1 Параметрические колебания

Параметрическим называются колебания, вызванные периодическими изменениями параметров механической системы.

Рассмотрим колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса. Пусть l — длиня маятника, m — масса груза, $y = y(t)$ — заданный периодический закон точки подвеса. Дифференциальное уравнение малых относительных колебаний маятника имеет вид:

$$ml^2\ddot{\varphi} = (-mg - m\ddot{y})\, l\varphi, \tag{1}$$

здесь $-m\ddot{y}$ — переносная сила инерции.

Подстаив в (1) закон колебания точки подвеса $y = A\sin\omega t$, получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g - A\omega^2\sin\omega t}{l}\varphi = 0, \tag{2}$$

Рассмотрим ещё одну задачу о колебаниях маятника с периодически изменяющейся длиной. Обозначив длину маятника через l, массу через m и угол отклонения от вертикали через φ, получим уравнение колебания маятника из закона изменения момента количества движения

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right) = -mgl\sin\varphi, \tag{3}$$

или

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0, \tag{4}$$

Если колебания маятника невелики и $\sin\varphi \approx \varphi$, то мы приходим к уравнению с периодическими коэффициентами:

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{5}$$

В более общем виде это уравнение можно записать так:

$$\ddot{\varphi} + 2\psi_1(t)\dot{\varphi} + \psi_2(t)\varphi = 0, \tag{6}$$

Положив здесь

$$\varphi = y \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right)$$

получаем:

$$\dot{\varphi} = \dot{y} \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) - y\psi_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = \ddot{y} \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) - 2\dot{y}\psi_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) + \\ + y\psi_1^2(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) - y\dot{\psi}_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения в (7):

$$\begin{aligned} &\ddot{y} \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) \cancel{- 2\dot{y}\psi_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right)} + \\ &+ y\psi_1^2(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) + 2\psi_1(t) \left[\cancel{\dot{y} \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right)} - \right. \\ &- y\dot{\psi}_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) - \left. y\psi_1(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right)\right] + \\ &+ y\psi_2(t) \exp\left(-\int \psi_1(t)dt\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

Сокращаем ненулевой экспоненциальный множитель и получаем:

$$\ddot{y} - y\psi_1^2(t) - y\dot{\psi}_1(t) + y\psi_2(t) = 0, \tag{8}$$

или

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \tag{9}$$

где

$$p(t) = \psi_2(t) - \psi_1^2(t) - \dot{\psi}_1(t)$$

К необходимости исследовать свойства решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приводят также задачи об устойчивости периодических решений нелинейных систем, рассматриваемые в первом приближении. Так, например, для исследования устойчивости известного периодического решения

$$x = \tilde{x}(t)$$

уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = Q(t) + \mu f(x, \dot{x}) \tag{10}$$

мы даём координате $\tilde{x}(t)$ в некоторый момент времени t малое возмущение δ, в результате чего система, начиная с этого момента будет совершать возмущенное движение:

$$x = \tilde{x}(t) + \delta(t)$$

Это движение определяется тем же уравнением (10). Следовательно

$$\ddot{\tilde{x}} + \ddot{\delta} + k^2(x + \delta) = Q(t) + \mu f(\tilde{x} + \delta, \dot{\tilde{x}} + \dot{\delta}) \tag{11}$$

Ограничившись в разложении правой части по степеням δ и $\dot{\delta}$ слагаемыми первого порядка и учитывая, что $\tilde{x}$ удовлетворяет уравнению (10), получаем уравнение:

$$\ddot{\delta} + k^2\delta = \mu \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x},\, \dot{x}=\dot{\tilde{x}}} \delta + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=\tilde{x},\, \dot{x}=\dot{\tilde{x}}} \dot{\delta} \right] \tag{12}$$

Производные функции f являются известными периодическими функциями времени, то есть дифференциальное уравнение (12) есть уравнение типа (9).

