

О. Г. Пустовалова, В. В. Дударев

$$\nabla \cdot \sigma + F = \rho \ddot{u}$$

# Решение задач теории упругости в конечно-элементном пакете FlexPDE

Учебное пособие

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$$

$$\sigma = \lambda \text{Etr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon$$



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Г. ПУСТОВАЛОВА,  
В. В. ДУДАРЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПАКЕТЕ  
FlexPDE

*Учебное пособие*

Ростов-на-Дону — Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2024

УДК 539.3:519.63(075.8)

ББК 22.1+22.2 я73

П 89

*Издается по решению кафедры математического моделирования  
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича  
Южного федерального университета (протокол № 8 от 23 мая 2024 г.)*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры  
теоретической механики Ростовского государственного университета путей  
сообщения *О. А. Беляк*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости  
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича  
Южного федерального университета *А. М. Колесников*

**Пустовалова, О. Г.**

П 89 Решение задач теории упругости в конечно-элементном пакете FlexPDE [Элек-  
тронный ресурс] : учебное пособие / О. Г. Пустовалова, В. В. Дударев ; Южный  
федеральный университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Юж-  
ного федерального университета, 2024. — Электрон. текстовые дан. (1 файл:  
4,36 Мб). — 1 электрон. опт. диск (CD-R). — Системные требования: процес-  
сор с тактовой частотой 1,5 ГГц и выше, 2 Гб оперативной памяти, Windows 7  
SP1/8, 8.1/10/11 (64-разрядная версия), Acrobat Reader, привод DVD-ROM. —  
Загл. с экрана. — 151 с.

ISBN 978-5-9275-4781-4

Пособие посвящено численному решению задач теории упругости с помощью  
метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Приведены основные теоретиче-  
ские положения. Рассмотрены некоторые базовые задачи о статическом нагруже-  
нии и свободных колебаниях объектов канонической формы. Для каждой задачи  
представлены листинги скриптов, с помощью которых можно построить числен-  
ные решения. Даны задания для закрепления изложенного материала. Учебное  
пособие предназначено для широкого круга читателей, в том числе для студентов  
бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 прикладная  
математика и 01.03.03 механика и математическое моделирование.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 539.3:519.63(075.8)

ББК 22.1+22.2 я73

ISBN 978-5-9275-4781-4

© Южный федеральный университет, 2024

© Пустовалова О. Г., Дударев В. В., 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Краткие сведения из теории упругости . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1	Основные гипотезы теории упругости . . . . .	5
1.2	Общая постановка задачи теории упругости . . . . .	6
1.3	Принцип Сен-Венана . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Модельные задачи теории упругости . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1	Одномерная задача о растяжении стержня под действием силы тяжести . . . . .	15
2.2	Трехмерная задача о растяжении стержня под действием силы тяжести . . . . .	20
2.3	Задача Кирша . . . . .	35
2.4	Задания к задаче о растяжении области, ослабленной круговым отверстием . . . . .	43
2.5	Кручение круглого вала . . . . .	53
2.6	Кручение квадратного стержня . . . . .	61
2.7	Кручение стержня с эллиптическим сечением . . . . .	77
2.8	Задача Ламе для полого цилиндра . . . . .	82
2.8.1	Одномерная задача . . . . .	82
2.8.2	Задача Ламе на поперечном сечении . . . . .	90
2.8.3	Задача Ламе на продольном сечении . . . . .	96
2.9	Чистый изгиб призматических стержней . . . . .	103
2.10	Задача изгиба бруса на продольном сечении . . . . .	113
<b>3</b>	<b>Задачи о свободных колебаниях упругих тел . . . . .</b>	<b>119</b>
3.1	Продольные колебания стержня . . . . .	119
3.2	Изгибные колебания мембраны . . . . .	124
3.3	Задания. Модальный анализ мембран . . . . .	131

3.4	Вычисление собственных частот камертона . . . . .	133
3.5	Задания к задаче о нахождении собственных частот камертона	138
<b>4</b>	<b>Приложения . . . . .</b>	<b>139</b>
4.1	Приложение 1. Выражения для набла-оператора и оператора Лапласа для трех систем координат . . . . .	139
4.2	Приложение 2. Уравнения равновесия и определяющие соотношения в цилиндрической и сферической системах координат . .	142
4.3	Приложение 3. Уравнения совместности деформаций в цилиндрической системе координат . . . . .	144
4.4	Приложение 4. Связь между компонентами тензора напряжений в цилиндрической и декартовой системах координат . . . .	145
4.5	Приложение 5. Формы мембран и сечений вала . . . . .	147
4.6	Приложение 6. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность некоторых материалов . . . . .	148
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>149</b>

# 1 Краткие сведения из теории упругости

## 1.1 Основные гипотезы теории упругости

При изучении механики деформируемого твердого тела можно условно выделить две части [1]:

- физическая, в рамках которой экспериментально исследуются механические свойства материалов;
- математическая, в рамках которой на основе общих законов и установленных в ходе экспериментов зависимостей с помощью математического аппарата исследуется напряженно-деформированное состояние твердого тела, находящегося под действием нагрузок.

Математическая часть включает в себя теорию упругости и теорию пластичности. В теории упругости используются ряд допущений. Вещество непрерывно распределено по всему занимаемому им объему и целиком заполняет этот объем (гипотеза сплошности). Рассматриваются идеально упругие тела, которые полностью восстанавливают свою первоначальную форму после снятия нагрузки. Деформации являются однозначными функциями от напряжений. Также при исследовании объекта обычно уточняют из какого материала он состоит. Материал называется однородным (гомогенным (англ. homogeneous)), если его свойства одинаковы во всех точках, в противном случае он называется неоднородным (негомогенным (англ. non homogeneous, heterogeneous)). Материал называется изотропным (англ. isotropic) по отношению к упругим свойствам, если эти свойства в точке оказываются одинаковым по всем направлениям, в противном случае материал называется анизотропным (англ. anisotropic). Многие металлы и сплавы (железо, медь, алюминий, вольфрам, золото, серебро, сталь, чугун и др.), которые применяются в строительстве и технике при обычных температурах и при нагрузках, не превышающих предела упругости, можно рассматривать как идеально упругие. При этом рассматриваются объекты с размерами, позволяющими не учитывать особенности микроструктуры вещества (например, ориентацию кристаллов).

