1 Периодичность решений системы Ляпунова

1.1 Системы Ляпунова

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + X^*(\xi,\eta), \\ \dfrac{d\eta}{dt} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + Y^*(\xi,\eta), \end{cases} \tag{1}$$

где $X^*(\xi,\eta)$, $Y^*(\xi,\eta)$ — аналитические функции своих переменных в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ и такие, что их разложения по степеням ξ и η начинаются со слагаемых, порядок которых не ниже второго:

$$\begin{cases} X^*(\xi,\eta) = b_{20}\xi^2 + b_{02}\eta^2 + b_{11}\xi\eta + b_{30}\xi^3 + ... \\ Y^*(\xi,\eta) = d_{20}\xi^2 + d_{02}\eta^2 + d_{11}\xi\eta + d_{30}\xi^3 + ... \end{cases} \tag{2}$$

Система (1) называется системой Ляпунова, если выполнены следующие два условия:

1. уравнение
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\gamma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$
имеет чисто мнимые корни $\gamma = \pm i\lambda$, $-\infty < \lambda < \infty$;

2. система (1) допускает аналитический первый интеграл:
$$H(\xi,\eta) = const, \tag{4}$$
разложение которого по степеням переменных ξ и η начинается со слагаемых второго порядка малости, то есть, функция H в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ является аналитической функцией своих переменных и представима в

следующем виде:

$$H = a_{20}^* \xi^2 + a_{02}^* \eta^2 + a_{11}^* \xi \eta + ...$$

Консервативные системы являются частным случаем системы Ляпунова. Например, уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = 0,$$

где $f(z) = \omega^2 z + a_2 z + ...$ заменой $\xi = -\omega\eta$, $z = \xi$ приводится к виду (1):

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\omega\eta, \\ \dot{\eta} = \omega\xi + \dfrac{a_2}{\omega}\xi^2 + ... \end{cases}$$

1.2 Приведение к каноническому виду

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) описывает уравнение колебаний с постоянной амплитудой, поскольку её характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Исключая из первого уравнения (5) переменную η, получим:

$$\eta = \frac{1}{a_{12}}\dot{\xi} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\xi;$$

$$\dot{\eta} = \frac{1}{a_{12}}\ddot{\xi} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{\xi};$$

Подставляя η и $\dot{\eta}$ во второе уравнение (5), выводим:

$$\frac{1}{a_{12}}\ddot{\xi} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{\xi} = a_{21}\xi + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\dot{\xi} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\xi\right) \tag{6}$$

Преобразуем:

$$\ddot{\xi} - (a_{11} + a_{22})\,\dot{\xi} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,\xi = 0 \tag{7}$$

Для того, чтобы удовлетворить условию 1, коэффициент при ξ должен быть равен нулю, то есть

$$a_{11} + a_{22} = 0,$$

кроме того, должно иметь место неравенство:

$$\lambda^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

Сделаем замену:

$$\xi = x,\ \dot{\xi} = \dot{x} = -\lambda y,\ \lambda = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{8}$$

$$\eta = -\frac{\lambda}{a_{12}}y - \frac{a_{11}}{a_{12}}x;$$

Подставляем в (7):

$$-\lambda\dot{y} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x = 0$$

или

$$\dot{y} = \lambda x$$

Объединяем с (8) и получаем:

$$\dot{x} = -\lambda y,\ \dot{y} = \lambda x$$

Поэтому, если в исходной системе (1) сделать замену (8), то эта система будет преобразована к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y + X(x, y) \\ \dot{y} = \lambda x + Y(x, y), \end{cases} \tag{9}$$

где X и Y — аналитические функции своих переменных, разложения которых начинаются со слагаемых второго порядка малости.

1.3 Преобразование интеграла H

Представление первого интеграла имеет вид:

$$H = Ax^2 + By^2 + Cxy + ... = const$$

Так как H — первый интеграл, то в силу уравнений (9) имеем:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = (2Ax + Cy + ...)\left[-\lambda y + X(x,y)\right] + (2By + Cx + ...)\left[\lambda x + Y(x,y)\right] = 0$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, y^2 и xy, получим:

$$\lambda C = 0,$$

$$-2A\lambda + 2B\lambda = 0$$

Отсюда $A = B$ и $C = 0$. Разделив в аналитическом представлении первого интеграла обе части равенства на A, представим первый интеграл в виде:

$$x^2 + y^2 + W(x,y) = \mu^2, \tag{10}$$

где W — аналитическая функция своих переменных, разложение которой начинается со слагаемых не ниже третьего порядка малости, μ^2 — некоторая постоянная, положительная для достаточно малых $|x|$ и $|y|$.

