Лабораторная работа №3

П. С. Углич

кафедра теории упругости

17 февраля 2025 г.

Оглавление

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{1}$$

Будем искать решение (1) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{2}$$

В представлении (2) две неизвестные функции, в уравнении (1) — только одна. Для определенности замены свяжем функции A и B дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{3}$$

Продифференцируем (2):

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t + \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

С учетом (3) получаем:

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

Подставляя (2) в (1), имеем:

$$\begin{aligned}\omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] = \\ = \varepsilon f\,\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \\ \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\}\end{aligned} \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) образуют систему уравнений вида

$$\begin{cases}\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0, \\ -\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\end{cases} \tag{5}$$

где

$$F(t) = f\,\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\}$$

Решаем систему (5):

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega} F(t) \sin \omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\varepsilon}{\omega} F(t) \cos \omega t \end{cases} \qquad (6)$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t) \sin \theta(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

Найдем выражения для x и $\dot{x}$:

$$x = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t = R(t) \left[\cos \omega t \cos \theta(t) + \sin \omega t \sin \theta(t) \right]$$

или

$$x = R(t) \cos \left[\omega t - \theta(t) \right] \qquad (8)$$

Аналогично

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right] = -\omega R(t)\left[\sin\omega t\cos\theta(t) - \cos\omega t\sin\theta(t)\right]$$

или

$$\dot{x} = -\omega R(t)\sin\left[\omega t - \theta(t)\right]$$

Подставим (8) в (6):

$$\begin{cases} \dot{R}\cos\theta - R\sin\theta\dot{\theta} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{R}\sin\theta + R\cos\theta\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{9}$$

Решим систему (9) относительно $\dot{R}$ и $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ R\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{10}$$

или

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega R}F\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{11}$$

Все выкладки до настоящего момента — точные. Теперь приближенно заменим правые части (11) из средними значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \sin\left(\omega t - \theta\right) dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \cos\left(\omega t - \theta\right) \dfrac{dt}{R} \end{cases}$$

При вычислении интегралов в правых частях последних выражениях будем считать $R(t)$ и $\theta(t)$ постоянными. Произведём в интегралах замену переменных

$$\psi = \omega t - \theta$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi = \varepsilon\Phi(R), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi \dfrac{d\psi}{R} = \varepsilon\Psi(R) \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения (12) называется уравнениями установления. В первое уравнение входит только $R(t)$ и оно может быть проинтегрировано независимо от второго.
Особые точки определяются уравнениями

$$\Phi(R) = 0,\ \Psi(R) = 0 \tag{13}$$

В случае $\Psi(R) = 0$ из второго уравнения (12) находим

$$\theta = \theta_0 = const,$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых и их положение на радиальных лучах определяется корнями уравнения

$$\Phi(R) = 0.$$

Уравнение может иметь несколько корней

$$R = R_j.$$

Об устойчивости равновесного состояния $R = R_j$ можно судить по характеру изменения вариации амплитуды колебаний R_j. Согласно (12) имеем:

$$\dot{R} = \varepsilon \Phi(R) = 0, \tag{14}$$

Рассмотрим возмущённое движение $R_j + \delta R_j$. Для амплитуды возмущённого движения получаем:

$$\frac{d(R_j + \delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi(R_j + \delta R_j), \tag{15}$$

Разлагаем правую часть (14) и ограничиваясь линейным приближением, получаем:

$$\frac{d(\delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi'(R_j)\delta R_j, \tag{16}$$

Если

$$\Phi'(R_j) < 0,$$

то возмущения амплитуды δR будут стремиться к нулю и режим колебаний, соответствующий $R = R_j$, является устойчивым

- исследовать уравнения методами Льенара и Бендиксона, сделать выводы о существовании периодических решений;
- Найти все периодические решения уравнения методом Ван-дер-Поля и исследовать их устойчивость;
- построить скелетные кривые;

(при этом рассматираются уравнения колебаний конечного размаха, построенные при выполнении лабораторной работы №1)

1. (Доктором) $\left(mr^2 + J\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0$
2. (Медведев) $(l + a\theta)\,\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
3. (Осяк) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$
4. (Подколзин) $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta$
5. (Прайс)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta - Mga\sin\theta = 0$$