## 1.2 Общая постановка задачи теории упругости

Рассмотрим упругое изотропное тело объема  $V$  с границей  $S = \partial V$ . Для описания его положения после воздействия вводится в рассмотрение вектор перемещения  $\vec{u}(\vec{r})$ , где  $\vec{r}$  радиус-вектор точки тела. Для задания  $\vec{r}$  используется одна из систем координат (например, декартова  $(x, y, z)$ , цилиндрическая  $(r, \varphi, z)$ , сферическая  $(r, \varphi, \vartheta)$  или другая).

Общая постановка задачи для изотропного упругого тела в тензорной форме может быть кратко записана в виде векторного дифференциального уравнения, определяющих соотношений, граничных и начальных условий [1–6].

1) Векторное дифференциальное уравнение движения.

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{F} = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (1.1)$$

где  $\operatorname{div}$  — оператор дивергенции [3, 7],  $\underline{\underline{\sigma}}$  — тензор напряжений Коши,  $\vec{F}$  — вектор массовых сил,  $\rho \ddot{\vec{u}}$  — вектор инерциальных сил, использовано обозначение  $\ddot{\vec{u}} = \partial^2 \vec{u} / \partial t^2$ . Используя набла-оператор  $\nabla$ , можно переписать это уравнение

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{F} = \rho \ddot{\vec{u}}. \quad (1.2)$$

Если рассматривается задача о равновесии объекта (задача статики), то уравнение примет вид:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{F} = 0. \quad (1.3)$$

2) Определяющие соотношения.

Тензор напряжений Коши задается согласно линейному закону Гука

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{E}} \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (1.4)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $\underline{\underline{E}}$  — единичный тензор,  $\operatorname{tr}$  — след тензора (см. определение в [3, 7]), в свою очередь тензор малых деформаций  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  определяется через градиент вектора перемещения следующим образом

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T), \quad (1.5)$$

здесь через «Т» обозначена операция транспонирования [3, 7]. Представление для градиента вектора в основных системах координат можно посмотреть в приложении 4.1. Параметры Ламе еще называют «физическими» параметрами материала. Параметр  $\mu$  имеет также название модуля сдвига и в литературе встречается другое его обозначение как  $G$ . На практике в ходе экспериментов измеряют «технические» параметры материала: модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Далее приведены формулы связывающие эти параметры между собой:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.6)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}. \quad (1.7)$$

3) Граничные условия.

Выделяют три основных вида граничных условий.

а) Граничное условие первого типа. В каждой точке границы тела задан вектор смещения

$$\vec{u}|_S = \vec{f}, \quad (1.8)$$

где  $\vec{f}$  — известная функция, определенная на границе  $S = \partial V$ .

б) Граничное условие второго типа. В каждой точке границы тела заданы усилия

$$\vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}|_S = \vec{P}, \quad (1.9)$$

где  $\vec{n}$  — вектор внешней единичной нормали поверхности тела  $S$ ,  $\vec{P}$  — известный вектор сил, приложенных на границе  $S$ .

в) Граничное условие третьего типа. Их также называют смешанными граничными условиями. На части границы  $S_u$  заданы смещения, а на другой части  $S_\sigma$  усилия:

$$\vec{u}|_{S_u} = \vec{f}, \quad \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}|_{S_\sigma} = \vec{P}, \quad (1.10)$$

при этом  $S_u \cup S_\sigma = S$ . На рисунке 1 в качестве примера обозначены различные усилия  $\vec{P}_i$ , которые действуют на части поверхности объекта.

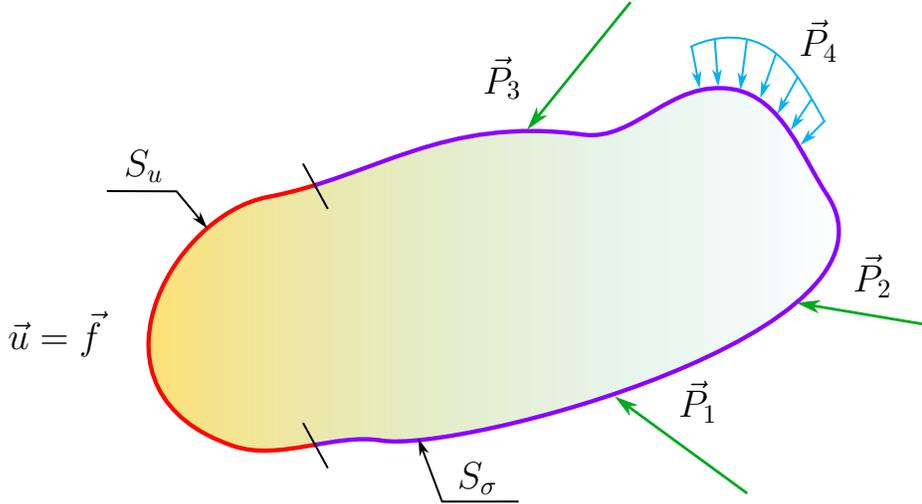


Рис. 1: Пример различных граничных условий на поверхности объекта.

4) Начальные условия.

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{q}, \quad \dot{\vec{u}}|_{t=0} = \vec{g}, \quad (1.11)$$

где  $\vec{q}$  — заданное в момент времени  $t = 0$  векторное поле перемещения,  $\vec{g}$  — поле скоростей.

Отметим, что, если задача сводится к определению компонент вектора перемещений по заданному полю тензора деформаций согласно (1.5), то получается переопределенная система уравнений. Действительно, число уравнений (6 штук — 6 компонент тензора деформаций) больше числа неизвестных (3 штуки — 3 компоненты вектора смещения). Поэтому для получения однозначного решения используются уравнения совместности деформации Сен-Венана (условия сплошности), которые можно кратко записать в виде одного условия в тензорной форме, используя операцию ротора [3, 7]:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}})^T = 0 \quad \text{или} \quad \text{Ink } \underline{\underline{\varepsilon}} = 0, \quad (1.12)$$

где  $\text{Ink } \underline{\underline{X}} = \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{X}})^T$ .