1.4 Доказательство периодичности решений системы Ляпунова

Докажем теперь, что решения системы (9) для достаточно малых значений μ — периодические функции времени t. Для этого достаточно доказать, что фазовые траектории в плоскости (x, y) — замкнутые и изображающая точка движется по фазовым траекториям в одном направлении.

Введём полярные координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

и заметим, что любая замкнутая траектория $\rho(\theta)$ должна быть периодической функцией аргумента. Составим выражения для первого интеграла системы:

$$\rho^2\left[1 + \frac{1}{\rho^2}W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right] = \mu^2 \tag{11}$$

Здесь W — аналитическая функция, разложение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} &W(x,y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + ... + a_{nm}x^ny^m + ... = \\ &= \rho^3\left(a_{30}\cos^3\theta + a_{21}\cos^2\theta\sin\theta + a_{12}\cos\theta\sin^2\theta + a_{03}\sin^3\theta\right) + ... \\ &+\rho^{n+m}\left(a_{n+m,0}\cos^{n+m}\theta + ... + a_{0,n+m}\sin^{n+m}\theta\right) + ... \end{aligned}$$

Следовательно, в форме (11) функция W/ρ^2 может быть представлена в виде ряда:

$$\frac{1}{\rho^2}W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho a_1(\theta) + \rho^2 a_2(\theta) + ..., \tag{12}$$

причём все коффициенты $a_i(\theta)$ — полиномы от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, то есть периодические функции. Таким образом, выражение (11) можно переписать так:

$$\rho\left[1 + \rho a_1(\theta) + ...\right]^{1/2} = \mu \tag{13}$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение для определения $\rho(\theta)$. Используя аналитичность функция, которые в него входят, будем функцию ρ рассматривать в виде ряда:

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + ... \tag{14}$$

Чтобы определить коэффициенты b_j, подставляем (14) в (13):

$$\left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)\left[1 + \left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)a_1 + ...\right]^{1/2} = \mu \qquad (15)$$

Раскладывая радикал в ряд, перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в последнем равенстве, находим представления для b_j:

$$\left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)a_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)^2 a_2 + ...\right] - \frac{1}{8}\left[\left(\mu + b_2\mu^2 + b_3\mu^3 + ...\right)a_1 + ...\right]^2 + ...\right\} = \mu$$

После перемножения рядов имеем:

$$\mu + \mu^2\left(b_2 + \frac{1}{2}a_1\right) + \mu^3\left(b_3 + \frac{1}{2}a_1b_2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_1^2\right) + ... = \mu$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} \mu :&\quad 1 = 1, \\ \mu^2 :&\quad b_2 + \frac{1}{2}a_1 = 0, \\ \mu^3 :&\quad b_3 + a_1b_2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_1^2 = 0 \\ ..... &\quad .... \end{aligned}$$

Отсюда определяются b_j. Таким образом, коэффициенты b_j — степенные функции коэффициентов a_j, а последние в свою очередь являются полиномами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Вследствии такой структуры коэффициентов ряд (14) определяет периодическую функцию θ периода 2π. Итак, показано, что $\rho(\theta)$ — периодическая функция по θ, значит, фазовые траектории на плоскости (x, y) — замкнутые. Покажем, что $\dot{\theta}$ сохраняет знак и изображающая точка движется по фазовой траектории в одном направлении.

Для этого в уравнения (9) перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta = -\lambda\rho\sin\theta + X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right), \\ \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta = \lambda\rho\cos\theta + Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right) \end{cases} \tag{16}$$

Умножим первое уравнение на $-\sin\theta$, второе — на $\cos\theta$ и сложим их друг с другом:

$$\rho\dot{\theta} = \lambda\rho - X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\sin\theta - Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\cos\theta$$

или

$$\dot{\theta} = \lambda - \frac{1}{\rho}\left[X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\sin\theta - Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\cos\theta\right] \tag{17}$$

Поскольку разложения X и Y начинаются со слагаемых второго порядка малости, то при $\mu \to 0$, $\rho \to 0$ и $\dot{\theta} = \lambda + O(\mu)$, то есть при достаточно малом значении μ выражение $\dot{\theta}$ сохраняет знак.