1.1 Устойчивость периодических решений

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \tag{13}$$

где $p(t)$ — периодическая функция периода T:

$$p(t+T) = p(t), \tag{14}$$

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — два линейно независимых частных решения уравнения (13), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} &y_1(0) = 1,\ \dot{y}_1(0) = 0 \\ &y_2(0) = 0,\ \dot{y}_2(0) = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Построить такие решения можно всегда, хотя бы численно. Такая система частных решений называется нормальной. По свойству линейных уравнений всякое другое решение уравнения (13) выражается линейно через нормальную систему:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \tag{16}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Если T — период функции $p(t)$, то функции $y_1(t+T)$ и $y_2(t+T)$, удовлетворяя уравнениям

$$\ddot{y}_{1,2}(t+T) + p(t+T)y_{1,2}(t+T) = 0, \tag{17}$$

также удовлетворяют уравнениям:

$$\ddot{y}_{1,2}(t+T) + p(t)y_{1,2}(t+T) = 0, \tag{18}$$

То есть, $y_1(t+T)$ и $y_2(t+T)$ — решения уравнения (13). В силу линейной зависимости всякого другого решения уравнения (13) от нормальной системы имеем:

$$\begin{aligned} y_1(t+T) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t), \\ y_2(t+T) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где коэффициенты a_{jk} — постоянные числа, причём в силу условий (15):

$$\begin{aligned} a_{11} &= y_1(T), \quad a_{12} = \dot{y}_1(T), \\ a_{21} &= y_2(T), \quad a_{22} = \dot{y}_2(T), \end{aligned} \tag{20}$$

Прибавляя к аргументу общего решения $y(t)$ в (16) период T, используя (17), получим:

$$\begin{aligned} &y(t+T) = C_1 y_1(t+T) + C_2 y_2(t+T) = \\ &= C_1 \left[a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t)\right] + C_2 \left[a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t)\right], \end{aligned} \tag{21}$$

Если постоянные C_1 и C_2 выбирать так, чтобы:

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{21} &= \lambda C_1, \\ C_1 a_{12} + C_2 a_{22} &= \lambda C_2, \end{aligned} \tag{22}$$

то равенство (21) перепишется так:

$$y(t+T) = \lambda y(t) \tag{23}$$

Таким образом, если существуют C_1 и C_2, не равные нулю одновременно, то можно найти такое решение уравнения (13), которое при прибавлении к аргументу периода T приобретает постоянный множитель λ (такие функции называются периодическими функциями второго рода). Чтобы существовали одновременно не равные нулю C_1 и C_2, множитель λ должен быть корнем уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1(T) - \lambda & \dot{y}_1(T) \\ y_2(T) & \dot{y}_2(T) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

Уравнение (34) называется характеристическим. Обозначим корни характеристического уравнения через λ_1 и λ_2 и положим:

$$\alpha_j = \frac{1}{T} \ln \lambda_j, \; j = 1, 2 \tag{26}$$

Числа α_j называются характеристическими показателями решения уравнение (13). С помощью характеристических показателей из равенства (32) вытекает:

$$y_j(t+T) = e^{\alpha_j T} y_j(t), \; j = 1, 2, \tag{27}$$

откуда следует, что частные решения уравнения (13) должны иметь вид:

$$y_j(t) = e^{\alpha_j t} \varphi_j(t), \; j = 1, 2, \tag{28}$$

где $\varphi_j(t)$ — периодические функции t с периодом T. В самом деле, функции (37) подчиняются свойству (36):

$$y_j(t+T) = e^{\alpha_j T} e^{\alpha_j t} \varphi_j(t+T) = e^{\alpha_j T} e^{\alpha_j t} \varphi_j(t) = e^{\alpha_j T} y_j(t)$$

Таким образом, общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t), \tag{29}$$

где α_1, α_2 — характеристические показатели, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — периодические функции периода T. как видно из (38), свойсива решений уравнения (13) в отношении устойчивости или неустойчивости определяется знаками характеристических показателей, которые зависят от корней характеристического уравнения (34), которое запишем в виде:

$$\lambda^2 - [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\, \lambda + [y_1(T)\dot{y}_2(T) - \dot{y}_1(T) y_2(T)] = 0$$

Покажем, что в этом уравнении последнее слагаемое равно единице. Действительно, y_1 и y_2 являются решениями уравнений

$$\ddot{y}_1 + p(t)y_1 = 0,$$
$$\ddot{y}_2 + p(t)y_2 = 0$$

Умножим первое уравнение на y_2, второе — на y_1 и вычитаем второе из первого. Получаем:

$$0 = \ddot{y}_1 y_2 - \ddot{y}_2 y_1 = \ddot{y}_1 y_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \dot{y}_2 - -\ddot{y}_2 y_1 = \frac{d}{dt}\left(\dot{y}_1 y_2\right) - \frac{d}{dt}\left(y_1 \dot{y}_2\right),$$

следовательно

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{y}_1 y_2 - y_1 \dot{y}_2\right) = 0$$