Одной из наиболее распространенных систем координат является декартова  $Oxyz$ . Используя приведенные уравнения и соотношения, а также представление набла оператора в этой системе приведем общую постановку задачи для удобства дальнейшего рассмотрения конкретных примеров.

1) Дифференциальные уравнения движения.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.13)$$

2) Определяющие соотношения.

Закон Гука, описывающий линейную связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}. \quad (1.15)$$

Выражения для компонент тензора деформаций:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (1.17)$$

3) Граничные условия смешанного типа (третьего рода).

$$u_x|_{S_u} = f_x, \quad u_y|_{S_u} = f_y, \quad u_z|_{S_u} = f_z, \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx} |_{S_\sigma} = p_x, \\ n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy} |_{S_\sigma} = p_y, \\ n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} |_{S_\sigma} = p_z. \end{cases} \quad (1.19)$$

4) Начальные условия.

Этот тип условий используется при исследовании нестационарных задач, когда поле перемещения изменяется с течением времени.

$$\begin{aligned}
u_x|_{t=0} &= q_x, & u_y|_{t=0} &= q_y, & u_z|_{t=0} &= q_z, \\
\dot{u}_x|_{t=0} &= g_x, & \dot{u}_y|_{t=0} &= g_y, & \dot{u}_z|_{t=0} &= g_z.
\end{aligned}
\tag{1.20}$$

Здесь  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$  — компоненты симметричного тензора напряжений Коши  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$  — компоненты линейного тензора деформаций  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\Theta = \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  — коэффициент, характеризующий объемную деформацию тела,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  — вектор перемещения,  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$  — вектор массовых сил,  $S = S_u \cup S_\sigma$  — поверхность тела,  $\vec{f}$  — заданный вектор, описывающий поле перемещения на части границы  $S_u$ ,  $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$  — вектор внешней единичной нормали к поверхности  $S_\sigma$ ,  $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$  — заданный вектор внешних сил, приложенных на части поверхности  $S_\sigma$ ,  $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$  — заданное векторное поле перемещения в момент времени  $t = 0$ ,  $\vec{g}(g_x, g_y, g_z)$  — поле скоростей при  $t = 0$ .

При решении некоторых задач теории упругости возникает необходимость определения компонент вектора перемещения по заданным деформациям. Для однозначности решения такой проблемы используются уравнения совместности деформаций Сен-Венана (условия сплошности) [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z} &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

Следует отметить, что эти уравнения можно получить в явном виде на основе (1.16)–(1.17). Сначала выражаются вторые производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\varepsilon_{xy} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\varepsilon_{xy} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\varepsilon_{zx} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] = \\
&= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Аналогично можно выписать выражения для частных производных по каждой координате  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от функций  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ . Как известно, чтобы выписанные частные производные (1.23) действительно существовали, они должны удовлетворять трем соотношениям, которые отражают правило, согласно которому дифференцирование по двум независимым переменным не зависит от порядка дифференцирования:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Подставив выражение для частных производных из (1.23), получим первое уравнение из (1.21), а также первое и второе уравнения из (1.22). Если проделать аналогичные рассуждения для первых производных  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ , то получим в результате 18 соотношений, среди которых различными являются только 6 (1.21)–(1.22).

Поскольку закон Гука устанавливает линейную связь между компонентами тензора напряжений и деформаций, поэтому существует другая его запись [1, 8]. В некоторых задачах ее удобно использовать при построении решения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{yz} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{zx}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Эти выражения можно получить на основе записи закона Гука в тензорном виде, в которой используются параметры  $E$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  с учетом (1.6):

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \left( \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \underline{\underline{E}} \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \right), \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1 + \nu} \underline{\underline{E}} \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}} \right). \tag{1.26}$$

В современной литературе также встречается более компактная запись основных уравнений в декартовой системе координат. Для этого оси обозначаются, например, через  $(x_1, x_2, x_3)$  с ортами  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  и используется правило суммирования Эйнштейна по повторяющемуся индексу. В этом случае набла-оператор  $\nabla$ , тензора второго ранга  $\underline{\underline{\sigma}}$  и  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  можно записать в виде [3, 7]

$$\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Также используется компактная запись для частной производной

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = R_{,i}. \tag{1.27}$$

Таким образом, уравнения движения, определяющие соотношения и граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} + F_i &= \rho \ddot{u}_i, \\
\sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = \lambda \delta_{ij} \Theta + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\
\Theta &= \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla \cdot \vec{u} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}, \\
\varepsilon_{ij} &= 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \\
u_i|_{S_u} &= f_i, \\
n_i \sigma_{ij}|_{S_\sigma} &= P_i,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Начальные условия:

$$u_i|_{t=0} = q_i, \quad \dot{u}_i|_{t=0} = g_i. \quad (1.29)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

оба индекса  $i, j$  принимают значения от 1 до 3:  $i, j = 1, 2, 3$ .

Уравнения совместности деформаций (1.21)–(1.22) записываются аналогично.

Важной величиной в задачах теории упругости является потенциальная энергия деформации, которая запасается в теле в результате его деформирования. Общая формула для ее вычисления с учетом симметричности тензора напряжений и деформаций можно быть записана в виде [1–3]:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv \end{aligned} \quad (1.30)$$

или, используя тензорные величины,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}} \odot \underline{\underline{\varepsilon}} dv, \quad (1.31)$$

где  $\odot$  — операция полного умножения тензоров [7].

### Задание

Используя запись закона Гука из (1.26), выразите тензор деформации через тензор напряжений. Далее используя формулу для модуля сдвига из (1.6) получите формулы (1.25).