Также при малых значениях параметра μ решения $x(t)$ и $y(t)$ — аналитические по параметру μ. В силу аналитичности правых частей (9) её решения являются аналитическим функциями начальных значений

$$x(0) = a,\ y(0) = b.$$

Постоянная μ также определяется этими значениями.

$$\mu^2 = a^2 + b^2 + W(a, b) \tag{18}$$

Так как правые части системы (9) не зависят от времени t, то начало отсчёта можно совместить с моментом времени, тогда $y = 0$ и

$$x(0) = C,\ y(0) = 0 \tag{19}$$

Из (18) следует, что μ — аналитическая функция C:

$$\mu = C + \mu_2 C^2 + ... \tag{20}$$

В силу аналитичности $W(C, 0)$ по C обратная функция $C = C(\mu)$ — аналитическая, а поскольку решения $x(t)$ и $y(t)$ — аналитические функции начального значения $x(0) = C$, то в силу аналитичности $C(\mu)$, решения $x(t)$ и $y(t)$ являются аналитическими функциями параметра μ. Из этого следует, что решения системы (9) можно представить как в виде степенных рядов по парамету μ, так и в виде степенных рядов по начальной амплитуде C.

1.5 Вычисление периода

Из уравнения (18) определяем t:

$$t - t_0 = \int\limits_0^\theta \frac{\rho d\theta}{\rho\lambda - X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\sin\theta + Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\cos\theta} \tag{21}$$

Для того, чтобы удовлетворить условиям (19), необходим константу в (21) принять равной нулю, так как $y = \rho\sin\theta$ обращается в нуль при $t = t_0$, а начало отсчёта выбрано из условия $y(0) = 0$. Используя теперь тот факт, что ρ — аналитическая функция μ (согласно (14)). Это позволяет разложить подынтегральную функцию в выражении (21) в ряд по степеням μ:

$$t = \frac{1}{\lambda}\left\{\theta + \int\limits_0^\theta \left[\mu V_1(\theta) + \mu^2 V_2(\theta) + ...\right] d\theta\right\},$$

где $V_j(\theta)$ — периодические функции θ периода 2π. Следовательно, подынтегральная функция в последнем равенстве также есть периодическая функция периода

2π. Следовательно, интеграл

$$I = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left[\mu V_1(\theta) + \mu^2 V_2(\theta) + ...\right] d\theta$$

не зависит от θ_0 и его можно записать в виде

$$I = 2\pi \left(\mu h_1 + \mu^2 h_2 + ...\right),$$

где h_j — определённые числа. Таким образом, при изменении θ на 2π время t получает приращение T

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ...\right), \tag{22}$$

не зависящее от θ_0. Пусть теперь $\Phi(0)$ — некоторая периодическая функция θ периода 2π. Тогда

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta).$$

Рассматривая её как функцию от θ, будем иметь:

$$\begin{gathered} \psi(t) = \Phi(\theta(t)), \\ \psi(t+T) = \Phi(\theta(t+T)) = \Phi(\theta(t) + 2\pi) = \Phi(\theta(t)) = \psi(t). \end{gathered} \tag{23}$$

Равенство $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$ справедливо при любых θ, следовательно и равенство (23) справедливо при любых t. Значит, величина T, определяемая формулой (22) как функция, и есть период решения. Используя (21), его можно записать в следующем виде

$$T = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\rho d\theta}{\rho\lambda - X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\sin\theta + Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\cos\theta} \tag{24}$$

При $\mu \to 0$ период T нелинейных колебаний стремится к периоду линейных колебаний $2\pi/\lambda$, то есть к периоду колебаний в системе (9) при $X = Y = 0$.

1.6 Одно свойство периода

Покажем теперь, что T — чётная функция μ. Вернёмся к интегралу (12).

$$\rho^2 \left[1 + \frac{1}{\rho^2} W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right] = \mu^2$$