и

$$\dot{y}_1(t) y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t) = const = \dot{y}_1(T) y_2(T) - y_1(T)\dot{y}_2(T) = -1$$

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$\lambda^2 - \left[y_1(T) + \dot{y}_2(T)\right]\lambda + 1 = 0$$

Вводим обозначение

$$2A = y_1(T) + \dot{y}_2(T)$$

Тогда характеристические уравнение принимает вид:

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0, \tag{30}$$

Значение коэффициента A определяется устойчивость или неустойчивость решения (38). В самом деле, из уравнения (30) находим:

$$\lambda_1 = A + \sqrt{A^2 - 1},\ \lambda_2 = A - \sqrt{A^2 - 1}$$

или, положив

$$\mathrm{ch}a = A$$

получаем

$$\lambda_1 = e^a,\ \lambda_2 = e^{-a}.$$

Отсюда заключаем, что если $|A| > 1$, то есть $\mathrm{ch}a > 1$, и, следовательно, $a > 0$, то одно из слагаемых общего решения (38) неограниченно возрастает и решение уравнения (13) неустойчиво.

Если $|A| < 1$, то $\mathrm{ch}a < 1$ и a — чисто мнимое. Поскольку в этом случае $|\lambda_1| = 1$ и $|\lambda_2| = 1$, то $e^{a_1 t}$ и $e^{a_2 t}$ выражаются только через тригонометрические функции и решение уравнения (13) будет ограниченным, то есть устойчивым. Когда $|A| = 1$, то уравнение (30) имеет один кратный корень, равный $+1$ или -1. В этом случае решение уравнения (13) будет периодическим с периодом T, если $\lambda = +1$ и с периодом $2T$, если $\lambda = -1$. Это непосредственно видно из равенства (14), где, положив $\lambda = +1$, будем иметь

$$y(t+T) = y(t),$$

а положив $\lambda = -1$, получим

$$y(t+2T) = -y(t+T) = y(t).$$

В этом случае решение уравнения можно строить методом гармонического баланса или каким-нибудь другим методом, учитывая, что само периодическое решение содержит слагаемые с периодом вдвое большим, чем период функции $p(t)$. Если $p(t) = b + \varphi(t)$, где $b = const$, $\varphi(t)$ — периодическая функция. то уравнение (13) называется уравнением Хилла.

Если $p(t) = k_0^2\left(1 \pm \mu\cos\omega t\right)$ или

$$p(t) = k_0^2\left(1 \pm \mu\sin\omega t\right), \tag{31}$$

где k_0 — среднее значение собственной частоты, μ — относительная глубина пульсации,

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

T — период изменения параметра, то в этом случае уравнение (13) называется уравнением Матье. Обычно это уравнение записывают в виде:

$$\ddot{y} + (a - 2\varepsilon \cos 2\tau)\, y = 0, \tag{32}$$

к которому можно прийти, положив в (13) при значении $p(t)$ из (31):

$$\omega t = 2\tau, k_0^2 = \frac{a\omega^2}{4}, \pm\mu = \frac{2\varepsilon}{a}$$

1.2 Диаграмма Айнса-Стретта

Для приближенного вычисления коэффициента A необходимо знать приближенные значения решений нормальной системы. В случае уравнения Матье коэффициент A будет зависеть от двух параметров a и ε. Плоскость изменения параметров a и ε будет разделена на области, соответствующие устойчивым ($|A| > 1$) состояним системы (либо состояниям равновесия, либо состояниям некоторого основного движения). Границам зон устойчивости ($|A| = 1$) соответствуют периодические решения уравнения (13) и, следовательно, периодические колебаня системы. При этом период решения должен вдвое превышать период изменения параметра. Графическое изображение областей устойчивости на плоскости параметров a, ε уравнения (32) называется диаграммой Айнса-Стретта.

