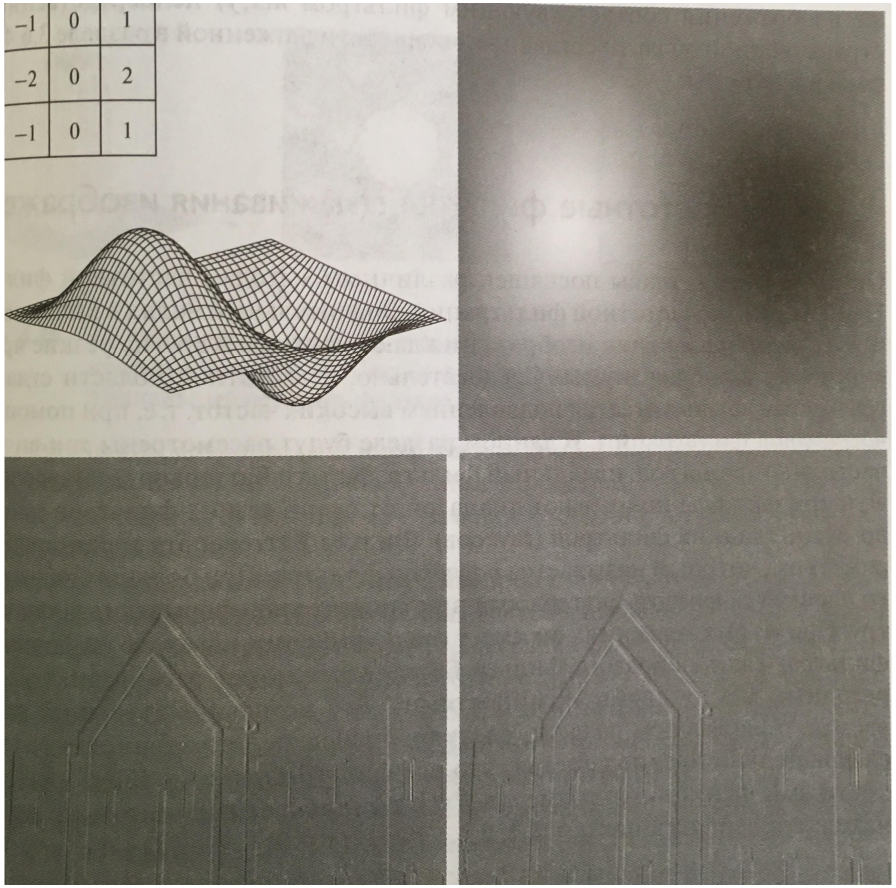


$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 B e^{-2\pi^2\sigma_2^2 x^2}$$



Высокочастотный

Пространственная и частотная маски



Частотная фильтрация

Пространственная фильтрация

Сглаживающие низкочастотные фильтры

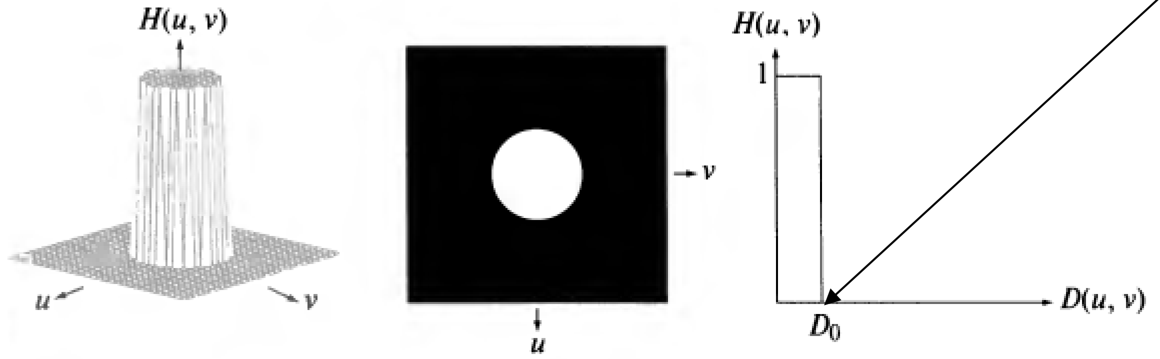
- Идеальные фильтры низких частот – очень резкий
- Фильтр Баттерворта – переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр – очень гладкий

Идеальные фильтры низких частот (ИФНЧ)

$$H(u,v)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad D(u,v)\le D_0\\ 0, & \text{при} \quad D(u,v)> D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

Частота среза



Величины для сравнение низкочастотных фильтров

Полная энергия
$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} P(u,v)$$

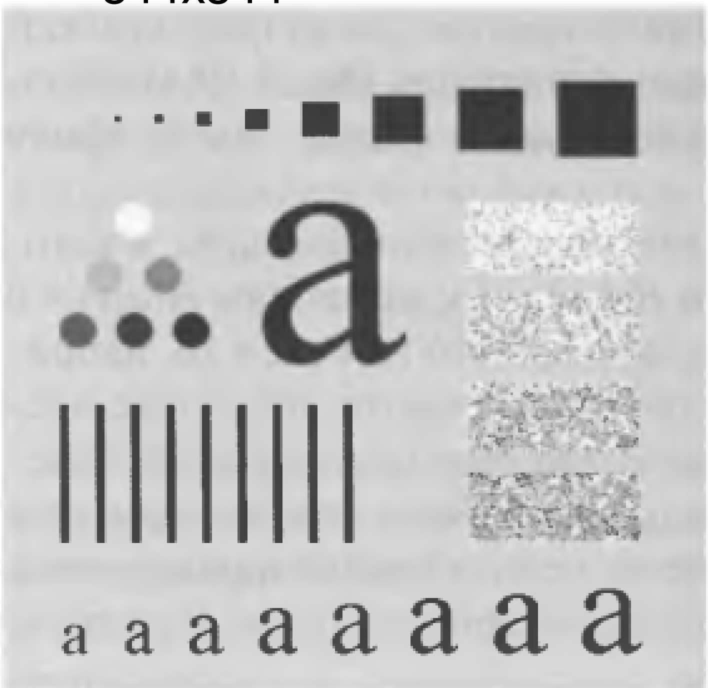
$$P(u,v) = \left|F(u,v)\right|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

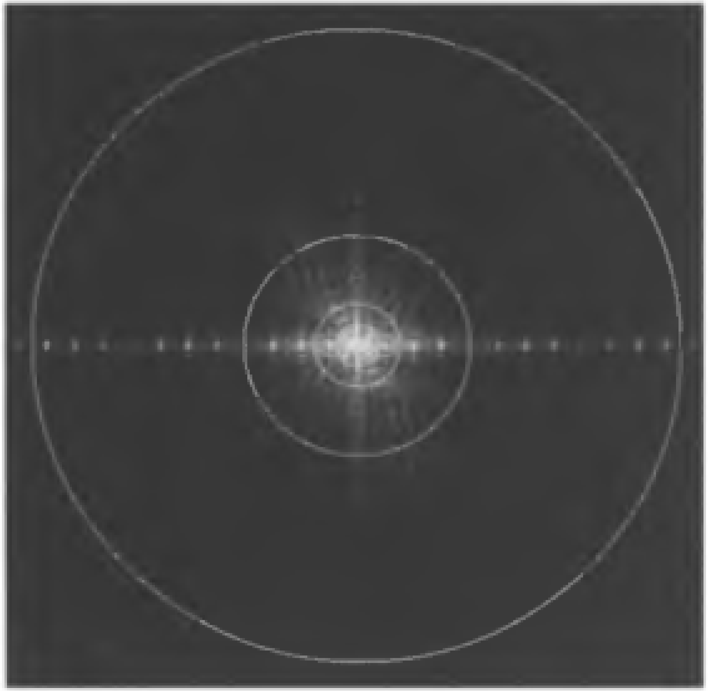
$$\alpha = 100\left[\sum_{u}\sum_{v} P(u,v) / P_T\right]$$

Частота r(α) – радиус круга с центром в центре частотного прямоугольника, содержащего α процентов энергии спектра