Рассматривая его как уравнение относительно ρ, мы получаем в окрестности точки $\rho = 0$ два решения. Одно из них определяется рядом (14):

$$\rho = \mu + b_2(\theta)\mu^2 + b_3(\theta)\mu^3 + ...$$

К другому решению приходим, если в (14) заменить μ на $-\mu$:

$$\rho = -\mu + b_2(\theta)\mu^2 - b_3(\theta)\mu^3 + ... \tag{25}$$

Теперь заметим, что левая часть уравнения (12) не изменится, если заменить ρ на $-\rho$ и θ на $\theta + \pi$. Следовательно, на основании (14) имеем:

$$-\rho = \mu + b_2(\theta + \pi)\mu^2 + b_3(\theta + \pi)\mu^3 + ... \tag{26}$$

Значение ρ, определяемое рядом (26) будет корнем уравнения (12), не совпадающим с (14). Потому что для малых ρ из (14) следует

$$\rho = \mu + O(\mu^2),$$

а из (26) —

$$\rho = -\mu + O(\mu^2).$$

Следовательно, ряды (25) и (26) определяют одно и то же решение уравнения

(12). Сравнивая (25) и (26), получаем:

$$b_{2m}(\theta) = -b_{2m}(\theta+\pi)$$
$$b_{2m+1}(\theta) = b_{2m+1}(\theta+\pi),\ m = 1, 2, 3...$$

Отсюда следует, что если в выражении (14) заменить μ на $-\mu$, а θ на $\theta+\pi$, то величина ρ примет своё значение с обратным знаком:

$$\rho(-\mu, \theta+\pi) = -\rho(\mu, \theta) \tag{27}$$

Выпишем теперь выражение для периода T. На основании (24) имеем:

$$T(\mu, 0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{\rho\lambda - X\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\sin\theta + Y\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\cos\theta} \tag{28}$$

Согласно (24) выпишем значение $T(-\mu, \pi)$:

$$T(-\mu, \pi) = \int\limits_\pi^{3\pi} \frac{\rho(-\mu, \theta)d\theta}{\rho(-\mu, \theta)\lambda - X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta}, \tag{29}$$

$$X_1 = X\left[\rho(-\mu, \theta)\cos\theta, \rho(-\mu, \theta)\sin\theta\right],$$
$$Y_1 = Y\left[\rho(-\mu, \theta)\cos\theta, \rho(-\mu, \theta)\sin\theta\right]$$

Сделаем замену переменной интегрирования в (29), положив $\theta = \pi + \theta_1$:

$$T(-\mu, \pi) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(-\mu, \pi+\theta_1)d\theta_1}{\rho(-\mu, \pi+\theta_1)\lambda - X_2\sin\left(\pi+\theta_1\right) + Y_2\cos\left(\pi+\theta_1\right)}, \tag{30}$$

$$X_2 = X\left[\rho(-\mu, \pi+\theta_1)\cos\left(\pi+\theta_1\right), \rho(-\mu, \pi+\theta_1)\sin\left(\pi+\theta_1\right)\right],$$
$$Y_2 = Y\left[\rho(-\mu, \pi+\theta_1)\cos\left(\pi+\theta_1\right), \rho(-\mu, \pi+\theta_1)\sin\left(\pi+\theta_1\right)\right]$$

Согласно равенству (27) в подынтегральном выражении (29) заменим $\rho(-\mu, \theta_1+$

π) на $\rho(\mu, \theta_1)$, а $\cos(\pi + \theta_1)$ и $\sin(\pi + \theta_1)$ заменим по формуле приведения:

$$
\begin{aligned}
T(-\mu, \pi) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\rho(\mu, \theta_1) d\theta_1}{-\rho(\mu, \theta_1)\lambda + X_3 \sin(\theta_1) - Y_3 \cos(\theta_1)} = \\
= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(\mu, \theta_1) d\theta_1}{\rho(\mu, \theta_1)\lambda - X_3 \sin(\theta_1) + Y_3 \cos(\theta_1)}
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3 = X\left[\rho(\mu, \theta_1)\cos\theta_1, \rho(\mu, \theta_1)\sin\theta_1\right], \\
Y_3 = Y\left[\rho(\mu, \theta_1)\cos\theta_1, \rho(\mu, \theta_1)\sin\theta_1\right]
\end{aligned}
$$

Последнее выражение в (31) есть не что иное, как $T(\mu, 0)$. Итак, мы показали, что

$$
T(-\mu, \pi) = T(\mu, 0) \tag{32}
$$

Поскольку подынтегральное выражение в (24) является 2π-периодической функцией и интеграл берётся по полному периоду подынтегральной функции, имеем:

$$
T(-\mu, 0) = T(\mu, 0) \tag{33}
$$

1.7 Теорема Ляпунова

Если постоянная μ достаточно мала, то все решения системы (9) — периодические функции t, причём период — чётная функция величины μ и при $\mu \to 0$ он стремится к периоду, равному $2\pi/\lambda$. Решения системы (9) являются аналитическими функциями величины C — начального отклонения переменной x.

