Лабораторная работа №3

П. С. Углич

кафедра теории упругости

15 апреля 2026 г.

Оглавление

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{1}$$

Перейдём к собственному времени:

$$\tau = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}$$

В последней формуле τ — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

— период колебаний, h_m — константы, подлежащие определению.

Найдем $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}\frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (1) приобретает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2 x = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}\frac{dx}{d\tau}\right)\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку уравнение (1) не содержит время в явном виде, за начало отсчёта можно взять любой момент времени. Положим

$$\begin{cases} x(0) = C, \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \\ &\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1x_0 + \frac{1}{\omega^2} f\left(x_0, \omega\frac{dx_0}{d\tau}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Решение первого из уравнений (5) имеет вид:

$$x_0 = C\cos\tau, \tag{6}$$

Значение C — неизвестно и подлежит определению. Рассмотрим второе уравнение (5):

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right), \qquad (7)$$

Правая часть (7) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (7) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям $\sin\tau$, $\cos\tau$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right] \sin\tau d\tau = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right] \cos\tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\sin\tau d\tau = 0, \tag{8}$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\cos\tau d\tau \tag{9}$$

Уравнение (8) может являться тождеством, в этом случае используем ((8) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (8) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому их них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено h_1, решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C\cos\left(\frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon}\right)$$

Далее можно построить решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (5). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{10}$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{11}$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{12}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \ldots + \left(p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - \ldots\right) \times \\ \times \left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots\right) = \\ = \varepsilon f\left[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots, \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \ldots\right], \end{aligned} \tag{13}$$

Соберём слагаемые при различных степенях ε:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0,\\
&\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0),\\
&\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Начальные условия следующие:

$$
\begin{cases} x_0(0) = A,\\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases} \tag{15}
$$

и

$$
x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0,\ i > 0 \tag{16}
$$

Для определения p_i используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$

- Найти все периодические решения уравнения методами Ляпунова и Крылова (найти нулевое, первое и второе приближения);
- построить скелетные кривые;

(при этом рассматираются уравнения колебаний конечного размаха, построенные при выполнении лабораторной работы №1)

1. (Бережной) $(l - a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
2. (Гусаков) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$
3. (Калабуха) $\ddot{x} + x = -\varepsilon\dot{x}x^2$
4. (Марков) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^2 x$
5. (Молчан) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^3$
6. (Терентьев) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\dot{x}\left(\omega^2 x^2 - \dot{x}^2\right)$
7. (Узлов) $\left(mr^2 + J\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0$
8. (Филатов) $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta$
9. (Савицкий)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta - Mga\sin\theta = 0$$

10. (Ефремов) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x\left(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2\right)$