Пример. Энергия изображения как функция расстояния от центра ДПФ

344x344

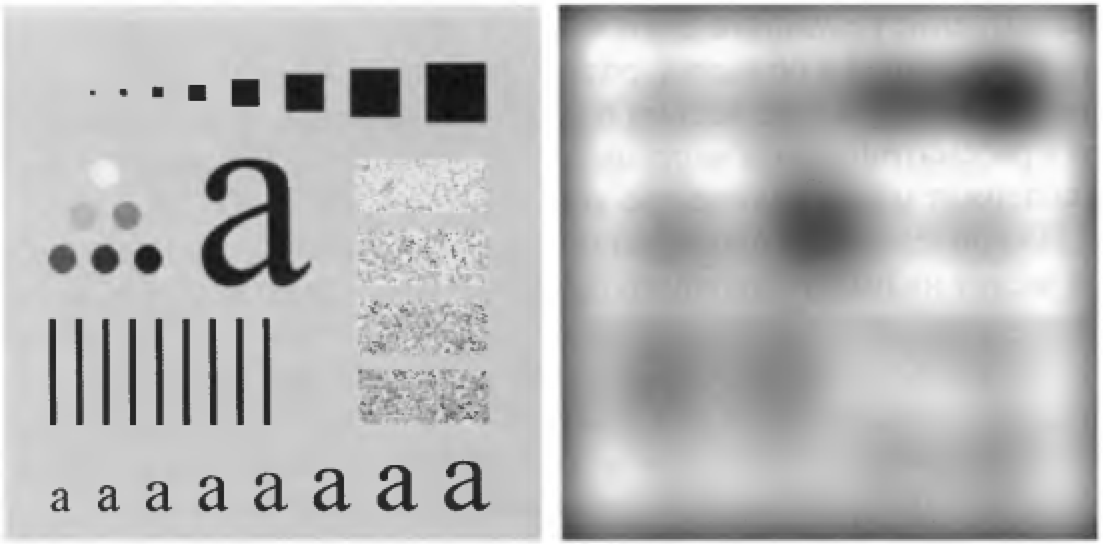




R = 5, 15, 30, 80, 230

α = 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, 99.5

Результаты фильтрации

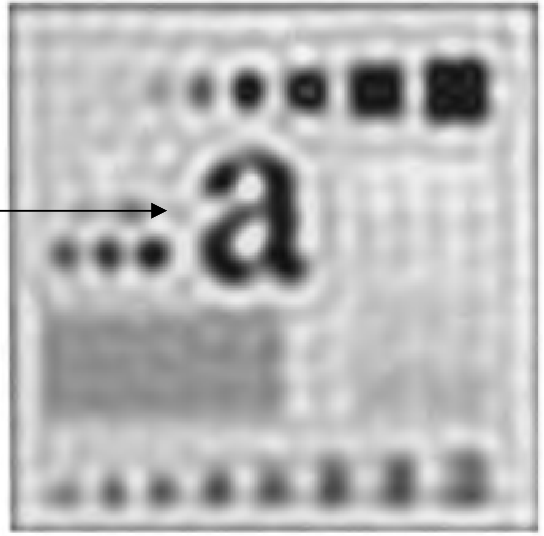


$R = 5, \alpha = 92$

Результаты фильтрации

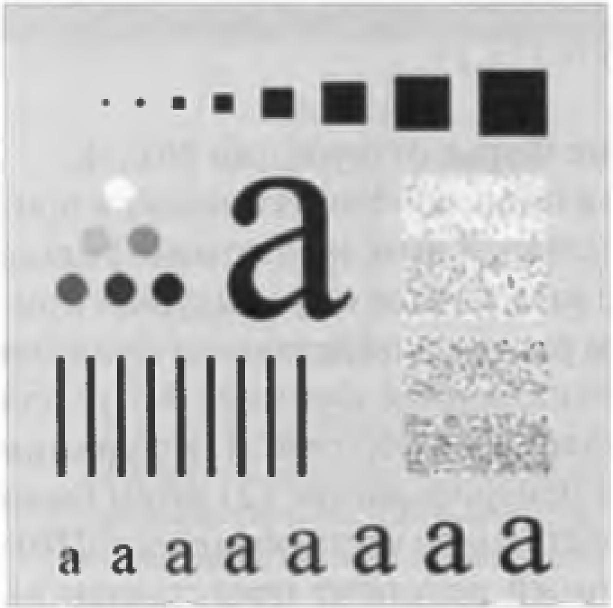
Звон

(явление Гиббса)



$R = 15,\ \alpha = 94.6$ $R = 30,\ \alpha = 96.4$

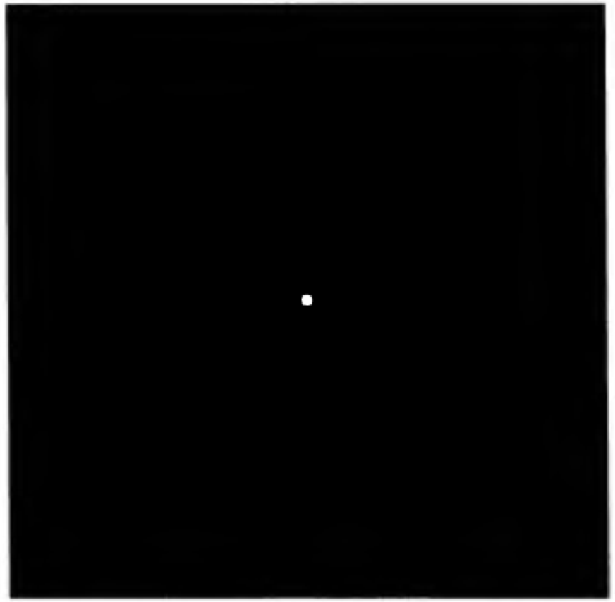
Результаты фильтрации

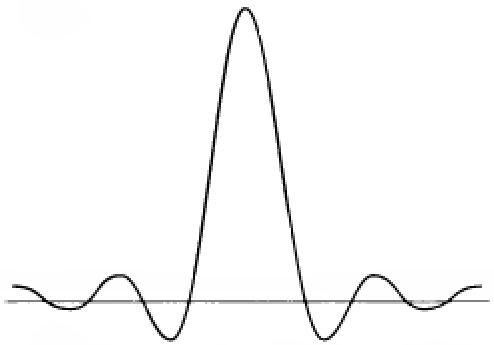


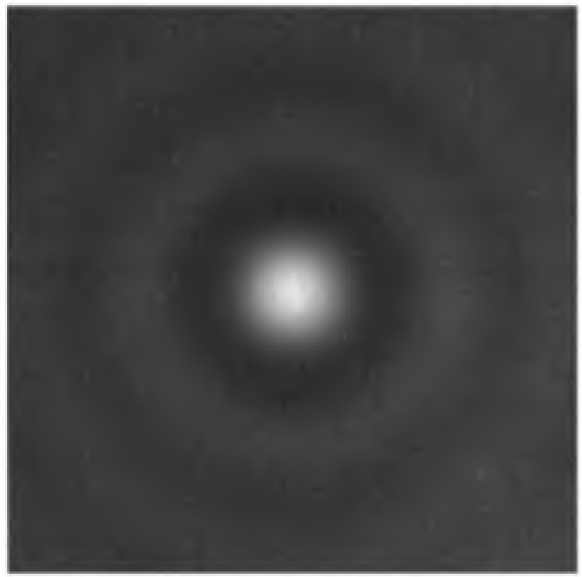
$R = 80, \alpha = 98$

$R = 230, \alpha = 99.5$

Откуда берется звон



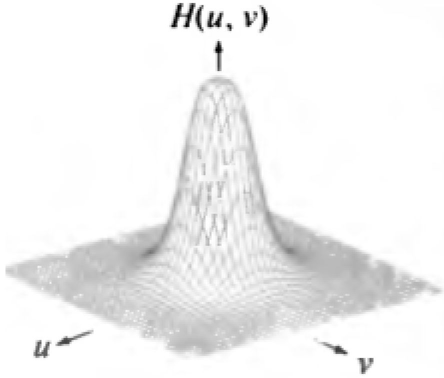


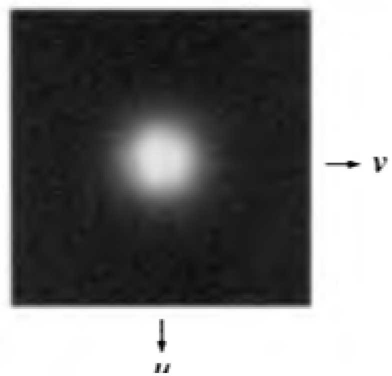


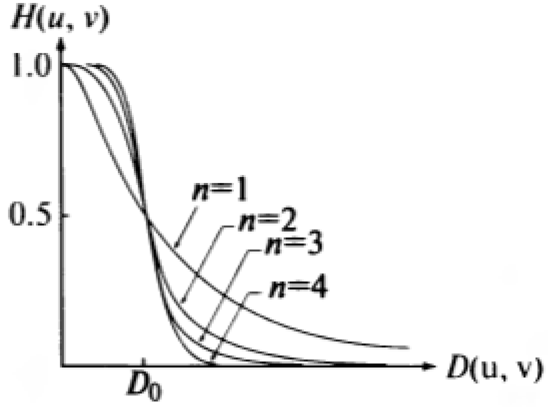
R = 5,   M x N = 1000 x 1000

Фильтры низких частот Баттерворта (БФНЧ)