### 1.3 Принцип Сен-Венана

При исследовании задач теории упругости могут возникать существенные трудности, связанные с построением точного математического решения для напряжений и деформаций. Только для некоторых частных случаев удается получить решение в аналитическом виде. Одним из эффективных способов преодоления этих трудностей является отказ от точного задания внешних усилий, приложенных к объекту. При этом следуют принципу упругой равнозначности статически эквивалентных нагрузок. Этот принцип был предложен французским инженером, механиком и математиком Сен-Венаном и представлен в 1855 году.

Общую формулировку дал в 1885 году Ж. В. Буссинеск, которую можно записать следующим образом [1]: «Если систему сил, действующих на небольшую часть поверхности или объема упругого тела, заменить другой системой, действующей на ту же часть поверхности или объема тела и имеющей те же главный вектор и главный момент, то напряженное состояние в точках тела не очень близких к местам приложения сил, почти не изменится».

В качестве примера можно обратиться к задаче об изгибе консольной балки. Способ приложения поперечной силы, вызывающей изгиб, на свободном конце может быть разным: в виде сосредоточенного усилия в одной точке, распределенной касательной нагрузки на всем поперечном сечении или его части. При этом различия в напряженно-деформированном состоянии во всех случаях будет наблюдаться только вблизи нагруженной части балки [2].

На практике принцип Сен-Венана подтверждается не только для случая малых деформаций в упругих телах, поведение которых описывается законом Гука, но и для других объектов [4].

Вопросы определения напряженно-деформированного состояния в области приложения нагрузок рассматриваются в отдельном классе задач, которые называются контактными задачами теории упругости.

## 2 Модельные задачи теории упругости

Рассмотрим в качестве примера ряд модельных задач теории упругости. Для некоторых из них можно построить аналитические решения и сравнить с численными, полученными с помощью МКЭ в пакете FlexPDE [9–11].

### 2.1 Одномерная задача о растяжении стержня под действием силы тяжести

Стержнем называется объект у которого один размер (длина) много больше двух других (высота и ширина). Для такого тела обычно используется одномерная модель. В рамках нее исследуется зависимость решения только от одной координаты, которая находится на продольной оси. Рассмотрим задачу о растяжении стального стержня под действием собственного веса. Длина стержня равна  $l = 1$  м, поперечное сечение — квадрат со стороной  $a = 0.1$  м, модуль Юнга  $E = 200 \cdot 10^9$  Па, плотность  $\rho = 7700$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>. Верхний конец стержня жестко закреплен, а другой свободен от нагрузок (см. рисунок 2).

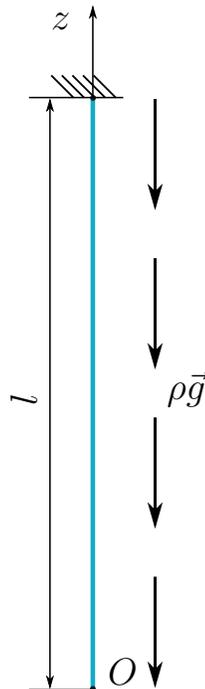


Рис. 2: Стержень под действием силы тяжести.

На основе (1.13)–(1.19) запишем постановку такой одномерной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{zz}}{dz} - \rho g = 0 \text{ или } \sigma'_{zz} - \rho g = 0, \\ u_z(l) = 0, \\ \sigma_{zz}(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где величина массовой силы  $F_z = \rho g$  называется удельным весом стержня. Следуя закону Гука, соотношение для компоненты напряжений  $\sigma_{zz}$  приведем в виде:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = E \frac{du_z}{dz} = Eu'_z.$$

Тогда постановку (2.1) можно переписать только для функции перемещения  $u_z$ :

$$\begin{cases} Eu''_z = \rho g, \\ u_z(l) = 0, \\ Eu'_z(0) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Уравнение равновесия является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка [12, 13]. Его решение может быть получено путем последовательного интегрирования или по общей формуле

$$u_z = \frac{\rho g}{2E} z^2 + C_1 z + C_2, \quad (2.3)$$

где две константы интегрирования  $C_i$  определяются из двух граничных условий

$$Eu'_z(0) = C_1 = 0, \quad u_z(l) = \frac{\rho g}{2E} l^2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Окончательно получим, что смещение изменяется по квадратичному закону

$$u_z(z) = \frac{\rho g}{2E} (z^2 - l^2). \quad (2.4)$$

Видно, что наибольшее смещение будет наблюдаться на свободной конце стержня

$$u_z^{\max} = u_z(0) = -\frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Соответствующее напряжение изменяется по убывающему линейному закону

$$\sigma_{zz}(z) = \rho g z \quad (2.5)$$

и достигает своего максимального значения в заделке

$$\sigma_{zz}^{\max} = \sigma_{zz}(0) = \rho g l.$$

Эта величина равна весу стержня ( $mg = \rho V g = \rho l S g$ ), поделенному на площадь поперечного сечения  $S$ . Т.е. в заделке создается усилие равное весу стержня, что может быть также достаточно легко получено из уравнения статики.

В листинге 1 представлен скрипт для получения численного решения рассмотренной одномерной задачи в пакете FlexPDE с помощью МКЭ. Для удобства описания области и задания формул согласно приведенному решению название оси  $Ox$ , которое используется по умолчанию, заменено на  $Oz$  с помощью команды `cartesian1 ("z")`. При этом первая производная по этой координате задается как `dz`. Сравнение полученного решения с аналитическим проведено путем построения соответствующих графиков (рис. 3) и представления численных данных. Из полученных результатов видно, что сравниваемые функции и значения совпадают с точностью, сравнимой с погрешностью вычисления.