Из (32),(22) и (20) следует:

$$
T = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + C^2 h_2 + C^3 h_3 + ...\right)
$$

1.8 Алгоритм метода Ляпунова

Сущность приёмов Ляпунова заключается в преобразовании уравнений системы к так называемому «собственному времени», в котором единицей времени является период колебаний системы. Переход осуществляется при помощи формулы

$$\tau = \frac{2\pi t}{T(C)}$$

или

$$\tau = \lambda t \left(1 + C^2 h_2 + C^3 h_3 + ...\right)^{-1} \tag{34}$$

Период колебаний по переменной τ равен 2π.

Делаем в (9) замену (34). Получаем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \lambda \left(1 + C^2 h_2 + C^3 h_3 + ...\right)^{-1} \frac{dx}{d\tau},$$

Следовательно, система (9) приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \left[-\lambda y + X(x, y)\right] \dfrac{1 + C^2 h_2 + C^3 h_3 + ...}{\lambda}, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \left[\lambda x + Y(x, y)\right] \dfrac{1 + C^2 h_2 + C^3 h_3 + ...}{\lambda}, \end{cases} \tag{35}$$

Периодические решения системы (35) ищем в виде рядов:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} C^k x_k(\tau),\ y = \sum_{k=1}^{\infty} C^k y_k(\tau) \tag{36}$$

Подставим ряды (36) в систему (35) и сравним коффициенты при одинаковых степенях параметра C. Функции $x_1(\tau)$ и $y_1(\tau)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = -y_1, \\ \dfrac{dy_1}{d\tau} = x_1 \end{cases} \tag{37}$$

Начальные условия имеют вид:

$$x_1(0) = 1,\; y_1(0) = 0 \tag{38}$$

Функции x_2 и y_2 будут удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{d\tau} = -y_2 + \dfrac{1}{\lambda}X^{(2)}(x_1, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{d\tau} = x_2 + \dfrac{1}{\lambda}Y^{(2)}(x_1, y_1), \end{cases} \tag{39}$$

где $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ — квадратичные слагаемые разложения функция X и Y по степеням параметра C. Так как X и Y — аналитические функции переменных x и y, причём их разложения начинаются с квадратичных слагаемых, то $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ являются квадратичными формами переменных x и y.

Точно так же каждая пара функций x_k и y_k определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{d\tau} = -y_k + \dfrac{1}{\lambda}X^{(k)} - h_{k-1}y_1, \\ \dfrac{dy_k}{d\tau} = x_k + \dfrac{1}{\lambda}Y^{(k)} + h_{k-1}x_1, \end{cases} \tag{40}$$

причём функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины x_j и y_j только тех номеров j, которые меньше k. Кроме того, функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины h_j $(j < k-1)$. Заметим, что h_m входят в правые части (40) только при $k \geq 3$.

Функции x_k и y_k при $k > 1$ удовлетворяют начальным условиям:

$$x_k(0) = y_k(0) = 0, \tag{41}$$

Функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ — периодические функции переменного τ периода 2π, следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k x_k(\tau + 2\pi) = x(\tau + 2\pi) = x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C^k x_k(\tau) \tag{42}$$

Так как функции $x_k(\tau)$ и $y_k(\tau)$ не зависят от параметра C, а равенства (42) справедливы для любого малого C, то:

$$x_k(\tau+2\pi)=x_k(\tau),\ y_k(\tau+2\pi)=y_k(\tau) \tag{43}$$

Рассмотрим систему (40). Исключаем из неё функцию y_k, получаем:

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2}=-\frac{dy_k}{d\tau}+\frac{1}{\lambda}\frac{dX^{(k)}}{d\tau}-h_{k-1}\frac{dy_1}{d\tau}$$

или

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2}=-\left[x_k+\frac{1}{\lambda}Y^{(k)}-h_{k-1}x_1\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{dX^{(k)}}{d\tau}-h_{k-1}\frac{dy_1}{d\tau}$$

Окончательно:

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2}+x_k=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dX^{(k)}}{d\tau}-Y^{(k)}\right)-h_{k-1}\left(x_1+\frac{dy_1}{d\tau}\right)=F(\tau) \tag{44}$$

Построим решение (44) с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$x_k=A_k\cos\tau+B_k\sin\tau+A(\tau)\cos\tau+B(\tau)\sin\tau \tag{45}$$