БФНЧ



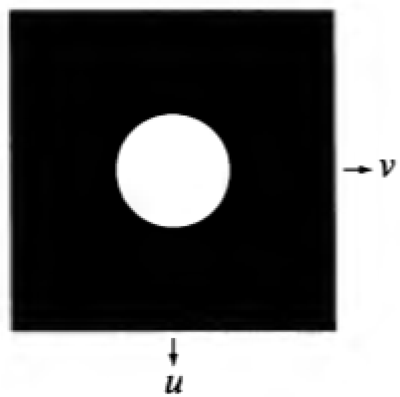


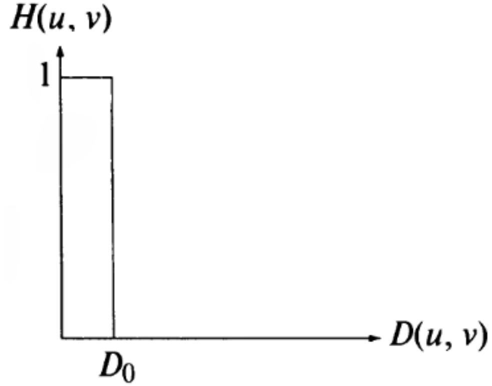


$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

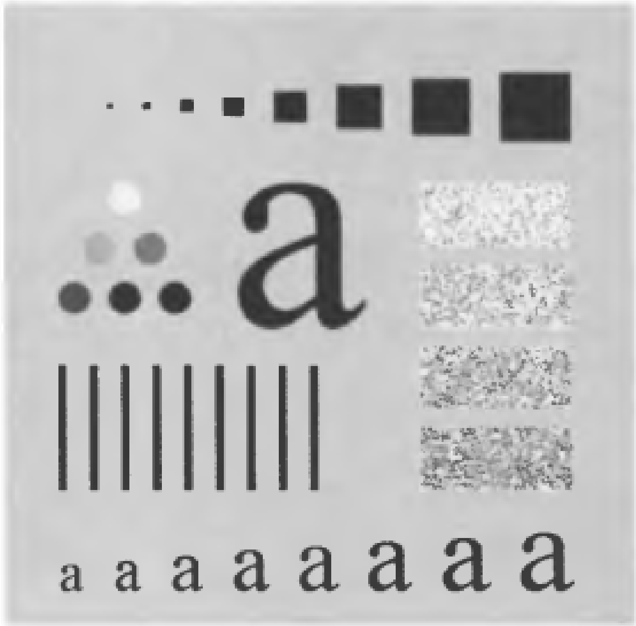
$$D(u,v)=D_0 \qquad H(u,v)=0{,}5$$





ИФНЧ

Результаты применения БФНЧ (n=2)



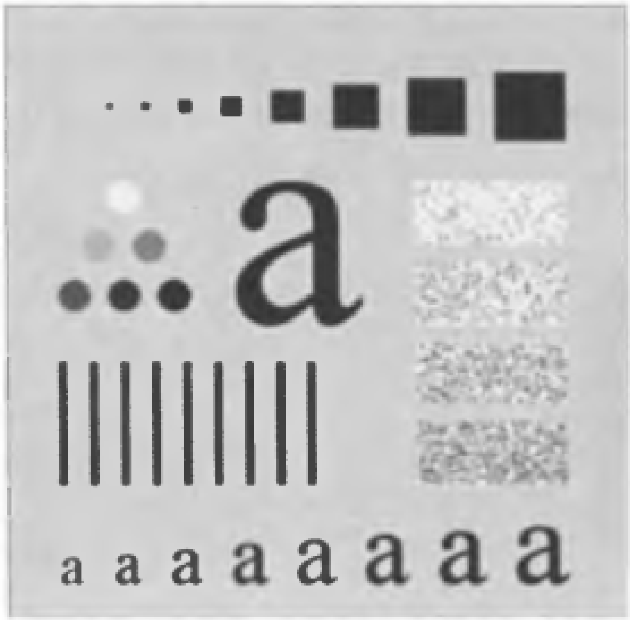
R = 5, α = 92

Результаты применения БФНЧ (n=2)

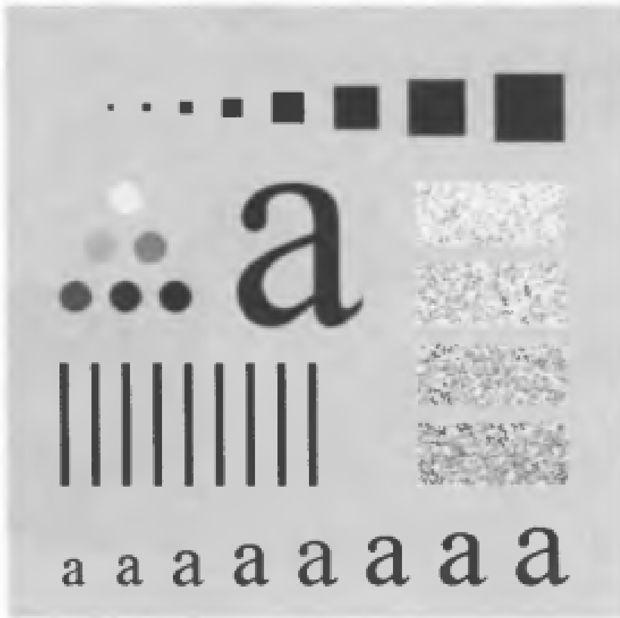
$R = 15,\ \alpha = 94.6$

$R = 30,\ \alpha = 96.4$

Результаты применения БФНЧ (n=2)