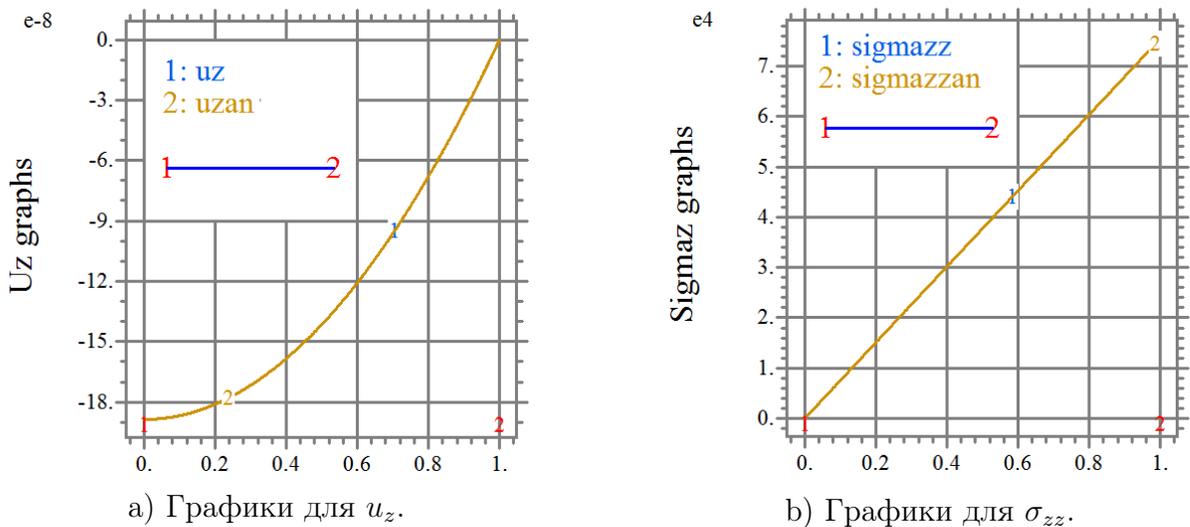


Рис. 3: Результаты расчетов для листинга 1. Численные (синие линии) и аналитические (оранжевые линии) решения.

Листинг 1: Файл (listings/Problem\_rod\_1D.pde)

```
title 'Heavy rod 1D' ! название задачи
! выбор системы координат
coordinates
cartesian1 ("z") ! 1D декартова система координат (ось z)

variables ! переменные задачи
uz ! искомая функция продольного смещения

! настройки
select
serif =on ! стиль шрифта на графиках с засечками
textsize =16

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
L=1 ! длина стержня в м
h=0.1 ! высота поперечного сечения в м
b=0.1 ! ширина поперечного сечения в м
S=b*h ! площадь поперечного сечения в м^2

E=200E9 ! модуль Юнга в Па
rho=7700 ! плотность стали кг/м^3
g=9.8 ! ускорение свободного падения м/с^2

epszz = dz ( uz ) ! продольная деформация epszz
sigmazz = E * epszz ! напряжение sigmazz

! аналитическое решение
uzan = rho * g / (2 * E) * ( z^2 - L ^2) ! для uz
sigmazzan = rho * g * z ! для sigmazz

SigmaL = rho * g * L ! значение напряжения на верхнем торце стержня
!потенциальная энергия деформации стержня
W = 0.5 * integral ( sigmazz * epszz ) * S

equations
! уравнение равновесия
dz (sigmazz) - rho * g=0
```

! построение области и задание граничных условий

boundaries

region 1 'rod'

start (0) point load(uz)=0 ! свободный конец

line to (l) point value(uz)=0 ! закрепленный конец

! построение графиков

plots

elevation (uz,uzan) penwidth = 6 as 'Uz graphs'

elevation (sigmaz, sigmazzan) penwidth = 6 as 'Sigmaz graphs'

! отдельное окно вывода численных данных

summary

report val(uz,0) ! значение  $u(L)$

report val(uzan,0) ! значение  $u_{an}(L)$

report W ! значение  $W$

end

### Задания

1. Проведите анализ влияния основных параметров задачи (модуль Юнга, плотность, длина) на функции  $u_z$ ,  $\sigma_{zz}$ .

2. Постройте численное и аналитическое решения для случая переменной плотности, изменение которой описывается одним из следующих законов:

- $\rho = 1 + \frac{z}{l}$ ;
- $\rho = 1 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2$ ;
- $\rho = 1 + e^{z/l}$ .

3. Постройте численное решение для случая неоднородного материала, свойства которого описываются непрерывной функцией  $\Psi > 0$ :

$$E = E_0\Psi(z^*), \quad \rho = \rho_0\Psi(z^*),$$

где  $z^* = z/l$ ,  $E_0$ ,  $\rho_0$  — характерные значения соответствующих величин. Для задания стержня, состоящего из двух различных частей, можно выбирать функцию  $\Psi$  в классе кусочно-постоянных. Обратите внимание на поведение решения в окрестности точки разрыва.

## 2.2 Трехмерная задача о растяжении стержня под действием силы тяжести

Рассмотрим предыдущую задачу в рамках трехмерной модели и найдем зависимость компонент поля перемещения от трех координат  $(x, y, z)$  (см. рисунок 4).

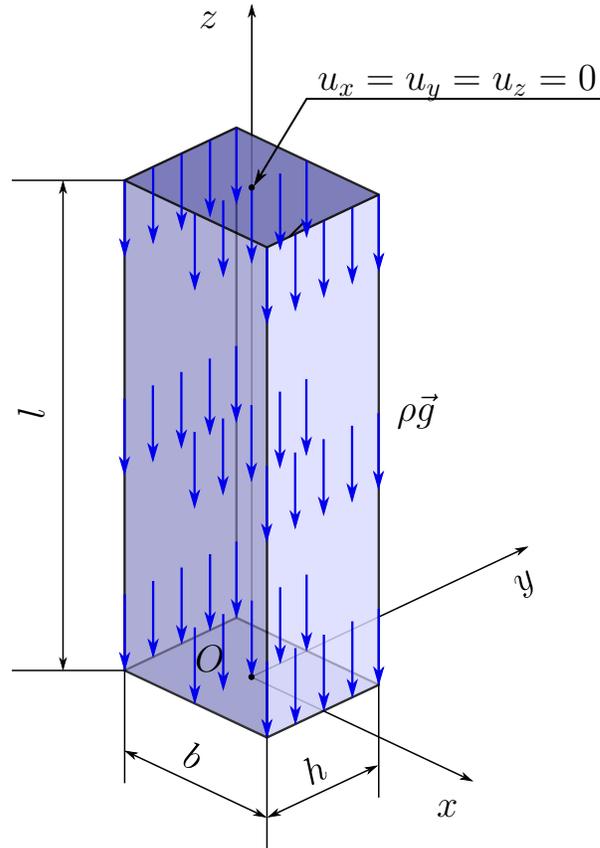


Рис. 4: Стержень под действием силы тяжести.

