

# Лабораторная работа №4

П. С. Углич

кафедра теории упругости

25 февраля 2025 г.

# Оглавление

- 1 Описание методов
  - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
  - Метод Крылова
- 2 Содержимое задания
  - Уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

Перейдём к собственному времени:

$$\tau = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots}$$

В последней формуле  $\tau$  — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots \right)$$

— период колебаний,  $h_m$  — константы, подлежащие определению.

Найдем  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots} \frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (1) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)^2 x &= \\ = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots} \frac{dx}{d\tau}\right) (1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку уравнение (1) не содержит время в явном виде, за начало отсчёта можно взять любой момент времени. Положим

$$\begin{cases} x(0) = C, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 &= 0, \\ \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 &= -2h_1 x_0 + \frac{1}{\omega^2} f\left(x_0, \omega \frac{dx_0}{d\tau}\right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (5)$$

Решение первого из уравнений (5) имеет вид:

$$x_0 = C \cos \tau, \quad (6)$$

Значение  $C$  — неизвестно и подлежит определению.

Рассмотрим второе уравнение (5):

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau), \quad (7)$$

Правая часть (7) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (7) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям  $\sin \tau$ ,  $\cos \tau$ :

$$\int_0^{2\pi} \left[ -2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega^2} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \right] \sin \tau d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[ -2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega^2} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \right] \cos \tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int_0^{2\pi} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \sin \tau d\tau = 0, \quad (8)$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \cos \tau d\tau \quad (9)$$

Уравнение (8) может являться тождеством, в этом случае используем ((8) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (8) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому из них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено  $h_1$ , решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C \cos \left( \frac{\omega t}{1 + h_1 \varepsilon} \right)$$

Далее можно построить решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (5). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции  $x(t)$  и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (10)$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (11)$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (12)$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + (p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - \dots) \times \\ \times (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots) = \quad (13) \\ = \varepsilon f[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \dots], \end{aligned}$$

Соберём слагаемые при различных степенях  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_0 + p^2 x_0 &= 0, \\
 \ddot{x}_1 + p^2 x_1 &= p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0), \\
 \ddot{x}_2 + p^2 x_2 &= p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_1, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Начальные условия следующие:

$$\begin{cases} x_0(0) = A, \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases}
 \tag{15}$$

и

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i > 0
 \tag{16}$$

Для определения  $p_i$  используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$

- Найти все периодические решения уравнения методами Ляпунова и Крылова (найти нулевое, первое и второе приближения);
- построить скелетные кривые;

- 1 (Докторов)  $(mr^2 + J) \ddot{\varphi} + mgr \sin \alpha \sin \varphi = 0$
- 2 (Медведев)  $(I + a\theta) \ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0$
- 3 (Осяк)  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta = 0$
- 4 (Подколзин)  $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B) \sin \theta \cos \theta = -mgl \sin \theta$
- 5 (Прайс)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2 \sin \theta \cos \theta - Mga \sin \theta = 0$$