Заштрихованные области соответствуют устойчивым состояниям системы. Границы зон устойчивости строятся с помощью отыскания периодических решений y_1 и y_2, удовлетворяющих условиям (15) и имеющих период вдвое больше периода изменения параметра. Решение уравнения (32) ищем в виде:

$$y = y_0 + A_1 \sin\tau + B_1 \cos\tau + A_2 \sin 2\tau + B_2 \cos 2\tau + A_3 \sin 3\tau + B_3 \cos 3\tau + ... \quad (33)$$

Подставим (33) в (32). Заменим произведения тригонометрических функций их разложениями в ряд Фурье. Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему одинаковых уранений:

$$\begin{gathered} ay_0 - \varepsilon B_0 = 0. \\ -A_1 + aA_1 + \varepsilon A_1 - \varepsilon A_3 = 0, \\ -B_1 + aB_1 - \varepsilon B_1 - \varepsilon B_3 = 0, \\ -4A_2 + aA_2 + \varepsilon A_4 = 0, \\ -2\varepsilon y_0 - 4B_2 + aB_2 - \varepsilon B_4 = 0, \\ -\varepsilon A_1 - 9A_3 + aB_3 - \varepsilon A_5 = 0, \\ -\varepsilon B_1 - 9B_3 + aB_3 - \varepsilon B_5 = 0, \\ .... \end{gathered} \quad (34)$$

Оставляя лишь такое количество неизвестных, сколько выписано уравнений и приравнивая нулю определитель полученной системы, находим условие, при котором возможно периодическое решение (33) уравнения (32).

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -1+a+\varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1+a+\varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -4+a & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon & 0 & 0 & 0 & -4+a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & -9+a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & -9+a \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

Решая уравнение (35) относительно a, находим уравнения границ зон устойчивости. При $\varepsilon = 0$ из (35) следует:

$$a_0 = 0,\ a_1^{\text{л}} = 1,\ a_1^{\text{п}} = 1,\ a_2^{\text{л}} = 4,\ a_2^{\text{п}} = 4,\ a_3^{\text{л}} = 9,\ a_3^{\text{п}} = 9,\ ... \tag{36}$$

Придавая величине ε малые значения, можно уточнить корни (35):

$$\begin{gathered}
a_0 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{7}{128}\varepsilon^4 - ..., \\
a_1^{\text{л}} = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{64}\varepsilon^3 - \frac{1}{1536}\varepsilon^4 - ..., \\
a_1^{\text{п}} = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{64}\varepsilon^3 - \frac{1}{1536}\varepsilon^4 + ..., \\
a_2^{\text{л}} = 4 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \frac{5}{13824}\varepsilon^4 + ..., \\
a_2^{\text{п}} = 4 + \frac{1}{12}\varepsilon^2 - \frac{763}{13824}\varepsilon^4 + ...,
\end{gathered} \tag{37}$$

1.3 Примеры

Пример 1

Найти условие устойчивости обращенного маятника, если точка его подвеса гармонически колеблется около среднего положения по закону $y = A\cos\omega t$ с частотой ω и амплитудой A. Длина маятника равняется l. Понятно, что при неподвижной опоре обращенный маятник неустойчив; однако, как будет показано дальше, колебания опорной точки могут придать устойчивость такому маятнику. Составляя дифференциальное уравнение относительного движения, необходимо учесть переносную силу инерции $F_{\text{ин}}$. Уравнение моментов запишется в форме:

$$mgl\sin\varphi - mAl\omega^2\cos\omega t\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$$

Для малых отклонений имеем:

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\varphi = 0$$

Для приведения уравнения к каноническому виду положим:

$$2\tau = \omega t,\ a = -\frac{4g}{\omega^2 l},\ \varepsilon = -\frac{2A}{l}$$

Согласно (37), состояние равновесия неустойчиво, если значения a лежат в интервале $a_0 < a < a_1^{\text{л}}$, то есть

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^2 < a < 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2$$

или:

$$-\frac{1}{2}\frac{4A^2}{l^2} < -\frac{4g}{\omega^2 l} < 1 + \frac{2A}{l} - \frac{1}{8}\frac{4A^2}{l^2}$$

Правое неравенство выполняется всегда. Левое неравенство определяет условие неустойчивости в виде:

$$A\omega > \sqrt{2gl}$$

Это определяет нижний уровень максимальной скорости $A\omega$ колебаний точки подвеса, которая обеспечивает устойчивость опрокинутого маятника. Как видно, указанная скорость должна превышать скорость свободного падения с высоты, равной длине маятника.

