Лабораторная работа №1

П. С. Углич

кафедра теории упругости

28 февраля 2026 г.

Оглавление

Механические системы с одной степенью свободы описываются автономными системами дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

Плоскость переменных x, y называется фазовой. Точка (x, y) называетя изображающей, кривая, которая описывает изображающая точка с течением времени, называется фазовой кривой. Полная совокупность различных фазовых траекторий называется фазовым портретом.
Особыми точками называются точки, в которых

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

Предположим, что x_0, y_0 — особая точка системы (1).

Произведём линеаризацию системы в окрестности особой точки

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \ldots, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2) введены следующие обозначения:

$$\xi = x - x_0,\ \eta = y - y_0,$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},\ a_{12} = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},$$
$$a_{21} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},\ a_{22} = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}.$$

Характер особых точек определяется характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

- если корни уравнения (3) — вещественные одного знака, то точка называется узлом, если корни положительные — неустойчивым узлом, если корни отрицательные — устойчивым;
- если корни уравнения (3) — вещественные разных знаков, точка называется седловой;
- если корни уравнения (3) — комплексно сопряженные вида $\alpha \pm i\beta$, точка называется устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ и неустойчивым, если $\alpha > 0$;
- если корни уравнения (3) — чисто мнимые вида $\pm i\beta$, точка называется центром;

При анализе свободных колебаний интерес представляют особые точки типа центра.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{g/l}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi,\ y = \dot{\varphi}$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

Система (8) имеет следующие особые точки:

$$y = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Если n — чётное, то уравнение (9) имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.
Если n — нечётное, то уравнение (9) имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует верхнее положение маятника.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{g/l}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi,\ y = \dot{\varphi}$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin\varphi \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) имеет следующие особые точки:

$$y = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Если n — чётное, то уравнение (9) имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.
Если n — нечётное, то уравнение (9) имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует верхнее положение маятника.
Рассмотрим уравнение (7) в окрестности особой точки $(0, 0)$.
Разложим в ряд функцию $\sin\varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots\right) = 0 \tag{10}$$

Вволим новую переменную:

$$\theta = \mu\varphi,$$

где μ — малый параметр. В уравнении оставляем слагаемые до третьего порядка малости. Получаем:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\mu^2\frac{\theta^3}{6} \tag{11}$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \varepsilon\theta^3, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu^2\omega^2}{6}$$

Уравнение (12) описывает колебания конечного размаха математического маятника и совпадает с уравнением Дюффинга.

Наиболее прост следующий, основанный на методе коллокаций, приём приближенного определения закона движения точки.
Решение уравнения

$$m\ddot{x} + F(x) = 0, \tag{13}$$

описывающего движение механической системы с одной степенью свободы и позиционной (зависящей только от координаты) восстанавливающей силой в случае симметрии $(-F(x) = -F(x))$ ищем в виде:

$$x = A\sin\left(pt + \alpha\right) \tag{14}$$

Потребуем, чтобы функция (14) удовлетворяла уравнению (13) в момент прохождения через положение равновесия и в моменты, когда x достигает максимума, то есть равно A.

Поскольку $F(0) = 0$ и

$$x|_{x=0} = 0,$$

то функция (14) удовлетворяет уравнению (13) в моменты, прохождения через положение равновесия. Далее $x = x_{max}$ при $\sin(pt + \alpha) = 1$. Поэтому

$$\ddot{x}_{max} = -p^2 A$$

Тогда из (13) следует:

$$p^2 = \frac{F(A)}{mA} \qquad (15)$$

Последняя формула опеределяет зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды. График этой зависимости называется скелетной кривой.

Подставляя (15) в (14), найдём приближённый закон движения рассматриваемой системы:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{F(A)}{mA}}t + \alpha\right) \tag{16}$$

Метод линеаризации

Способ основан на непосредственной замене нелинейной характеристики $F(x)$ некоторым эквивалентным линейным выражением. Так, при симметричной характеристике вместо $F(x)$ принимается cx, где c — коэффициент, значение которого подбирается из условия минимизации интегрального квадратичного уклонения

$$\delta(c) = \int_{-A}^{A} [F(x) - cx]^2 \, dx \tag{17}$$

Найдём c, доставляющее минимальное значение уклонению.