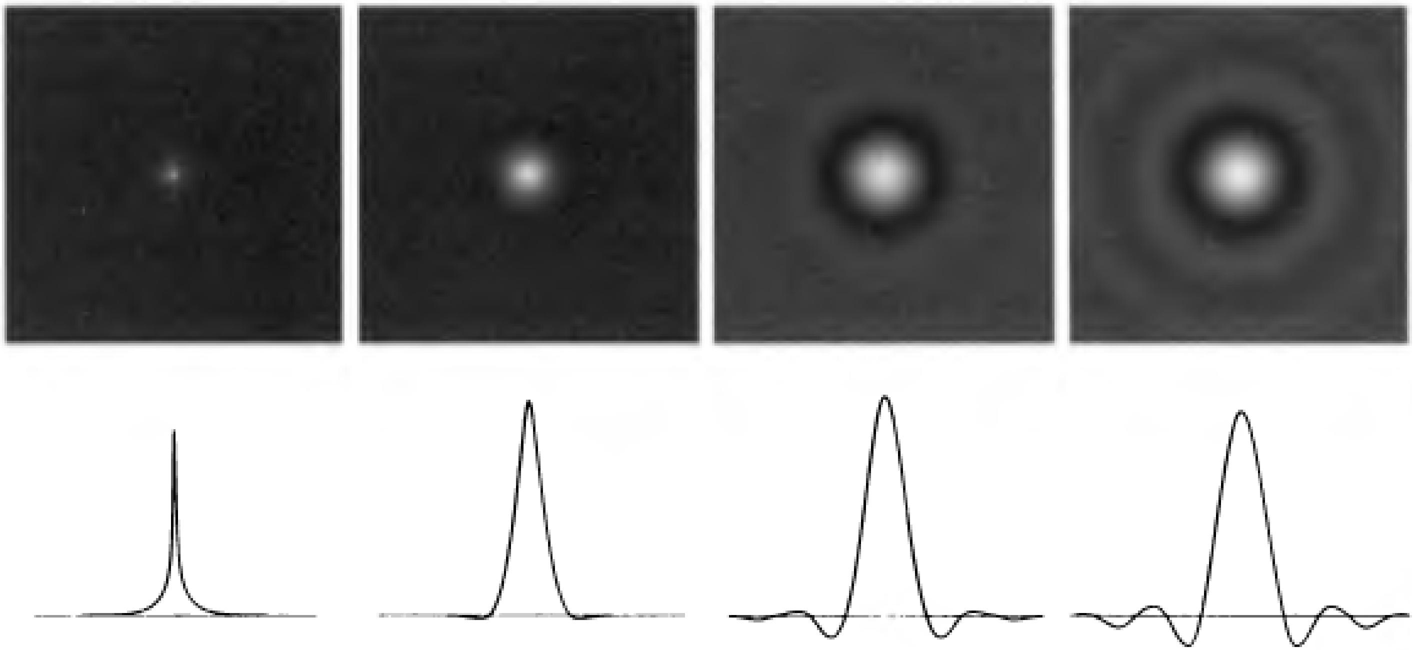


R = 80, α = 98



R = 230, α = 99.5

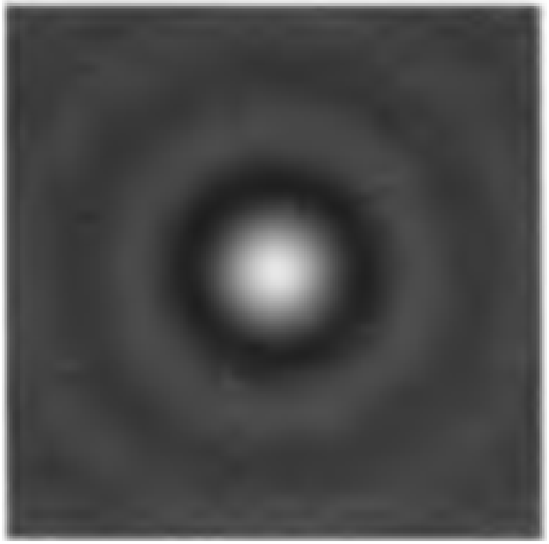
Пространственное представление БФНЧ и профили яркости



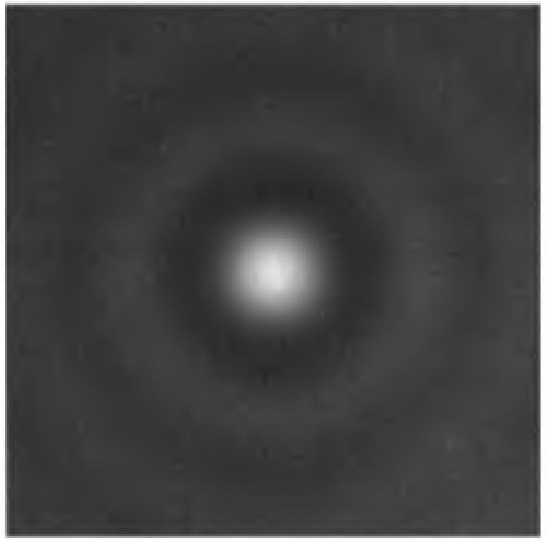
$D_0 = 5$

n= 1, 2, 5, 20

Сравнение БФНЧ (n=20 →∞) и ИФНЧ



БФНЧ (n=20)



ИФНЧ

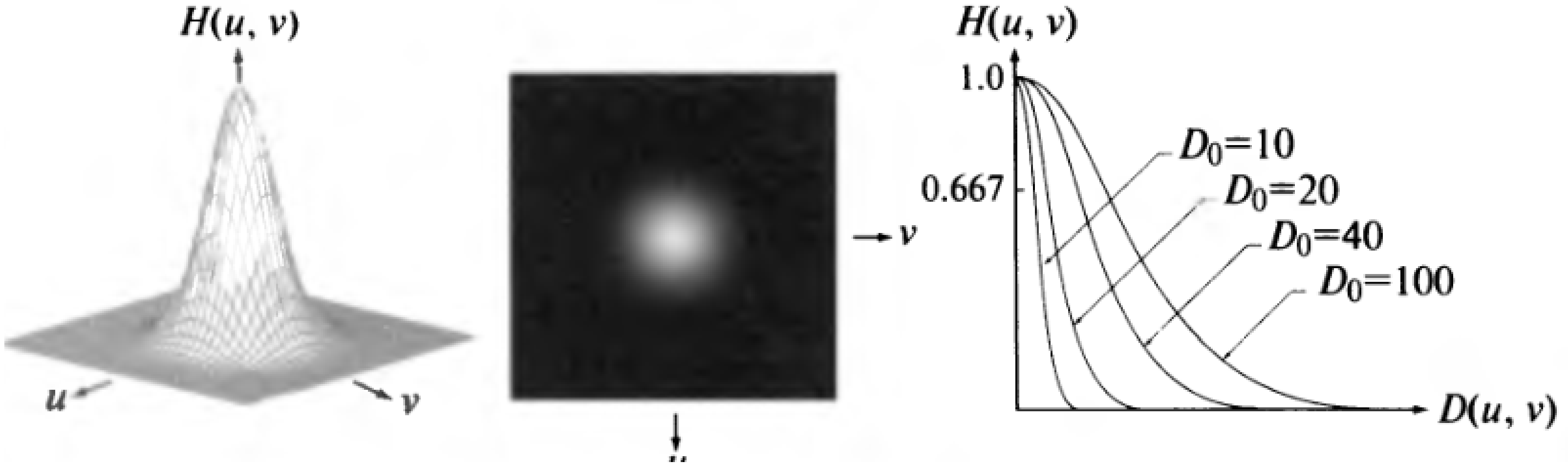
D_0=5

Гауссовы фильтры низких частот (ГФНЧ)

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} \qquad H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

$$D(u,v) = D_0 \qquad H(u,v) = 0{,}607$$



Результаты применения ГФНЧ

$R = 5, \alpha = 92$

Результаты применения ГФНЧ

R = 15, $\alpha = 94.6$ R = 30, $\alpha = 96.4$

Результаты применения ГФНЧ

R = 80, $\alpha = 98$

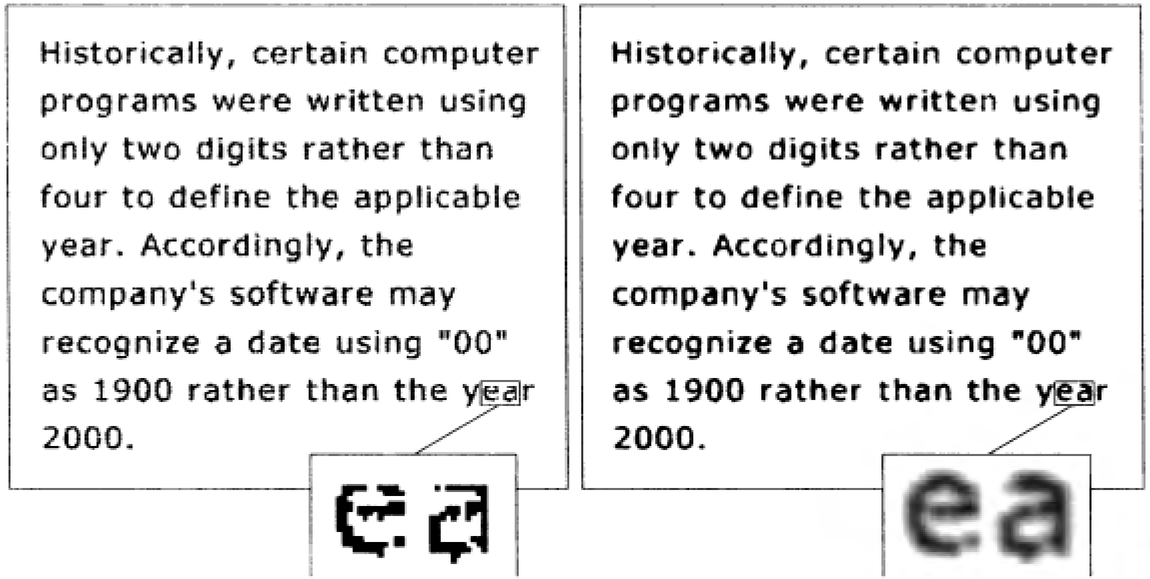
R = 230, $\alpha = 99.5$

Сравнение БФНЧ и ГФНЧ (D_0=15)