<u>Пример 2</u>

Исследовать устойчивость колебаний системы с кубической упругой характеристикой:

$$m\ddot{x} + cx + \gamma x^3 = B\sin\omega t,\ \omega l \neq \frac{c}{m} \tag{38}$$

Пусть $x = x_0(t)$ — решение уравнения (19). Пусть ξ — малое отклонение смещения x от x_0. Подставляя в (38) $x = x_0 + \xi$, учитывая, что x_0 удовлетворяет уравнения (38) и оставляя члены первого порядка малости по ξ, получим уравнение:

$$m\ddot{\xi} + \left(c + 3\gamma x_0^2\right)\xi = 0 \tag{39}$$

Приближенное выражение для ξ ищем методом гармонического баланса, полагая

$$x_0 = A \sin \omega t \tag{40}$$

Подставляя (40) в (38) и приравнивая члены при одинаковых тригонометрических функциях, получим кубическое уравнения для A:

$$\left(c - m\omega^2\right) A + \frac{3}{4}\gamma A^3 = B \tag{41}$$

Уравнение (41) может иметь либо одно, либо три действительных решения. Пусть соотношения параметров таковы, что уравнение (41) имеет три действительных решения A_j, $j = 1, 2, 3$. Пусть система имеет три периодических режима колебаний:

$$\left[x_0(t)\right]_j = A_j \sin \omega t$$

Считая A известным, подставим (40) в (39). Получим:

$$m\ddot{\xi} + \left(c + \frac{3}{2}\gamma A^2 - \frac{3}{2}\gamma A^2 \cos 2\omega t\right)\xi = 0 \tag{42}$$

Обозначив $\omega t = \tau$ и поделив обе части уравнения (42) на m, приведём его к виду (32):

$$a = \frac{1}{m\omega^2}\left(c + \frac{3}{2}\gamma A^2\right),\ \varepsilon = \frac{3}{4}\frac{\gamma A^2}{m\omega^2}$$

Таким образом

$$a = \frac{c}{m\omega^2} + 2\varepsilon \tag{43}$$

и на диаграмме устойчивости все возможные пары значений лежат на прямой (43), Рисуем прямую на диаграмме Айнса-Стретта и отмечаем на прямой точки, соответствующие A_j. По тому, в какие области попадают точки, делаем вывод об устойчивости движений.

2 Вынужденные колебания нелинейных систем

2.1 Простейший способ

$$m\ddot{x} + cx + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t, \tag{44}$$

ищем с помощью метода коллокаций, ограничившись одной базисной функцией того же периода, что и возмущающая сила, но со сдвигом фазы, если f зависит от $\dot{x}$ и без сдвига, если f не зависит от $\dot{x}$:

$$x = A \sin\left(\omega t - \alpha\right), \tag{45}$$

В качестве точек коллокаций выбираются два момента времени: $t = t_1$ — момент времени, когда точка проходит через положение равновесия и $t = t_2$ — момент времени, когда точка отклоняется от положения равновесия на наибольшее расстояние $x = A$. Имеем:

$$\begin{gathered} x(t_1) = 0,\, \dot{x}(t_1) = A\omega,\, \ddot{x}(t_1) = 0 \\ x(t_2) = A,\, \dot{x}(t_2) = 0,\, \ddot{x}(t_1) = -A\omega^2 \end{gathered} \tag{46}$$

Согласно методу коллокаций, требуем, чтобы уравнение (45) в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ было удовлетворено. Учитывая (46), имеем:

$$\begin{gathered} \mu f(0, A\omega) = H \sin \alpha \\ A\left(-\omega^2 + c\right) + \mu f(A, 0) = H \cos \alpha \end{gathered} \tag{47}$$

Система уравнений (47) определяет A и α, подставив их в (45), получим приближенный ответ о вынужденных колебаниях нелинейной системы.

Система (47) — нелинейная. Поэтому она может иметь неединтсвенное решение, что означает, что вынужденные колебания рассматриваемой нелинейной механической системы могут происходить по нескольким режимам. При этом (как будет показано позже) не все возможные периодические решения рассматриваемой системы описываются найденным решением.

Система (47) может не иметь действительных решений. Это лишь означает, что периодических решений, приближённо описываемых законом (45), не существует, но отнюдь не означает, что (45) вообще не имеет периодических решений. Они могут существовать в иной форме.

2.2 Метод прямой линеаризации

Согласно этому приближенному способу, нелинейная характеристика $F(x)$ в уравнении

$$m\ddot{x} + F(x) = H\sin\omega t \tag{48}$$

заменяется эквивалентной линейной cx, так что дифференциальное уравнение (48) сразу принимает вид:

$$m\ddot{x} + cx = H\sin\omega t \tag{49}$$

Величина c определяется согласно методу прямой линеаризации. Она не является параметром системы, а зависит от амплитуды колебаний. Амплитуда периодических колебаний из уравнения (49) находится по формуле

$$A = \frac{H}{c - m\omega^2} \tag{50}$$

Так как c зависит от амплитуды A, то соотношение (50) следует рассматривать как уравнение для определения A.