$$\frac{d\delta}{dc} = 2\int_{-A}^{A} [F(x) - cx]\,(-x)dx = 0 \qquad (18)$$

Преобразуем (18):

$$-\int_{-A}^{A} xF(x)dx + c\int_{-A}^{A} x^2 = 0$$

Отсюда

$$c = \frac{3}{2A^3}\int_{-A}^{A} xF(x)dx \qquad (19)$$

Чтобы поднять роль больших амплитуд, используют функционал вида:

$$\delta(c) = \int_{-A}^{A} x^2 \left[F(x) - cx\right]^2 dx \qquad (20)$$

Тогда формула (19) принимает вид:

$$c = \frac{5}{2A^5} \int_{-A}^{A} x^3 F(x) dx \qquad (21)$$

Частоту колебаний находим по формуле

$$p^2 = \frac{c}{m}$$

Скелетной кривой будем называть зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды.
Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{22}$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила.
Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.
Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \tag{23}$$

Подставим (23) в (22):

$$-Ap^2 \sin pt + f\left(A \sin pt\right) = 0, \tag{24}$$

Функция $f(Asinpt)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(A\sin pt) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kpt, \tag{25}$$

где

$$B_k = \frac{1}{p\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(A\sin pt) \sin kptdt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\psi) \sin k\psi d\psi$$

Оставим в разложении (26) одно только первое слагаемое и подставим его в (24):

$$-Ap^2 \sin pt + B_1 \sin pt = 0,$$

или

$$-Ap^2 + B_1 = 0, \tag{26}$$

Из (26) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2 = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int\limits_0^{2\pi} f\left(A \sin \psi\right) \sin \psi d\psi, \tag{27}$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \tag{28}$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \ldots + A_N \cos Npt + B_N \sin Npt$$

или

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt \right), \tag{29}$$

Подставляем (29) в (28):

$$-\sum_{n=1}^{N} n^2 p^2 \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt \right) + F(t) = 0, \tag{30}$$

В формуле (30) введено обозначение

$$F(t) = f\left[A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos npt + B_n \sin npt),\right.$$
$$\left.\sum_{n=1}^{N} n(-A_n \sin npt + B_n \cos npt)\right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos npt + b_n \sin npt), \tag{31}$$

где

$$a_0 = \frac{p}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \cos nptdt,$$

$$b_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \sin nptdt,$$

Подставим разложение (31) в уравнение (30) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$
\begin{cases}
1: & \frac{p}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)dt = 0, \\
\cos pt: & A_1 = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\cos ptdt, \\
\sin pt: & B_1 = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\sin ptdt, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\cos npt: & n^2p^2A_n = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\cos nptdt, \\
\sin npt: & n^2p_n^2 = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\sin nptdt,
\end{cases}
\qquad (32)
$$

$$n = \overline{1, N}$$

Уравнения (32) образуют систему для определения A_i, B_i. Получив выражения для A_1, B_1, находим амплитуду колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и строим скелетную кривую.

Содержание задания:

- найти особые точки систем;
- произвести их классификацию;
- построить фазовые портреты в окрестностях особых точек;
- построить уравнение колебаний конечного размаха (если есть необходимость);
- решить уравнение простейшим способом;
- решить уравнение методом линеаризации с обоими способами построения функционала для отыскания c (если это возможно);
- решить уравнение методом гармонического баланса (в решении оставлять не менее двух слагаемых);
- построить на одном графике скелетные кривые, построенные простейшим методом, методом линеаризации и методом гармонического баланса;

1. (Бережной) $(l-a\theta)\ddot{\theta}+a\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$
2. (Гусаков) $\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$
3. (Калабуха) $\ddot{x}+x=-\varepsilon\dot{x}x^2$
4. (Марков) $\ddot{x}+x=\varepsilon\dot{x}^2x$
5. (Молчан) $\ddot{x}+x=\varepsilon\dot{x}^3$
6. (Терентьев) $\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon\dot{x}\left(\omega^2x^2-\dot{x}^2\right)$
7. (Узлов) $\left(mr^2+J\right)\ddot{\varphi}+mgr\sin\alpha\sin\varphi=0$
8. (Филатов) $A\ddot{\theta}+\omega^2(C-B)\sin\theta\cos\theta=-mgl\sin\theta$
9. (Савицкий)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta}-\frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta-Mga\sin\theta=0$$

10. (Ефремов) $\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon x\left(\omega^2x^2+\dot{x}^2\right)$

Литература I

- В. В. Степанов.
  Курс дифференциальных уравенений.
  М.:Наука, 1950.
- И. М. Бабаков.
  Теория колебаний.
  М.:Наука, 1968.
- Я. Г. Пановко.
  Введение в теорию механических колебаний.
  М.:Наука, 1971.
- В. Л. Бидерман.
  Прикладная теория механических колебаний.
  Высшая школа, 1972.