$R = 15, \alpha = 94.6$

$R = 15, \alpha = 94.6$

Примеры низкочастотной фильтрации в распознавании текста



ГФНЧ (D_0=80) размер изображения 444 x 508

Примеры низкочастотной фильтрации в полиграфии

ГФНЧ (D_0=100, D_0=80) размер изображения 1028 x 732

Частотные фильтры повышения резкости

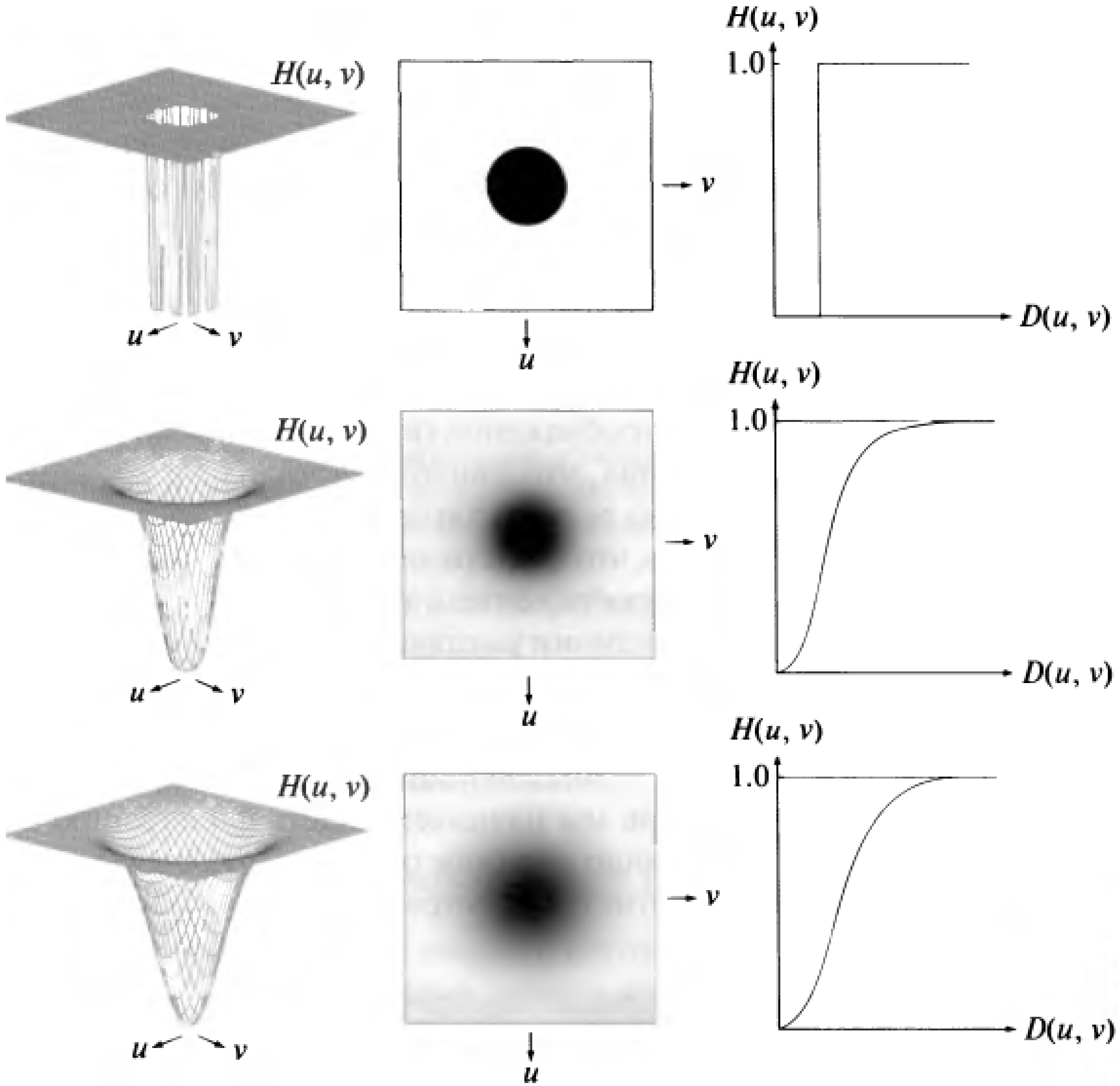
Рассматриваем центрально-симметричные фильтры нулевого фазового сдвига

Передаточная функция $$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

Высокочастотные фильтры

- Идеальные фильтры высоких частот – очень резкий
- Фильтр Баттерворта – переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр – очень гладкий

Высокочастотные фильтры

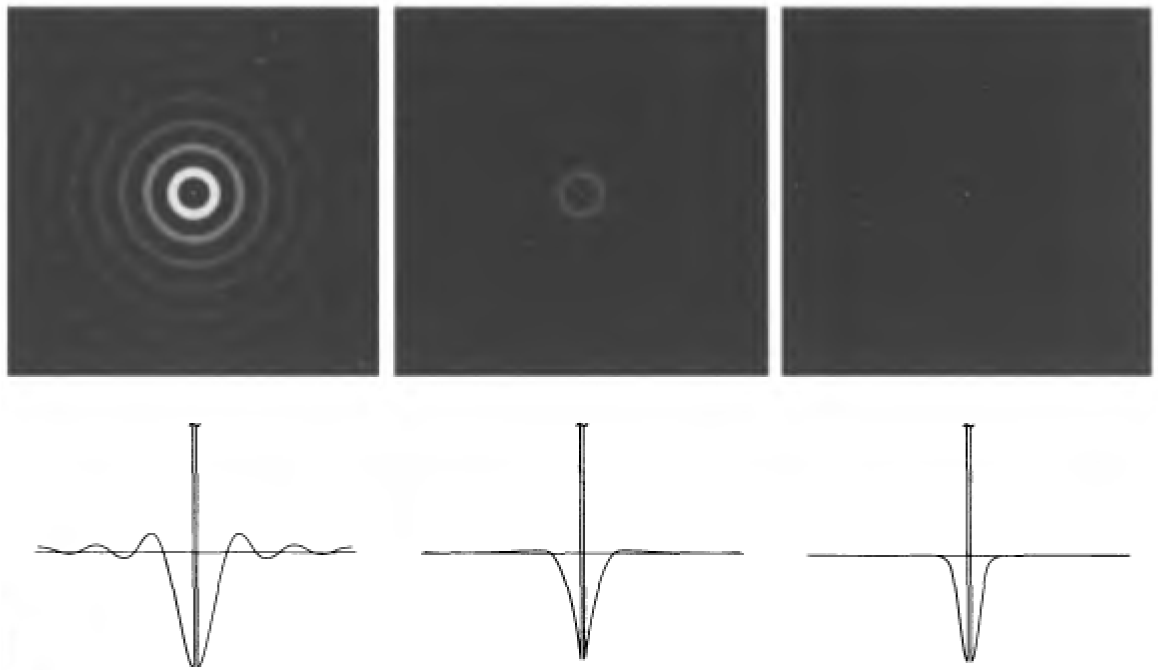


Идеальные фильтры низких частот (ИФВЧ)

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad D(u,v)\le D_0\\ 1, & \text{при} \quad D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

Представление в пространственной области



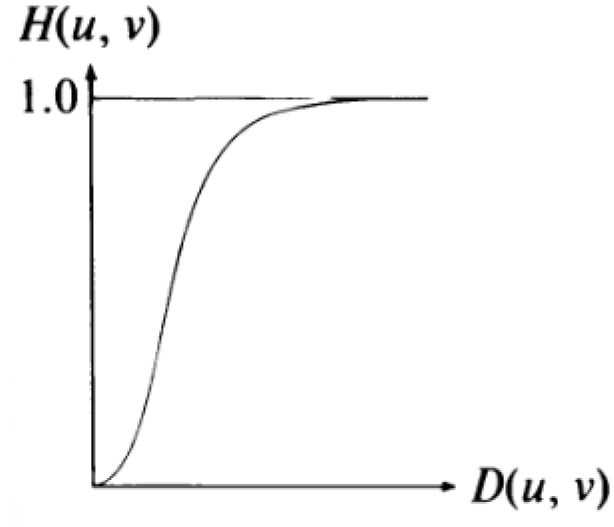
Идеальный Баттерворта Гауссов

Результат применения ИФВЧ

D_0 = 15, 30, 80

Фильтры высоких частот Баттерворта (БФВЧ)