В этом случае уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Можно заметить, что решение, которое удовлетворяет этой системе уравнений, записывается следующим образом:

$$\sigma_{zz} = \rho g z, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (2.7)$$

При этом граничные условия для компонент симметричного тензора напряжений  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  на боковых гранях также удовлетворяются тождественно. На нижнем торце ( $z = 0$ ) выполняются условия  $\sigma_{zz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$ , описывающие отсутствие нагрузок. На верхнем торце должно выполняться условие равномерного распределения растягивающего напряжения  $\sigma_{zz} = \rho g l$ , которое, как было отмечено выше в одномерной задаче, можно получить из решения уравнения статики для рассматриваемого стержня. Также следует отметить, что решение (2.7) удовлетворяет условиям совместности для напряжений [4], которые можно получить на основе уравнений совместности деформаций (1.21)–(1.22).

Далее перейдем к построению выражений для компонент поля перемещений. Для этого для начала обратимся к закону Гука (1.25) и определяющим соотношениям компонент тензора деформаций (1.16)–(1.17):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{\rho g z}{E}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.8) путем простого интегрирования по координате  $z$  получаем общее представление для компоненты продольного смещения:

$$u_z(x, y, z) = \frac{\rho g}{2E} z^2 + u_z^0(x, y), \quad (2.11)$$

где функция  $u_z^0(x, y)$  пока остается неопределенной. Подставим (2.11) в выражения для  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  из (2.10):

$$\frac{\partial u_z^0}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Откуда

$$u_x(x, y, z) = -z \frac{\partial u_z^0}{\partial x} + u_x^0(x, y), \quad u_y(x, y, z) = -z \frac{\partial u_z^0}{\partial y} + u_y^0(x, y). \quad (2.13)$$

Подставим (2.13) в выражения для  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  из (2.9):

$$-z \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_x^0}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E}, \quad -z \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_y^0}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}. \quad (2.14)$$

Так как функции  $u_x^0$  и  $u_y^0$  зависят только от двух координат  $x$ ,  $y$ , то для выполнения равенств (2.14) необходимо принять следующие ограничения на эти функции:

$$\frac{\partial u_x^0}{\partial x} = \frac{\partial u_y^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial y^2} = \frac{\nu \rho g}{E}. \quad (2.15)$$

Подставим (2.13) в равенство для  $\varepsilon_{xy} = 0$  из (2.10), получим:

$$-2z \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Откуда аналогично, учитывая, что функции  $u_x^0$  и  $u_y^0$  зависят только от  $x$ ,  $y$ , получим дополнительные условия на них:

$$\frac{\partial^2 u_z^0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Из условий (2.15), (2.17) можно выписать общие представления для трех функций  $u_x^0$ ,  $u_y^0$ ,  $u_z^0$ :

$$u_x^0 = \delta y + \gamma_x, \quad u_y^0 = -\delta x + \gamma_y, \quad u_z^0 = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma_z, \quad (2.18)$$

где  $\delta$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — произвольные постоянные. Тогда выражения для искомых компонент поля перемещения можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= -\nu \frac{\rho g}{E} xz - \alpha z + \delta y + \gamma_x, \\
u_y(x, y, z) &= -\nu \frac{\rho g}{E} yz - \beta z - \delta x + \gamma_y, \\
u_z(x, y, z) &= \frac{\rho g}{2E} z^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma_z.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Для определения произвольных постоянных дополним граничные условия на верхнем торце стержня, которые описывают фиксацию стержня как твердого тела:

$$\begin{cases} u_x = 0, & u_y = 0, & u_z = 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, & \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, & \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = y = 0, \quad z = l. \tag{2.20}$$

Откуда получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned}
-\alpha l + \gamma_x &= 0, & -\beta l + \gamma_y &= 0, & \frac{\rho g l^2}{2E} + \gamma_z &= 0, \\
\alpha &= 0, & \beta &= 0, & \delta &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Таким образом, окончательно имеем следующее решение для компонент поля перемещения:

$$u_x = -\nu \frac{\rho g}{E} xz, \quad u_y = -\nu \frac{\rho g}{E} yz, \quad u_z = \frac{\rho g}{2E} z^2 + \nu \frac{\rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E}. \tag{2.22}$$

Следует отметить, что на оси  $Oz$  ( $x = y = 0$ ) соответствующие точки смещаются только вдоль нее по закону:

$$u_z = \frac{\rho g}{2E} z^2 - \frac{\rho g l^2}{2E} = \frac{\rho g}{2E} (z^2 - l^2). \tag{2.23}$$

Видно, что (2.23) совпадает с решением (2.4), полученным в рамках одномерной модели.

В листинге 2 представлен скрипт для получения численного решения аналогичной трехмерной задачи в пакете FlexPDE. Следует обратить внимание на описание геометрии области и граничных условий на всей поверхности объекта. Здесь в явном виде на верхнем торце использовано условие для компоненты  $\sigma_{zz} = \rho g l$ . По аналогии с одномерной задачей проведено срав-

нение полученного решения с аналитическим путем построения соответствующих трехмерных графиков функций смещения и компоненты напряжения  $\sigma_{zz}$  (рис. 5) и представления некоторых результатов расчета. Видно, что аналитическое и численное решения совпадают с точностью, сравнимой с погрешностью вычисления. Причем, численное решение для трехмерной задачи совпадает с численным решением для одномерной задачи.

Для наглядности отображения деформированной области использован параметр `scale`. Для определения его значения использованы функции `globalmax` и `magnitude`, описания которых можно найти в источнике [10] или справке FlexPDE [9]. Поскольку на всей поверхности тела заданы только напряжения, то для получения решения без учета смещений и поворотов объекта как твердого тела необходимо указать дополнительные ограничения, которые описаны с помощью интегральных выражений в разделе `constraints`, который расположен после описания геометрии и граничных условий.