Продифференцируем x_k:

$$\frac{dx_k}{d\tau}=-A_k\sin\tau+B_k\cos\tau-A(\tau)\sin\tau+B(\tau)\cos\tau+\frac{dA(\tau)}{d\tau}\cos\tau+\frac{dB(\tau)}{d\tau}\sin\tau \tag{46}$$

Свяжем $A(\tau)$ и $B(\tau)$ дополнительным соотношением:

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau}\cos\tau+\frac{dB(\tau)}{d\tau}\sin\tau=0 \tag{47}$$

Найдём вторую производную:

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2}=-A_k\cos\tau-B_k\sin\tau-A(\tau)\cos\tau-B(\tau)\sin\tau-\frac{dA(\tau)}{d\tau}\sin\tau+\frac{dB(\tau)}{d\tau}\cos\tau \tag{48}$$

Подставляем (47) в (44) и объединяем с (47):

$$\begin{cases} \dfrac{dA(\tau)}{d\tau}\cos\tau + \dfrac{dB(\tau)}{d\tau}\sin\tau = 0, \\ -\dfrac{dA(\tau)}{d\tau}\sin\tau + \dfrac{dB(\tau)}{d\tau}\cos\tau = F(\tau) \end{cases} \tag{49}$$

Решаем систему (49):

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -F(\tau)\sin\tau,\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\cos\tau \tag{50}$$

Теперь

$$x_k = A_k\cos\tau + B_k\sin\tau - \cos\tau\int\limits_0^\tau F(\xi)\sin\xi d\xi + \sin\tau\int\limits_0^\tau F(\xi)\cos\xi d\xi \tag{51}$$

$$\frac{dx_k}{d\tau} = -A_k\sin\tau + B_k\cos\tau + \sin\tau\int\limits_0^\tau F(\xi)\sin\xi d\xi + \cos\tau\int\limits_0^\tau F(\xi)\cos\xi d\xi \tag{52}$$

или

$$x_k = A_k\cos\tau + B_k\sin\tau + \int\limits_0^\tau F(\xi)\sin(\tau-\xi)\,d\xi \tag{53}$$

$$\frac{dx_k}{d\tau} = -A_k\sin\tau + B_k\cos\tau + \int\limits_0^\tau F(\xi)\cos(\tau-\xi)\,\xi d\xi \tag{54}$$

Подставляем последние выражения в условия периодичности (43):

$$A_k + \int\limits_0^{2\pi} F(\xi)\sin(2\pi-\xi)\,d\xi = A_k$$

$$B_k + \int\limits_0^{2\pi} F(\xi)\cos(2\pi-\xi)\,\xi d\xi = B_k$$

Подставим выражение для $F(\tau)$ и заменим переменную интегрирования:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dX^{(k)}}{d\tau} - Y^{(k)}\right) - h_{k-1}\left(x_1 + \frac{dy_1}{d\tau}\right)\right] \sin\tau d\tau = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{dX^{(k)}}{d\tau} - Y^{(k)}\right) - h_{k-1}\left(x_1 + \frac{dy_1}{d\tau}\right)\right] \cos\tau d\tau = 0
\end{aligned} \tag{55}$$

Преобразуем равенства (55) по частям:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dX^{(k)}}{d\tau} \sin\tau d\tau = X^{(k)} \sin\tau\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} X^{(k)} \cos\tau d\tau = -\int_0^{2\pi} X^{(k)} \cos\tau d\tau$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dX^{(k)}}{d\tau} \cos\tau d\tau = X^{(k)} \cos\tau\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} X^{(k)} \sin\tau d\tau = \int_0^{2\pi} X^{(k)} \sin\tau d\tau$$

Теперь

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left[-\left(\frac{1}{\lambda}X^{(k)} - h_{k-1}y_1\right)\cos\tau - \left(\frac{1}{\lambda}Y^{(k)} + h_{k-1}x_1\right)\sin\tau\right] d\tau = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{\lambda}X^{(k)} - h_{k-1}y_1\right)\sin\tau - \left(\frac{1}{\lambda}Y^{(k)} + h_{k-1}x_1\right)\cos\tau\right] d\tau = 0
\end{aligned} \tag{56}$$

Равенства (56) можно трактовать как условие ортогональности правой части (44) к решению однородного уравнения. В силу этого решение уравнения (44) не содержит векового слагаемого.

Одно из уравнений (56) выполняется автоматически, из второго находим h_{k-1}.