2.3 Метод гармонического баланса

Рассмотрим уравнение

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Cx + \mu f(x,\dot{x}) = H\sin\omega t, \tag{51}$$

где m — масса материальной точки, C — жёсткость пружины, H – амплитуда вынуждающей силы, $f(x, \dot{x})$ — достаточно гладкая функция.

Решение уравнения ищем в виде отрезка ряда Фурье

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right) \tag{52}$$

В (52) слагаемы с частотой ω называются основными колебаниями, а с высшими частотами — ультрагармоническими.

Найдём производные x:

$$\dot{x} = \omega \sum_{k=1}^{N} k \left(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t\right)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sum_{k=1}^{N} k^2 \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right)$$

Рассмотрим выражение

$$f(x, \dot{x}) = f\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right), \omega \sum_{k=1}^{N} k \left(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t\right)\right]$$

Функции x, $\dot{x}$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$, следовательно $f(x, \dot{x})$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье. Приближённо заменим f отрезком ряда Фурье из N слагаемых

$$f(x, \dot{x}) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k \cos k\omega t + \psi_k \sin k\omega t\right)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})dt,\ \varphi_k = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})\cos k\omega t dt,$$

$$\psi_k = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})\sin k\omega t dt,$$

Выражения для φ_k , ψ_k содержат A_k, B_k. Теперь подставим найденные выражения для x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и f в уравнение (51) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках. Получаем систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{A_0}{2} + \mu\varphi_0 = 0 \\ \left(C - m\omega^2\right) A_1 + \alpha\omega B_1 + \mu\varphi_1 = 0, \\ \left(C - m\omega^2\right) B_1 - \alpha\omega A_1 + \mu\psi_1 = H, \\ \dots\dots \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) A_N + \alpha\omega N B_N + \mu\varphi_N = 0, \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) B_N - \alpha\omega N A_N + \mu\psi_N = 0. \end{cases} \tag{53}$$

Решая систему (53), находим A_k, B_k и рассматривая выражения для A_1 и B_1, находим амплитуду колебания по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и таким образом строим уравнение для амплитудно-частотной характеристики.

Для примера рассмотрим уравнений Дюффинга вида

$$\ddot{x} + p^2 x + \gamma x^3 = H\sin\omega t \tag{54}$$

В случае симметричной позиционной восстанавливающей силы решение может быть найдено в виде:

$$x = A_1 \sin\omega t + A_3 \sin 3\omega t$$

Подставим x в уравнение:

$$-\omega^2 A_1 \sin \omega t - 9\omega^2 A_3 \sin \omega t + p^2 \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right) + \\ + \gamma \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3$$

Раскроем куб:

$$\left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3 = A_1^3 \sin^3 \omega t + 3A_1^2 A_3 \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \\ + 3A_1 A_3^2 \sin \omega t \sin^2 3\omega t + A_3^3 \sin^3 3\omega t$$

Для того, чтобы разложить левую часть уравнения (54) в ряд Фурье, воспользуемся формулами понижения степени (лишние гармоники отбрасываем, первую и третью подчёркиваем):

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4}\left(\underline{3 \sin \omega t} - \underline{\underline{\sin 3\omega t}}\right)$$

$$\sin^2 \omega t \sin 3\omega t = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\omega t\right) \sin 3\omega t = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin 3\omega t}} - \frac{1}{4} \sin 5\omega t + \\ + \underline{\frac{1}{4} \sin \omega t}$$

$$\sin \omega t \sin^2 3\omega t = \underline{\frac{1}{2} \sin \omega t} + ...$$

$$\sin^3 3\omega t = \underline{\underline{\frac{3}{4} \sin 3\omega t}} + ...$$

Соберём первую и третью гармоники, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \dfrac{3\gamma}{4}\left(A_1^3 + A_1^2 A_3 + 2A_1^2 A_3\right) = H, \\ \left(p^2 - 9\omega^2\right) A_3 + \gamma \left(-\dfrac{1}{4} A_1^3 + \dfrac{3}{2} A_1^2 A_3 + \dfrac{3}{4} A_3^3\right) = 0 \end{cases} \tag{55}$$

Система (55) может быть решена при помощи математических пакетов. Также мы можем получить амплитудно-частотную характеристику, если положим в решении $A_3 = 0$. В этом случае АЧХ приобретает вид:

$$\left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \frac{3\gamma}{4} A_1^3 = H$$

Также система может быть решена методом итераций.

