Лабораторная работа №4

П. С. Углич

кафедра теории упругости

16 марта 2026 г.

Оглавление

$$m\ddot{x} + cx + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t, \tag{1}$$

ищем с помощью метода коллокаций, ограничившись одной базисной функцией того же периода, что и возмущающая сила, но со сдвигом фазы, если f зависит от $\dot{x}$ и без сдвига, если f не зависит от $\dot{x}$:

$$x = A \sin\left(\omega t - \alpha\right), \tag{2}$$

В качестве точек коллокаций выбираются два момента времени: $t = t_1$ — момент времени, когда точка проходит через положение равновесия и $t = t_2$ — момент времени, когда точка отклоняется от положения равновесия на наибольшее расстояние $x = A$. Имеем:

$$\begin{gathered} x(t_1) = 0,\ \dot{x}(t_1) = A\omega,\ \ddot{x}(t_1) = 0 \\ x(t_2) = A,\ \dot{x}(t_2) = 0,\ \ddot{x}(t_1) = -A\omega^2 \end{gathered} \tag{3}$$

Согласно методу коллокаций, требуем, чтобы уравнение (2) в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ было удовлетворено. Учитывая (3), имеем:

$$\begin{gathered} \mu f(0, A\omega) = H \sin \alpha \\ A\left(-\omega^2 + c\right) + \mu f(A, 0) = H \cos \alpha \end{gathered} \tag{4}$$

Система уравнений (4) определяет A и α, подставив их в (2), получим приближенный ответ о вынужденных колебаниях нелинейной системы.

Система (4) — нелинейная. Поэтому она может иметь неединственное решение, что означает, что вынужденные колебания рассматриваемой нелинейной механической системы могут происходить по нескольким режимам. При этом (как будет покаазно позже) не все возможные периодические решения рассматриваемой системы описываются найденным решением.
Система (4) может не иметь действительных решений. Это лишь означает, что периодических решений, приближённо описываемых законом (2), не существует, но отнюдь не означает, что (2) вообще не имеет периодических решений. Они могут существовать в иной форме.

Согласно этому приближенному способу, нелинейная характеристика $F(x)$ в уравнении

$$m\ddot{x} + F(x) = H \sin \omega t \tag{5}$$

заменяется эквивалентной линейной cx, так что дифференциальное уравнение (5) сразу принимает вид:

$$m\ddot{x} + cx = H \sin \omega t \tag{6}$$

Величина c определяется согласно методу прямой линеаризации из условия минимизации интегрального квадратичного уклонения

$$\delta(c) = \int_{-A}^{A} [F(x) - cx]^2 \, dx \tag{7}$$

или

$$\delta(c) = \int_{-A}^{A} x^2 [F(x) - cx]^2 \, dx \tag{8}$$

Она не является параметром системы, а зависит от амплитуды колебаний. Амплитуда периодических колебаний из уравнения (6) находится по формуле

$$A = \frac{H}{c - m\omega^2} \tag{9}$$

Так как c зависит от амплитуды A, то соотношение (9) следует рассматривать как уравнение для определения A.

Рассмотрим уравнение

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Cx + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t, \tag{10}$$

где m — масса материальной точки, C — жёсткость пружины, H – амплитуда вынуждающей силы, $f(x, \dot{x})$ — достаточно гладкая функция.

Решение уравнения ищем в виде отрезка ряда Фурье

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \tag{11}$$

Найдём производные x:

$$\dot{x} = \omega \sum_{k=1}^{N} k \left(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t\right)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sum_{k=1}^{N} k^2 \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{cases} f(x,\dot{x}) = f\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right),\right. \\ \qquad\qquad \left.\omega \sum_{k=1}^{N} k\left(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t\right)\right] \end{cases}$$

Функции x, $\dot{x}$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$, следовательно $f(x,\dot{x})$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье. Приближённо заменим f отрезком ряда Фурье из N слагаемых

$$f(x,\dot{x}) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k \cos k\omega t + \psi_k \sin k\omega t\right)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})dt,\ \varphi_k = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})\cos k\omega t dt,$$

$$\psi_k = \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x,\dot{x})\sin k\omega t dt,$$