2 Метод Пуанкаре

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3 \tag{57}$$

Начальные условия имеют вид:

$$x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0. \tag{58}$$

Будем искать решение в виде:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... \tag{59}$$

Подставим (59) в (57) и выпишем множители при различных степеных ε:

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon^0 : & \ddot{x}_0 + x_0 = 0, & x_0(0) = A,\ \dot{x}_0(0) = 0, \\
\varepsilon^1 : & \ddot{x}_1 + x_1 = x_0^3, & x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0, \\
\varepsilon^2 : & \ddot{x}_1 + x_1 = 3x_0^2 x_1, & x_2(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 0, \\
.... & .... & ....
\end{array} \tag{60}$$

Решим эти начальные задачи:

$$x_0 = A\cos t$$

Найдём x_1:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^3 = A^3\cos^3 t = \frac{A^3}{4}\left(3\cos t + \cos 3t\right) \tag{61}$$

Общее решение (61) имеет вид:

$$x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + t(A\cos t + B\sin t) + D\cos 3t \tag{62}$$

Подставим (62) в (61):

$$2\left(-A\sin t + B\cos t\right) - 8D\cos 3t = \frac{A^3}{4}\left(3\cos t + \cos 3t\right) \tag{63}$$

Следовательно:

$$A = 0,\ B = \frac{3A^3}{8},\ D = -\frac{A^3}{32}.$$

Общее решение теперь принимает вид:

$$x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{3A^3}{8}t\sin t - \frac{A^3}{32}\cos 3t \tag{64}$$

Удовлетворим (65) начальным условиям:

$$x_1(0) = C_1 - \frac{A^3}{32},$$

следовательно

$$C_1 = \frac{A^3}{32}.$$

$$\dot{x}_1(0) = C_2 = 0$$

Окончательно получаем:

$$x_1 = \frac{3A^3}{8}t\sin t + \frac{A^3}{32}\left(\cos t - \cos 3t\right) \tag{65}$$

Итак, функция x_1 содержит вековое слагаемое $t\sin t$ и, следовательно, не является периодической. Таким образом, построение решения в виде ряда (59) приводит к тому, что периодическая функция представляется в виде ряда по непериодическим функциям. Такое представление неудобно во многих отношениях.

3 Метод Ляпунова для квазилинейных систем

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{66}$$

Перейдём к собственному времени:

$$\tau = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}$$

В последней формуле τ — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)$$

— период колебаний, h_m — константы, подлежащие определению.

Найдем $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}\frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (66) приобретает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^2 x = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}\frac{dx}{d\tau}\right)\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^2, \end{aligned} \tag{67}$$

Поскольку уравнение (66) не содержит время в явном виде, за начало отсчёта можно взять любой момент времени. Положим

$$\begin{cases} x(0) = A(\varepsilon), \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{68}$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + ... \tag{69}$$

Подставляя (69) в (67), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0,\\
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 x_0 + \frac{1}{\omega^2} f\left(x_0, \omega\frac{dx_0}{d\tau}\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{70}$$

Решение первого из уравнений (70) имеет вид:

$$x_0 = C\cos\tau, \tag{71}$$

Значение C — неизвестно и подлежит определению. Рассмотрим второе уравнение (70):

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right), \tag{72}$$

Правая часть (72) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (72) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям $\sin\tau$, $\cos\tau$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\sin\tau d\tau = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\cos\tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int\limits_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\sin\tau d\tau = 0, \tag{73}$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2} \int\limits_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\cos\tau d\tau \tag{74}$$

Уравнение (73) может являться тождеством, в этом случае используем (73) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (73) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому их них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено h_1, решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C\cos\left(\frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon}\right)$$

Далее можно построить решение уравнения (72), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (70). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

4 Метод Крылова

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{75}$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ... \tag{76}$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ... \tag{77}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon\ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2\ddot{x}_2(t) + ... + \left(p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - ...\right) \times \\ \times \left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ...\right) = \\ = \varepsilon f\left[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ..., \dot{x}_0(t) + \varepsilon\dot{x}_1(t) + ...\right], \end{aligned} \tag{78}$$

Соберём слагаемые при различных степенях ε:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0), \\ &\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{79}$$

Начальные условия следующие:

$$\begin{cases} x_0(0) = A, \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases} \tag{80}$$

и

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0,\ i > 0 \tag{81}$$

Для определения p_i используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$