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D_0 / D(u,v)\right]^{2n}}$$



Результаты применения БФВЧ (n=2)

D_0 = 15, 30, 80

Гауссовы фильтры высоких частот (ГФВЧ)

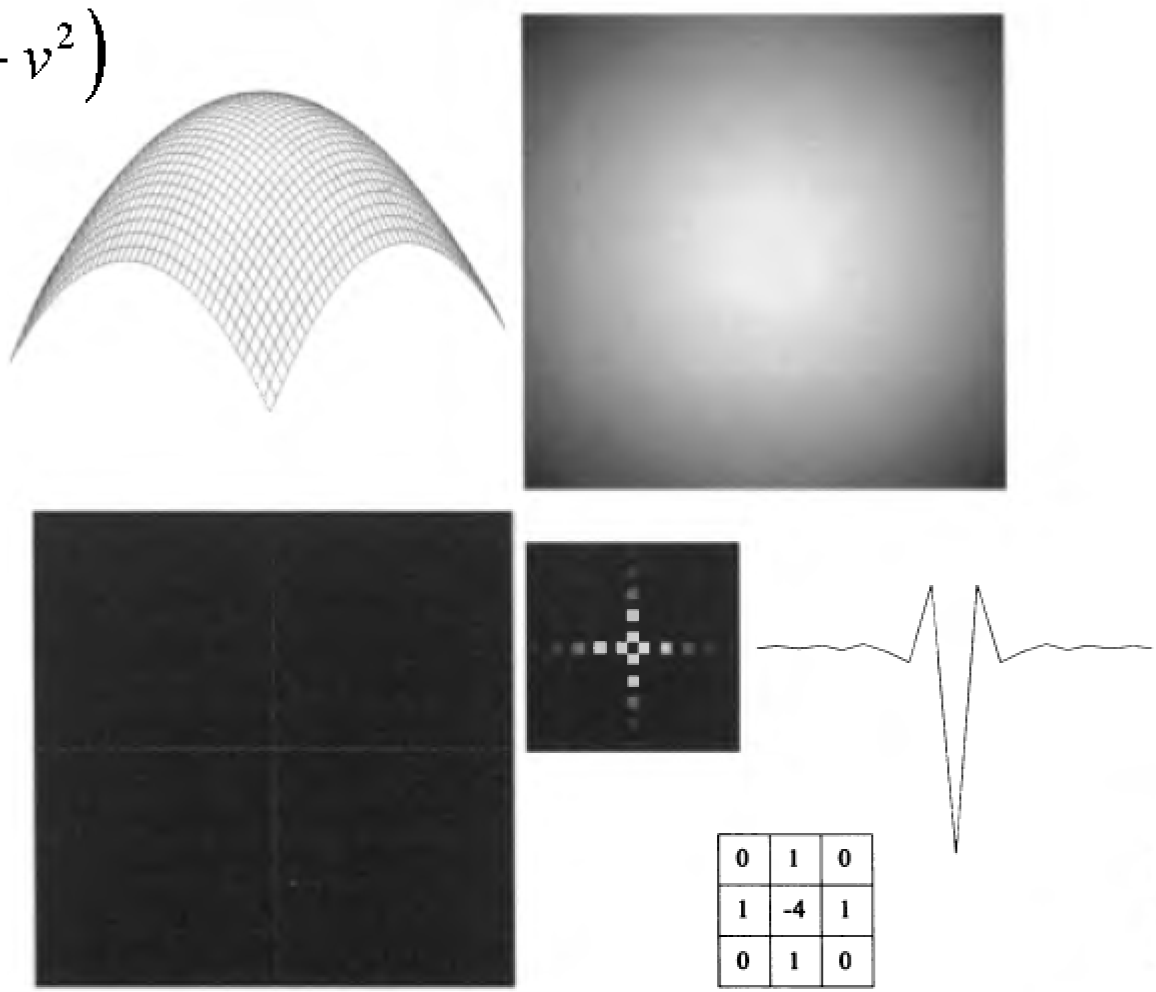
$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

Результаты применения ГФВЧ

D_0 = 15, 30, 80

Лапласиан в частотной и пространственной областях

$$H(u,v) = -4Pi^2\left(u^2+v^2\right)$$



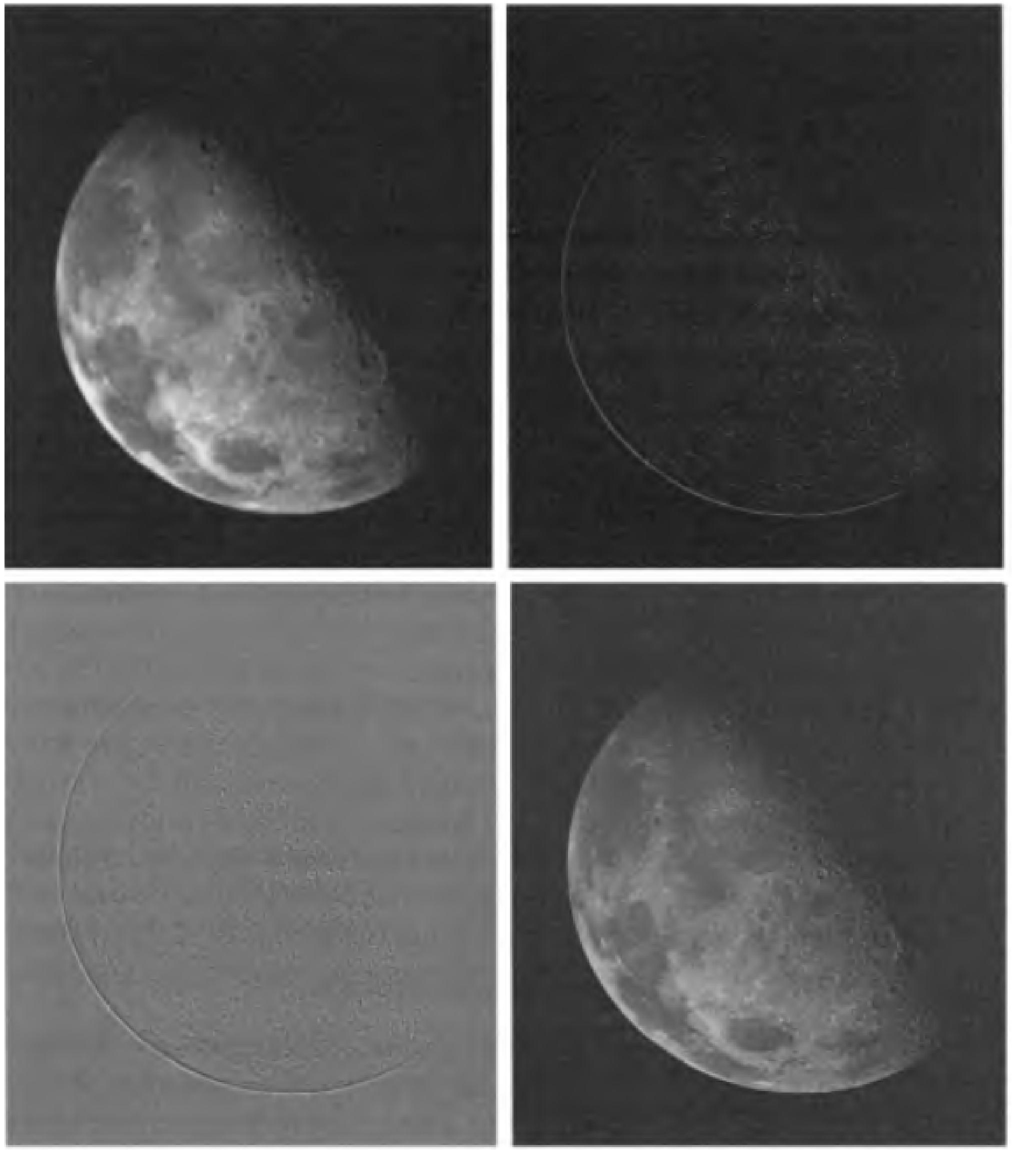
0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Для получения улучшенного изображения

вычитаем Лапласиан (изображение полученное с использованием частотного фильтра Лапласа) из оригинала