2.4 Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотной характеристикой называется зависимость между частотой возмущающей силы ω и амплитудой вынужденных колебаний. Рассмотрим построение амплитудног-частотной характеристики на примере системы с кубической упругой зарактеристикой и вязким трением, для которой уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma x^3 = H\cos\omega t \tag{56}$$

Здесь m — масса, α — коэффициент вязкого трения,

$$F(x) = cx + \gamma x^3$$

— упругая восстанавливающая сила, $H\cos\omega t$ — возмущающая сила. Поскольку восстанавливающая сила симметрична ($F(x) = -F(-x)$), то первое слагаемое в решении (52) A_0 обращается в ноль.

Для построения амплитудно-частотной характеристики в ряде Фурье ограничиваемся первыми гармониками:

$$x = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t = A\cos\left(\omega t - \varphi\right)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2},\ \cos\varphi = \frac{A_1}{A},\ \sin\varphi = \frac{A_2}{A}$$

Проведём сдвиг начала отчёта по времени t, полагая:

$$\omega\tau = \omega t - \varphi$$

Тогда уравнение (56) запишется в виде:

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2} + \alpha\frac{dx}{d\tau} + cx + \gamma x^3 = H\cos\omega\tau, \tag{57}$$

а основные колебания исходного решения примут форму:

$$x = A\cos\omega\tau \tag{58}$$

Подставим (58) в (57), используя тождество:

$$\cos^3\omega\tau = \frac{3}{4}\cos\omega\tau + \frac{1}{4}\cos 3\omega\tau$$

и раскроем косинус суммы в правой части уравнения (56). Затем приравняем члены при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в отдельности:

$$\begin{cases} \left(c - m\omega^2\right)A + \dfrac{3}{4}\gamma A^3 = H\cos\varphi \\ -\alpha A\omega = -H\sin\varphi \end{cases} \tag{59}$$

При этом, согласно методу гармонического баланса, слагаемое

$$\frac{1}{4}\gamma A\cos 3\omega t$$

остается несбалансированным. Учитывая, что выражение

$$p^2(A) = \frac{c}{m} + \frac{3}{4}\frac{\gamma}{m}A^2 \tag{60}$$

представляет собой квадрат частоты свободнных колебаний рассматриваемой системы при отсутствии трения, и, обозначая

$$2n = \frac{\alpha}{m},$$

запишем (59) в виде:

$$\begin{cases} \left[p^2(A) - \omega^2\right] A = \dfrac{H}{m}\cos\varphi \\ 2nA\omega = \dfrac{H}{m}\sin\varphi \end{cases} \tag{61}$$

Исключая отсюда фазовый сдвиг, находим:

$$\left\{\left[p^2(A) - \omega^2\right]^2 + 4n^2\omega^2\right\} A^2 = \left(\frac{H}{m}\right)^2 \tag{62}$$

Разделив второе уравнение (61) на первое, получим значение фазового сдвига:

$$tg\varphi = \frac{2n\omega}{p^2(A) - \omega^2}$$

Управнение (61) даёт зависимость между частотой вынуждающей силы и амплитудой A основных колебаний, то есть амплитудно-частотную характеристику. Для её построения решаем уравнение (62) относительно ω:

$$\omega^2 = p^2(A) - 2n^2 \pm \sqrt{\left(\frac{H}{mA}\right)^2 - 4n^2p^2(A) + 4n^4} \tag{63}$$

На плоскости ω^2, A сначала строится скелетная кривая $p^2(A)$. Затем на каждом уровне влево от неё по горизонтали откладывается отрезок $2n^2$, после этого от полученной кривой опять на каждом уровне амплитуды влево и вправо по горизонтали откладываются отрезки b

$$b = \sqrt{\left(\frac{H}{mA}\right)^2 - 4n^2p^2(A) + 4n^4} \tag{64}$$

Существенной особенностью нелинейных систем является возможность нескольких периодических режимов при изменении частоты в определенных пределах. Колебания системы, описываемые уравнением (56), могут происходить с тремя амплитудами.

2.5 Устойчивость периодических решений

Предположим, что выражение $x_0 = A\cos\omega\tau$ удовлетворяет уравнению (57).

