

Лабораторная работа №1

П. С. Углич

кафедра теории упругости

16 февраля 2025 г.

Оглавление

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 Исследование свободных колебаний
 - Простейший способ
 - Метод линеаризации
 - Метод гармонического баланса
- 3 Варианты заданий
 - Уравнения

Механические системы с одной степенью свободы описываются автономными системами дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Плоскость переменных x, y называется фазовой. Точка (x, y) называется изображающей, кривая, которая описывает изображающая точка с течением времени, называется фазовой кривой. Полная совокупность различных фазовых траекторий называется фазовым портретом.

Особыми точками называются точки, в которых

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

Предположим, что x_0, y_0 — особая точка системы (1).

Произведём линеаризацию системы в окрестности особой точки

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \dots, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \dots \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) введены следующие обозначения:

$$\xi = x - x_0, \eta = y - y_0,$$
$$a_{11} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0},$$
$$a_{21} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}.$$

Характер особых точек определяется характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

- если корни уравнения (3) — вещественные одного знака, то точка называется узлом, если корни положительные — неустойчивым узлом, если корни отрицательные — устойчивым;
- если корни уравнения (3) — вещественные разных знаков, точка называется седловой;
- если корни уравнения (3) — комплексно сопряженные вида $\alpha \pm i\beta$, точка называется устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ и неустойчивым, если $\alpha > 0$;
- если корни уравнения (3) — чисто мнимые вида $\pm i\beta$, точка называется центром;

При анализе свободных колебаний интерес представляют особые точки типа центра.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (4)$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{g/l}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi, \quad y = \dot{\varphi}$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

Система (8) имеет следующие особые точки:

$$y = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Если n — чётное, то уравнение (9) имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.

Если n — нечётное, то уравнение (9) имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm \omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует верхнее положение маятника.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{g/l}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi, \quad y = \dot{\varphi}$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) имеет следующие особые точки:

$$y = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Если n — чётное, то уравнение (9) имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.

Если n — нечётное, то уравнение (9) имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует верхнее положение маятника. Рассмотрим уравнение (7) в окрестности особой точки $(0, 0)$. Разложим в ряд функцию $\sin \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \right) = 0 \quad (10)$$

Вволим новую переменную:

$$\theta = \mu\varphi,$$

где μ — малый параметр. В уравнении оставляем слагаемые до третьего порядка малости. Получаем:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\mu^2\frac{\theta^3}{6} \quad (11)$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \varepsilon\theta^3, \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu^2\omega^2}{6}$$

Уравнение (12) описывает колебания конечного размаха математического маятника и совпадает с уравнением Дюффинга.

Наиболее прост следующий, основанный на методе коллокаций, приём приближенного определения закона движения точки.

Решение уравнения

$$m\ddot{x} + F(x) = 0, \quad (13)$$

описывающего движение механической системы с одной степенью свободы и позиционной (зависящей только от координаты) восстанавливающей силой в случае симметрии ($-F(x) = -F(x)$) ищем в виде:

$$x = A \sin(pt + \alpha) \quad (14)$$

Потребуем, чтобы функция (14) удовлетворяла уравнению (13) в момент прохождения через положение равновесия и в моменты, когда x достигает максимума, то есть равно A .

Поскольку $F(0) = 0$ и

$$x|_{x=0} = 0,$$

то функция (14) удовлетворяет уравнению (13) в моменты, прохождения через положение равновесия. Далее $x = x_{max}$ при $\sin(pt + \alpha) = 1$. Поэтому

$$\ddot{x}_{max} = -p^2 A$$

Тогда из (13) следует:

$$p^2 = \frac{F(A)}{mA} \quad (15)$$

Последняя формула определяет зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды. График этой зависимости называется скелетной кривой.