Выражения для φ_k , ψ_k содержат A_k, B_k. Теперь подставим найденные выражения для x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и f в уравнение (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках. Получаем систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{A_0}{2} + \mu\varphi_0 = 0 \\ \left(C - m\omega^2\right) A_1 + \alpha\omega B_1 + \mu\varphi_1 = 0, \\ \left(C - m\omega^2\right) B_1 - \alpha\omega A_1 + \mu\psi_1 = H, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) A_N + \alpha\omega N B_N + \mu\varphi_N = 0, \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) B_N - \alpha\omega N A_N + \mu\psi_N = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Решая систему (12), находим A_k, B_k и рассматривая выражения для A_1 и B_1, находим амплитуду колебания по формуле

$$A = \sqrt{A^2 + B^2}$$

и таким образом строим уравнение для амплитудно-частотной характеристики.

Для примера рассмотрим уравнений Дюффинга вида

$$\ddot{x} + p^2 x + \gamma x^3 = H \sin \omega t \tag{13}$$

В случае симметричной позиционной восстанавливающей силы решение может быть найдено в виде:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t$$

Подставим х в уравнение:

$$-\omega^2 A_1 \sin \omega t - 9\omega^2 A_3 \sin \omega t + p^2 \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right) + \\ +\gamma \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3$$

Раскроем куб:

$$\left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3 = A_1^3 \sin^3 \omega t + 3A_1^2 A_3 \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \\ +3A_1 A_3^2 \sin \omega t \sin^2 3\omega t + A_3^3 \sin^3 3\omega t$$

Для того, чтобы разложить левую часть уравнения (13) в ряд Фурье, воспользуемся формулами понижения степени (лишние гармоники отбрасываем, первую и третью подчёркиваем):

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4}\left(\underline{3\sin\omega t} - \underline{\underline{\sin 3\omega t}}\right)$$

$$\sin^2 \omega t \sin 3\omega t = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\omega t\right)\sin 3\omega t = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin 3\omega t}} - \frac{1}{4}\sin 5\omega t + \\ + \underline{\frac{1}{4}\sin\omega t}$$

$$\sin\omega t \sin^2 3\omega t = \underline{\frac{1}{2}\sin\omega t} + \ldots$$

$$\sin^3 3\omega t = \underline{\underline{\frac{3}{4}\sin 3\omega t}} + \ldots$$

Соберём первую и третью гармоники, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \frac{3\gamma}{4} \left(A_1^3 + A_1^2 A_3 + 2A_1^2 A_3\right) = H, \\ \left(p^2 - 9\omega^2\right) A_3 + \gamma \left(-\frac{1}{4} A_1^3 + \frac{3}{2} A_1^2 A_3 + \frac{3}{4} A_3^3\right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) может быть решена при помощи математических пакетов. Также мы можем получить амплитудно-частотную характеристику, если положим в решении $A_3 = 0$. В этом случае АЧХ приобретает вид:

$$\left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \frac{3\gamma}{4} A_1^3 = H$$

Также система может быть решена методом итераций

- Найти все периодические решения уравнения простейшим методом, а также методами линеаризации (с использованием обоих вариантов минимизирующего функционала) и гармонического баланса;
- построить амплитудно-частотные характеристики;

1. (Бережной) $(l - a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
2. (Гусаков) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = H\sin\Omega t$
3. (Калабуха) $\ddot{x} + x = -\varepsilon\dot{x}x^2 + H\sin\omega t$
4. (Марков) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^2 x + H\sin\omega t$
5. (Молчан) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^3 = H\sin\omega t$
6. (Терентьев) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\dot{x}\left(\omega^2 x^2 - \dot{x}^2\right) + H\sin\Omega t$
7. (Узлов) $\left(mr^2 + J\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = H\sin\omega t$
8. (Филатов)
   $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta = H\sin\Omega t$
9. (Савицкий)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta - Mga\sin\theta = H\sin\Omega t$$

10. (Ефремов) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x\left(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2\right) + H\sin\Omega t$