Листинг 2: Файл (listings/Problem\_rod\_3D.pde)

```
title 'Heavy rod 3D'      ! название задачи
! выбор системы координат
coordinates
cartesian3      ! 3D декартова система координат (x,y,z)

! описание искомым функций
variables
  ux      ! функция смещения ux вдоль оси x
  uy      ! функция смещения uy вдоль оси y
  uz      ! функция смещения uz вдоль оси z

! системные настройки
select
serif =on      ! стиль шрифта на графиках с засечками
textsize =28
errlim =1e-5   ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
L = 0.5      ! длина стержня в м
h = 0.1      ! высота поперечного сечения в м
```

$b = 0.1$  ! ширина поперечного сечения в м  
 $S = b \cdot h$  ! площадь поперечного сечения в м<sup>2</sup>

$E = 200E9$  ! модуль Юнга в Па  
 $\nu = 0.3$  ! коэффициент Пуассона  
 $\rho = 7700$  ! плотность стали кг/м<sup>3</sup>  
 $g = 9.8$  ! ускорение свободного падения м/с<sup>2</sup>

$\mu = E / 2 / ( 1 + \nu )$  ! модуль сдвига  
 $\lambda = 2 * \mu * \nu / ( 1 - 2 * \nu )$  ! параметр Ламе

! компоненты тензора деформации

$\epsilon_{sxx} = dx ( u_x )$   
 $\epsilon_{syy} = dy ( u_y )$   
 $\epsilon_{szz} = dz ( u_z )$   
 $\epsilon_{sxy} = 0.5 * ( dy ( u_x ) + dx ( u_y ) )$   
 $\epsilon_{sxz} = 0.5 * ( dx ( u_z ) + dz ( u_x ) )$   
 $\epsilon_{syz} = 0.5 * ( dz ( u_y ) + dy ( u_z ) )$   
 $Teta = \epsilon_{sxx} + \epsilon_{syy} + \epsilon_{szz}$

! компоненты тензора напряжений

$\sigma_{maxx} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{sxx}$   
 $\sigma_{mayy} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{syy}$   
 $\sigma_{mazz} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{szz}$   
 $\sigma_{maxy} = 2 * \mu * \epsilon_{sxy}$   
 $\sigma_{maxz} = 2 * \mu * \epsilon_{sxz}$   
 $\sigma_{mayz} = 2 * \mu * \epsilon_{syz}$

! аналитическое решение

$u_{xan} = - \nu * \rho * g / E * x * z$  ! для  $u_x$   
 $u_{yan} = - \nu * \rho * g / E * y * z$  ! для  $u_y$   
 $u_{zan} = \rho * g / (2 * E) * z^2 + \nu * \rho * g / (2 * E) * (x^2 + y^2) - \rho * g / (2 * E) * L^2$  !  $u_z$   
 $\sigma_{mazzan} = \rho * g * z$  ! для  $\sigma_{maxx}$

! потенциальная энергия деформации стержня

$W = 0.5 * \text{integral} ( \sigma_{maxx} * \epsilon_{sxx} + \sigma_{mayy} * \epsilon_{syy} + \sigma_{mazz} * \epsilon_{szz} + 2 * \sigma_{maxy} * \epsilon_{sxy} + 2 * \sigma_{maxz} * \epsilon_{sxz} + 2 * \sigma_{mayz} * \epsilon_{syz} )$

! масштабный множитель для более наглядного отображения деформации

scale = 0.5\*globalmax(magnitude(x,y,z))/globalmax(magnitude(ux,uy,uz))

### equations

! уравнения равновесия

ux: dx (sigmaxx) + dy (sigmaxy) + dz (sigmaxz) = 0

uy: dx (sigmaxy) + dy (sigmayy) + dz (sigmayz) = 0

uz: dx (sigmaxz) + dy (sigmayz) + dz (sigmazz) - rho \* g = 0

### extrusion

{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"  
при построении объемной области }

z=0, L ! z = 0, z = L

### boundaries

! на нижней грани z = 0 нет нагрузок

surface 1 load (ux) = 0 load (uy) = 0 load (uz) = 0

{ на верхней грани z = L приложена  
эквивалентная нагрузка вдоль оси z }

surface 2 load (ux) = 0 load (uy) = 0 load (uz) = rho \* g \* L

{ поперечное сечение стержня  
и граничные условия на боковых поверхностях }

region 1 'rod cross section'

start (-h/2, -b/2)

load (ux) = 0 ! нет внешних нагрузок

load (uy) = 0

load (uz) = 0

line to (-h/2, b/2)

line to (h/2, b/2)

line to (h/2, -b/2)

line to close

### constraints

{ Ограничения, накладываемые для исключения  
смещений и поворотов как твердого тела }

! для удобства сравнения численного и аналитического решений

integral (uz) = integral (uzan)

integral (uy) = 0

integral (ux) = 0

integral (dz (uy) - dy (uz)) = 0

```
integral (dz (ux) - dx (uz)) = 0
integral (dx (uy) - dy (ux)) = 0
```

! построение графиков

plots

! деформированный стержень

```
grid(x+ux*scale,y+uy*scale,z+uz*scale) as "Deformed rod"
```

! деформированное сечение y=0

```
grid(x+ux*scale,z+uz*scale) on y=0 as "Rod section y=0"
```

```
surface(sigmazz) on x=0 as "Sigmazz graph"
```

```
surface( abs ( ux - uxa ) ) on x=0 as "|ux-uxa| graph"
```

```
surface(ux) on y=0 as "ux graph"
```

```
surface(uxa) on y=0 as "uxa graph"
```

```
surface( abs ( uy - uya ) ) on x=0 as "|uy-uya| graph"
```

```
surface(uy) on x=0 as "uy graph"
```

```
surface(uya) on x=0 as "uya graph"
```

```
surface( abs ( uz - uza ) ) on x=0 as "|uz-uza| graph"
```

```
surface(uz) on x=0 as "uz graph"
```

```
surface(uza) on x=0 as "uza graph"
```