Подставляя (15) в (14), найдём приближённый закон движения рассматриваемой системы:

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{F(A)}{mA}} t + \alpha \right) \quad (16)$$

Метод линеаризации

Способ основан на непосредственной замене нелинейной характеристики $F(x)$ некоторым эквивалентным линейным выражением. Так, при симметричной характеристике вместо $F(x)$ принимается cx , где c — коэффициент, значение которого подбирается из условия минимизации интегрального квадратичного уклонения

$$\delta(c) = \int_{-A}^A [F(x) - cx]^2 dx \quad (17)$$

Найдём c , доставляющее минимальное значение уклонению.

$$\frac{d\delta}{dc} = 2 \int_{-A}^A [F(x) - cx](-x)dx = 0 \quad (18)$$

Преобразуем (18):

$$- \int_{-A}^A xF(x)dx + c \int_{-A}^A x^2 = 0$$

Отсюда

$$c = \frac{3}{2A^3} \int_{-A}^A xF(x)dx \quad (19)$$

Чтобы поднять роль больших амплитуд, используют функционал вида:

$$\delta(c) = \int_{-A}^A x^2 [F(x) - cx]^2 dx \quad (20)$$

Тогда формула (19) принимает вид:

$$c = \frac{5}{2A^5} \int_{-A}^A x^3 F(x) dx \quad (21)$$

Частоту колебаний находим по формуле

$$p^2 = \frac{c}{m}$$

Скелетной кривой будем называть зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды.

Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (22)$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила.

Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.

Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \quad (23)$$

Подставим (23) в (22):

$$-Ap^2 \sin pt + f(A \sin pt) = 0, \quad (24)$$

Функция $f(A \sin pt)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(A \sin pt) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kpt, \quad (25)$$

где

$$B_k = \frac{1}{p\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(A \sin pt) \sin kpt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin k\psi d\psi$$

Оставим в разложении (26) одно только первое слагаемое и подставим его в (24):

$$-Ap^2 \sin pt + B_1 \sin pt = 0,$$

или

$$-Ap^2 + B_1 = 0, \tag{26}$$

Из (26) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2 = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \tag{27}$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (28)$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \dots + A_N \cos Npt + B_N \sin Npt$$

или

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \quad (29)$$

Подставляем (29) в (28):

$$-\sum_{n=1}^N n^2 p^2 (A_n \cos npt + B_n \sin npt) + F(t) = 0, \quad (30)$$

В формуле (30) введено обозначение

$$F(t) = f \left[A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \right. \\ \left. \sum_{n=1}^N n (-A_n \sin npt + B_n \cos npt) \right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (31)$$

где

$$a_0 = \frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \cos npt dt,$$

$$b_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \sin npt dt,$$

Подставим разложение (31) в уравнение (30) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1 : \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} F(t) dt = 0, \\
 \cos pt : A_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} F(t) \cos pt dt, \\
 \sin pt : B_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} F(t) \sin pt dt, \\
 \dots\dots\dots \\
 \cos npt : n^2 \rho^2 A_n = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} F(t) \cos npt dt, \\
 \sin npt : n^2 \rho_n^2 = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} F(t) \sin npt dt, \\
 n = \overline{1, N}
 \end{array} \right. \quad (32)$$

Уравнения (32) образуют систему для определения A_j, B_j .
Получив выражения для A_1, B_1 , находим амплитуду
колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и строим скелетную кривую.

Содержание задания:

- найти особые точки систем;
- произвести их классификацию;
- построить фазовые портреты в окрестностях особых точек;
- построить уравнение колебаний конечного размаха (если есть необходимость);
- решить уравнение простейшим способом;
- решить уравнение методом линеаризации с обоими способами построения функционала для отыскания C (если это возможно);
- решить уравнение методом гармонического баланса (в решении оставлять не менее двух слагаемых);
- построить на одном графике скелетные кривые, построенные простейшим методом, методом линеаризации и методом гармонического баланса;

- 1 (Докторов) $(mr^2 + J) \ddot{\varphi} + mgr \sin \alpha \sin \varphi = 0$
- 2 (Медведев) $(I + a\theta) \ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0$
- 3 (Осяк) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta = 0$
- 4 (Подколзин) $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B) \sin \theta \cos \theta = -mgl \sin \theta$
- 5 (Прайс)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2 \sin \theta \cos \theta - Mga \sin \theta = 0$$

Литература I

-  В. В. Степанов.
Курс дифференциальных уравнений.
М.:Наука, 1950.
-  И. М. Бабаков.
Теория колебаний.
М.:Наука, 1968.
-  Я. Г. Пановко.
Введение в теорию механических колебаний.
М.:Наука, 1971.
-  В. Л. Бидерман.
Прикладная теория механических колебаний.
Высшая школа, 1972.