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2(x, y)$$

Применение лапласиана в частотной области



Вариации фильтров

- Нерезкое маскирование
- Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики
- Фильтрация с усилением высоких частот

Нерезкое маскирование

нерезкое маскирование = оригинал – сглаженная копия

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

Нерезкое маскирование в частотной области

$$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

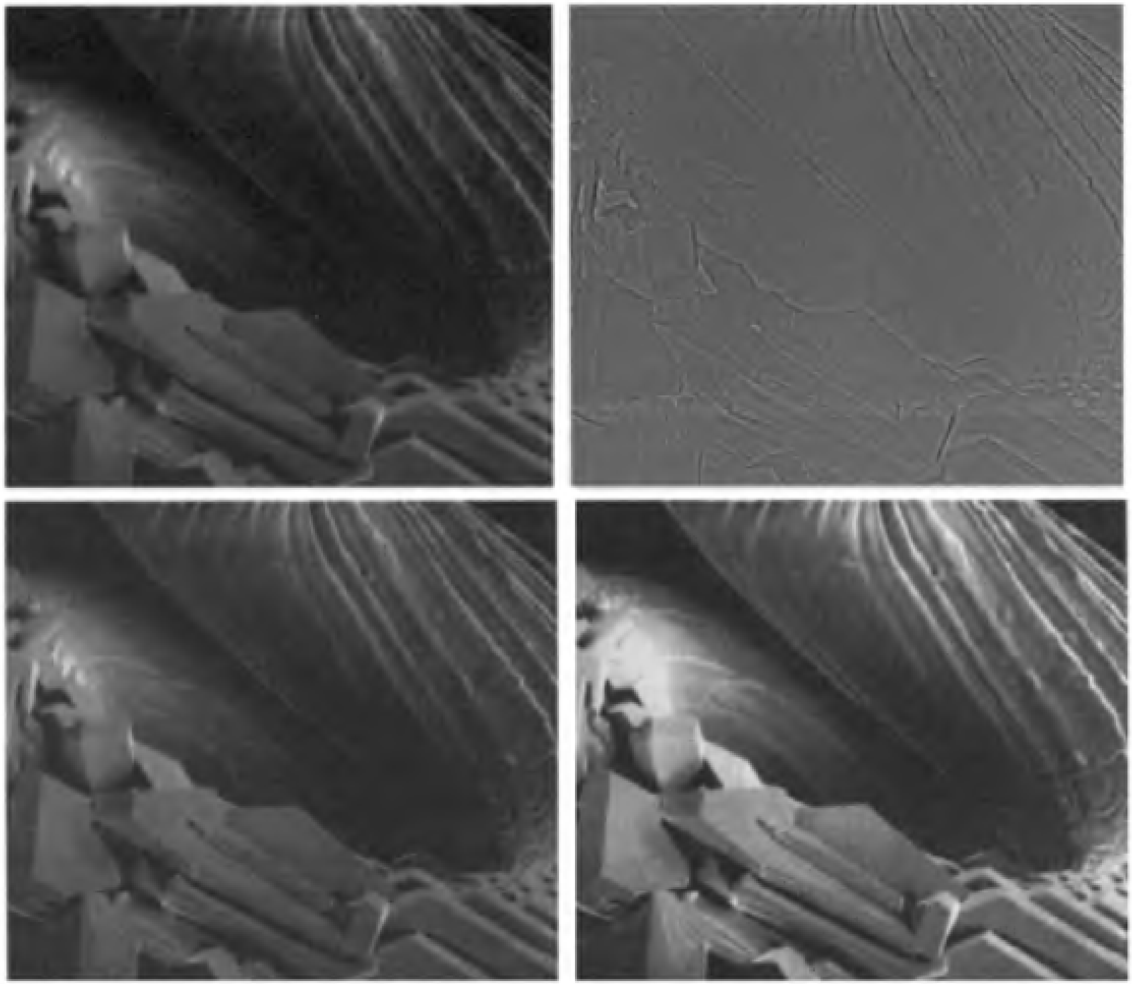
$$f_{hb}(x, y) = (A-1)f(x, y) + f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

$$f_{hb}(x, y) = (A-1)f(x, y) + f_{hp}(x, y)$$

Фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$H_{hb}(u,v) = (A-1) + H_{hp}(u,v)$$

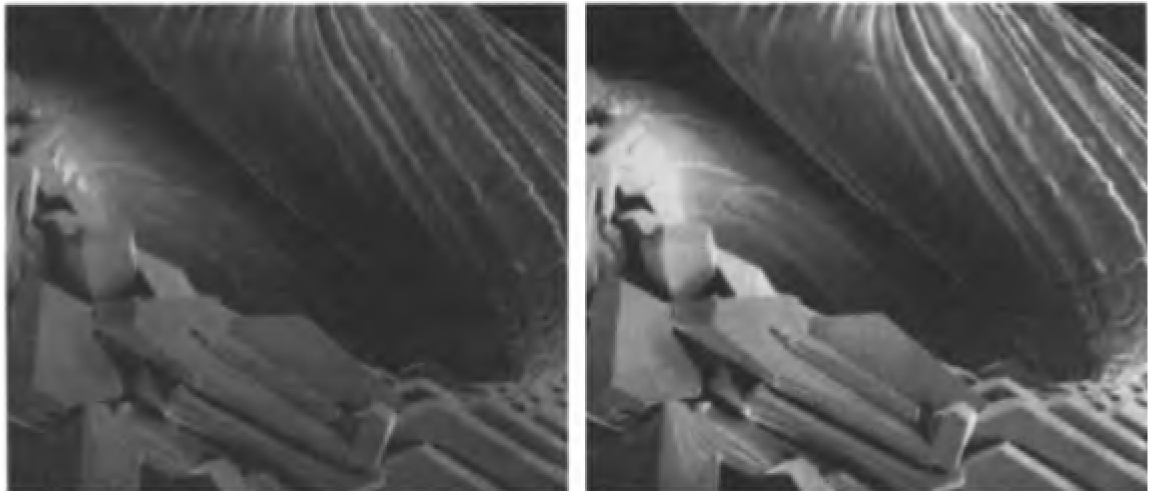
Результат ФВЧ с подъемом частотной характеристики