Рассмотрим возмущённое движение

$$x = x_0(\tau) + \xi, \tag{65}$$

где ξ — малые возмущения. Подставляя (65) в (57), учитывая, что $x_0(\tau)$ удовлетворяет уравнению (57) и линеаризуя полученное уравнение, находим уравнение для ξ:

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + \left(c + 3\gamma x_0^2\right)\xi = 0, \tag{66}$$

где точками обозначены производные по τ.

Если решения уравнения (66) в любой момент времени ограничены, то исследуемое движение $x_0(\tau)$ — устойчивое, если решение (66) возрастает, то исследуемое движение — неустойчивое.

Подставим в (66) выражение для x_0. Получим уравнение:

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + \left(c + \frac{3}{2}\gamma A^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2\cos 2\omega\tau\right)\xi = 0, \tag{67}$$

Обозначив $u = \omega\tau$ и поделив уравнение (67) почленно на m, приведём его к виду:

$$\ddot{\xi} + \alpha_1\dot{\xi} + (a + 2\varepsilon\cos 2u)\,\xi = 0, \tag{68}$$

при этом:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{m\omega},\ a = \frac{1}{m\omega^2}\left(c + \frac{3}{2}\gamma A^2\right),\ \varepsilon = \frac{3}{4}\frac{\gamma A^2}{m\omega^2} \tag{69}$$

При $\alpha_1 = 0$ уравнение (68) переходит в уравнение Матье. В случае $\alpha_1 \neq$

0 границы диаграммы Айнса-Стретта несколько смещаются. Так же, как и для уравнения Матье, периодические решения ищем в виде ряда Фурье. Для того, чтобы приближённо определить границы первой области неустойчивости, в ряде Фурье достаточно удержать только слагаемые с первыми гармониками

$$\xi = C_1 \sin u + C_2 \cos u \tag{70}$$

Подставляя (70) в (69) и приравнивая коэффициенты при $\sin u$ и $\cos u$, получаем:

$$C_1(a - 1 + \varepsilon) + C_2\alpha_1 = 0$$
$$C_1(-\alpha_1) + C_2(a - 1 - \varepsilon) = 0$$

Приравниваем к нулю определитель этой системы, находим условие, при котором возможны периодические решения уравнения (68):

$$(a-1)^2 - \varepsilon^2 + \alpha_1^2 = 0 \tag{71}$$

Это условие и представляет собой приближённое уравнение границ первой области неустойчивости. При этом в случае $\alpha_1 = 0$ области неустойчивости для уравнения Матье соответствует неравенство $|a-1| < \varepsilon$ или $(a-1)^2 < \varepsilon^2$. Наличие α_1 несколько смещает границы зон неустойчивости и при $\alpha_1 \neq 0$ соответствующее области неустойчивости неравенство принимает вид:

$$(a-1)^2 - \varepsilon^2 + \alpha_1^2 < 0 \tag{72}$$

Подставляя в (72) значения a, ε, α из (69) и обозначая

$$2n = \frac{\alpha}{m},\ p^2(A) = \frac{c}{m} + \frac{3}{4}\frac{\gamma A^2}{m},$$

приведём условиен неустойчивости к виду

$$\left[p^2(A)-\omega^2\right]^2+4n^2\omega^2+\frac{3}{2}\frac{\gamma A^2}{m}\left[p^2(A)-\omega^2\right]<0 \tag{73}$$

Вычислим по уравнению (62) частную производную

$$\frac{\partial H^2}{\partial (A^2)}$$

при $\omega = const$:

$$\frac{\partial H^2}{\partial (A^2)}=m^2\left\{\left[p^2(A)-\omega^2\right]^2+4n^2\omega^2+2\left[p^2(A)-\omega^2\right]\frac{dp^2(A)}{d(A^2)}A^2\right\}$$

Так как

$$\frac{dp^2(A)}{d(A^2)}=\frac{3}{4}\frac{\gamma}{m},$$

получаем:

$$\frac{\partial H^2}{\partial A^2}=m^2\left\{\left[p^2(A)-\omega^2\right]^2+4n^2\omega^2+\frac{3}{2}\frac{\gamma A^2}{m}\left[p^2(A)-\omega^2\right]\right\}$$

Это выражение только множителем m^2 отличается от неравенства (73). Таким образом, условие неустойчивости (73) можно записать в виде

$$\frac{\partial H^2}{\partial (A^2)}<0.$$

Итак, периодическое движение неустойчивое, если возрастанию силы соответствует убывание амплитуды. Это условие выполняется в режиме колебаний с промежуточными амплитудами A.