Лапласиан

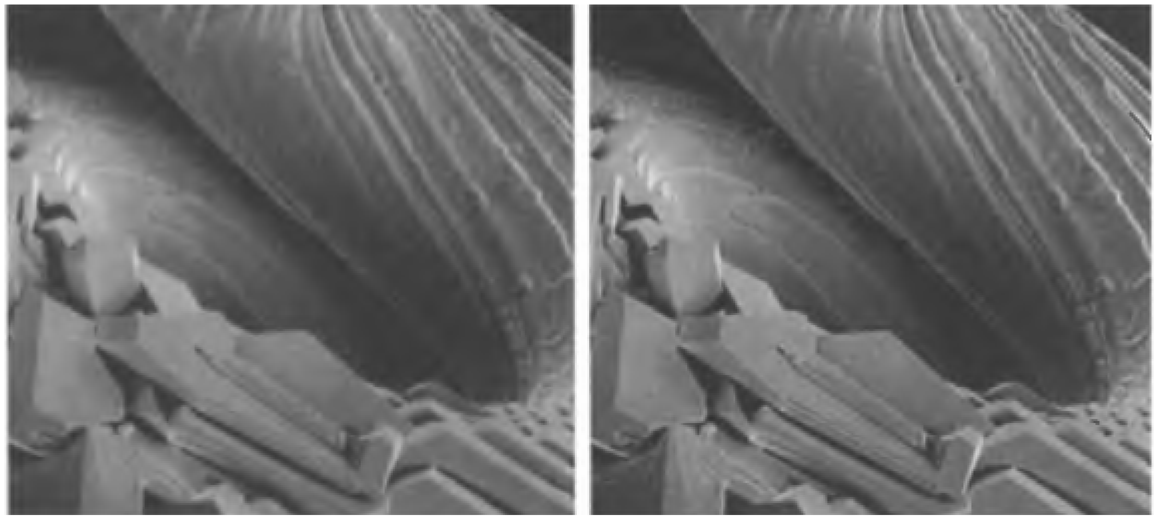
A=2.0 A=2.7

Сравнение частотного лапласиана с пространственным



частотный

пространственный



Результат применения фильтрации с усилением высоких частот

БФВЧ n=2
D_0=5%
высоты

Усиление высоких частот +Эквализация гистограммы

Гомоморфная фильтрация

Сжатие яркостного диапазона и усиление контраста

Еще один вариант представления изображения

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

Сложности частотной обработки

$$\Im\{f(x,y)\} \neq \Im\{i(x,y)\}\Im\{r(x,y)\}$$

Рассмотрим величину

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln rf(x,y)$$

Тогда

$$\Im\{z(x,y)\} = \Im\{\ln f(x,y)\} = \Im\{\ln i(x,y)\} + \Im\{\ln r(x,y)\}$$

или

$$Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$

Применим фильтрацию

$$S(u,v) = H(u,v)Z(u,v) = H(u,v)F_i(u,v) + H(u,v)F_r(u,v)$$

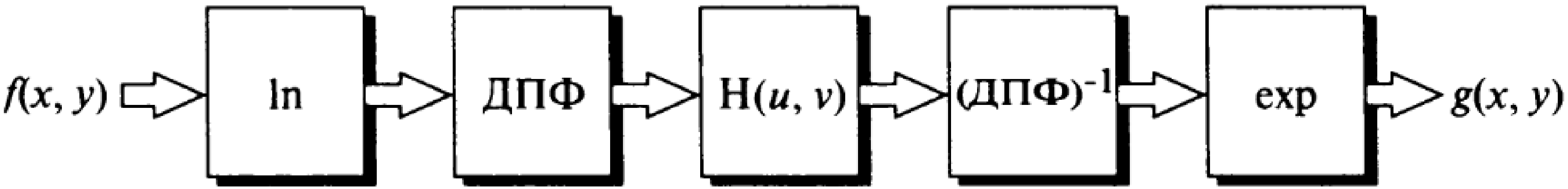
В пространственной области имеем

$$s(x,y) = \Im^{-1}\{S(u,v)\} = \Im^{-1}\{H(u,v)F_i(u,v)\} + \Im^{-1}\{H(u,v)F_r(u,v)\}$$

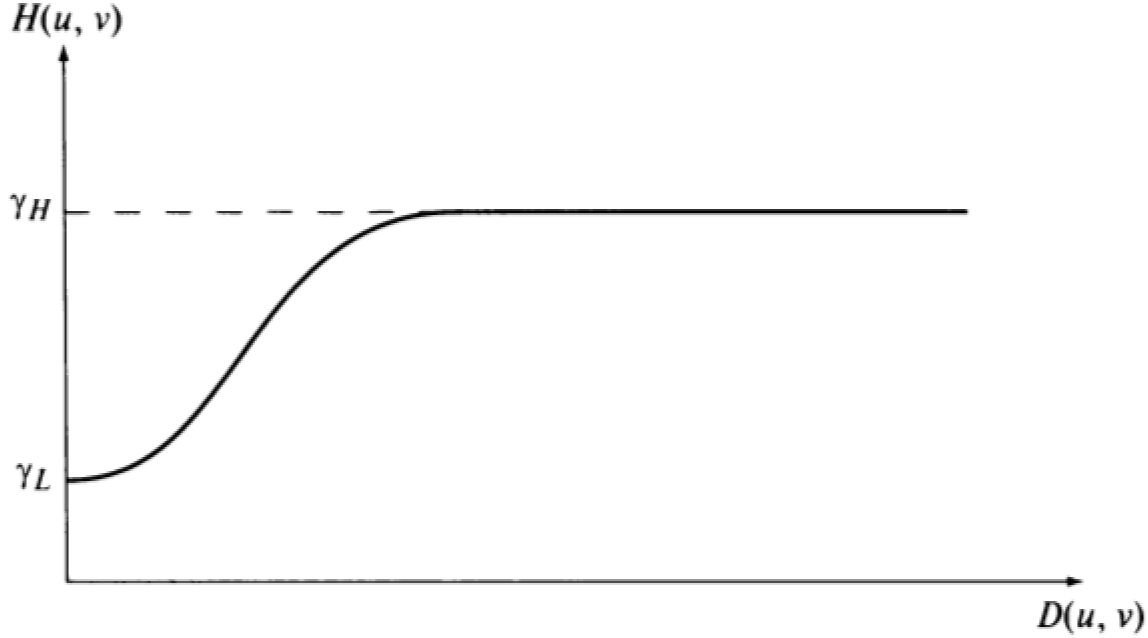
$$s(x,y) = i'(x,y) + r'(x,y)$$

$$g(x,y) = e^{s(x,y)} = e^{i'(x,y)} \cdot e^{r'(x,y)} = i_0(x,y) \cdot r_0(x,y)$$

Схема метода гомоморфной фильтрации



Профиль центрально-симетричной передаточной функции фильтра



$Y_L<1$ $Y_H>1$

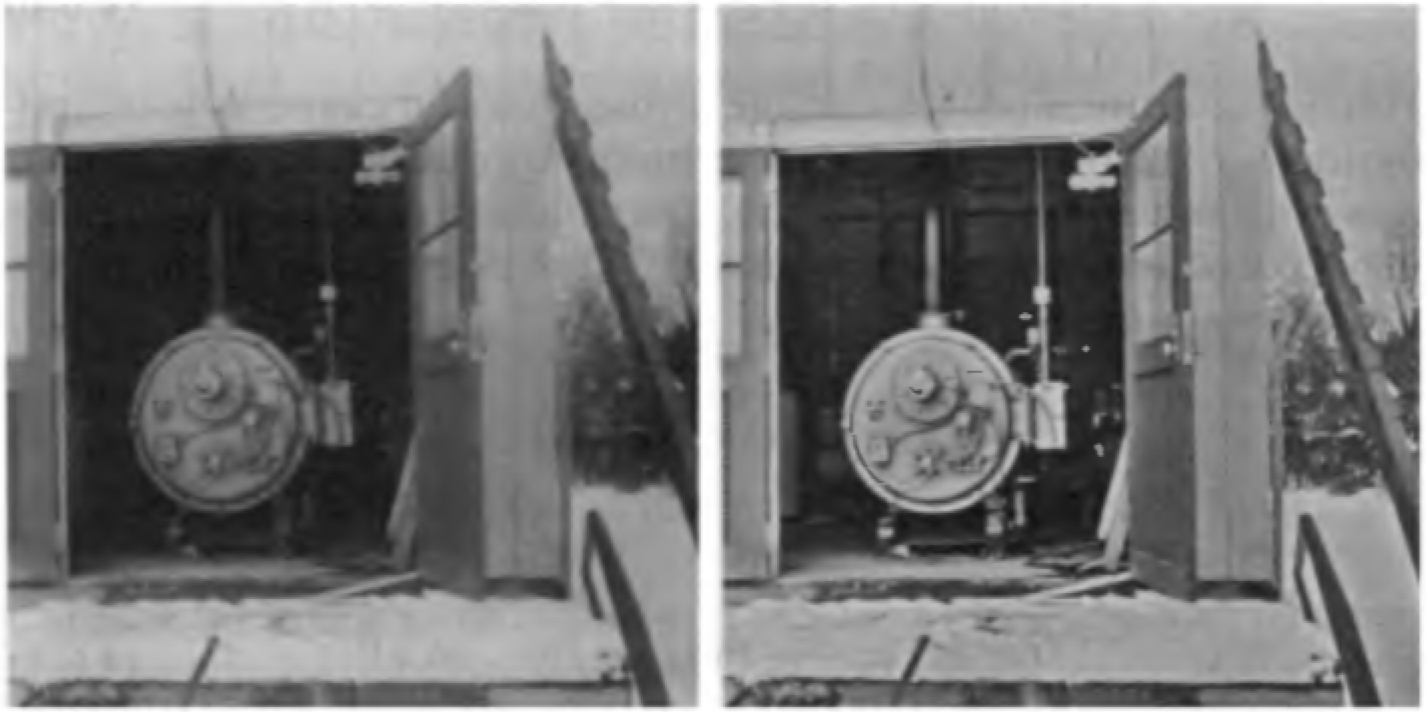
Аппроксимация модифицированным ГФВЧ

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L)\left|1 - e^{\left(-c\left(D^2(u,v)/D_0^2\right)\right)}\right| + \gamma_L$$

Константа С управляет крутизной наклона

Похож на фильтр усиления высоких частот

Результат гомоморфной фильтрации



$$\gamma_L = 0.5 \quad \gamma_H = 2.0$$