! отдельное окно для вывода результатов расчета

summary

```
report val(uz,0,0,L) ! значение u(0,0,L)
```

```
report val(uza,0,0,L) ! значение u_a(0,0,L)
```

! различие значений uz(0,0,0) и uza(0,0,0)

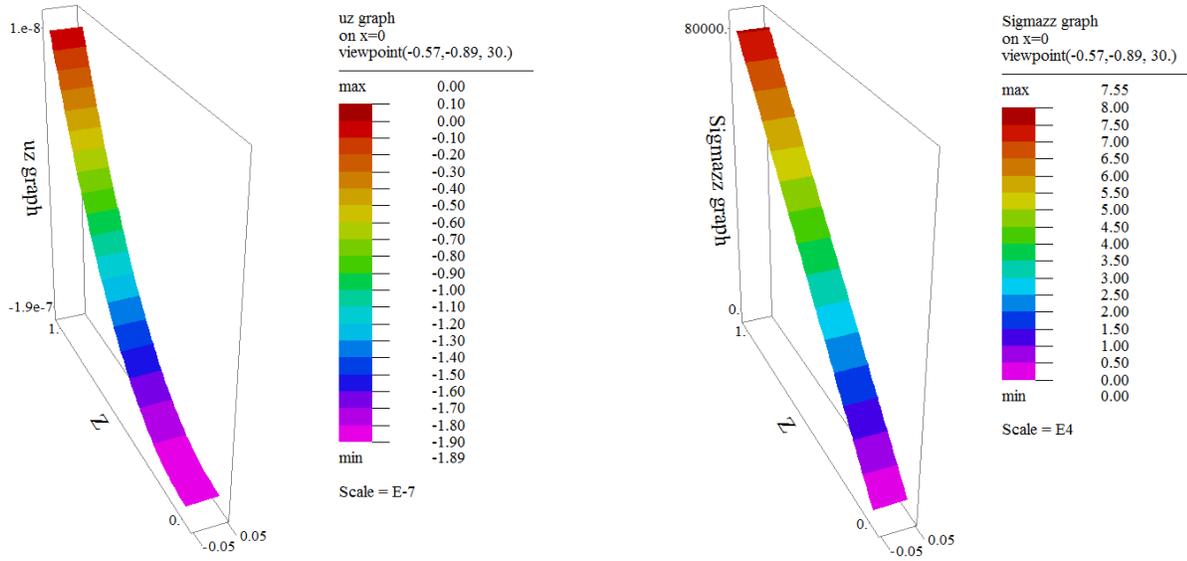
```
report val(abs ( ( uza - uz ) / uza ) * 100, 0, 0, 0)
```

! различие значений uz(0,0,0.5\*L) и uza(0,0,0.5\*L)

```
report val(abs ( ( uza - uz ) / uza ) * 100, 0, 0, 0.5*L)
```

```
report W ! потенциальная энергия
```

end



а) Компонента перемещения  $u_z$ .

б) Напряжение  $\sigma_{zz}$ .

Рис. 5: Результаты расчетов для листинга 2. Численное решение.

## Задания

1. Проверьте, как изменятся значения численного решения функции  $u_z$ , если в разделе **constraints** заменить условие  $\text{integral}(uz) = \text{integral}(uzan)$  на условие  $\text{integral}(uz) = 0$ . Используя листинг 2, рассмотрите задачу с другими граничными условиями на верхнем торце — жесткое закрепление всей плоскости  $z = l$ :  $u_x = u_y = u_z = 0$ . Проанализируйте существенно ли изменилось численное решение и в какой части области.

2. Моделирование опыта по одноосному растяжению. По заданному значению распределенной нагрузки  $p$  или смещения торца верхнего цилиндра  $\delta$  найти удлинение  $\Delta l$  линии  $AB$  длины  $l$ , находящейся на равном расстоянии от торцов внутреннего цилиндра (см. рисунок 6). Найти изменение диаметра в среднем сечении этого цилиндра  $\Delta d_2$ . Определить коэффициент Пуассона  $\nu$  из соотношения

$$\nu = \frac{\frac{\Delta d_2}{d_2}}{\frac{\Delta l}{l}}.$$

Согласно (1.7) сравнить найденное значение с величиной

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Оценить погрешность вычислений, проведенных в пакете FlexPDE.

Варианты размеров образца (см. рисунок 6) заданы в таблице 1, значения материальных параметров — таблице 2.

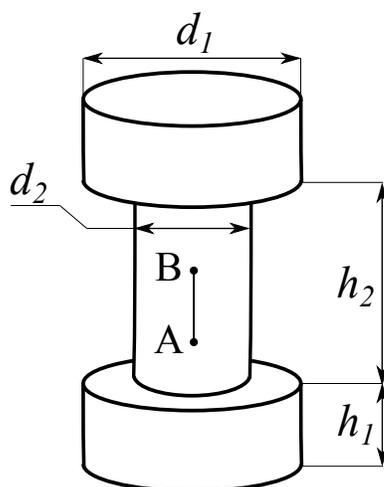


Рис. 6: Схема образца с указанием обозначений размеров

Таблица 1: Варианты размеров

№	$h_1$ , см	$h_2$ , см	$l = AB$	$d_1$ , см	$d_2$ , см
1	2.0	4.0	$h_2/2$	2.0	1.5
2	3.0	5.0	$h_2/4$	3.2	1.8
3	2.0	4.8	$h_2/4$	1.8	1.4
4	4.0	6.0	$h_2/2$	2.8	2.4
5	5.0	7.5	$h_2/3$	4.0	2.4

Таблица 2: Варианты значений параметров материалов

№	Материал	$\lambda$ , МПа	$\mu$ , МПа
1	Никель технический	$1.8 \cdot 10^5$	$9.4 \cdot 10^4$
2	Цинк технический	$3.6 \cdot 10^4$	$3.1 \cdot 10^4$
3	Латунь алюминиевая	$6.9 \cdot 10^4$	$3.9 \cdot 10^4$
4	Стекло	$2.0 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^4$
5	Оргстекло	$3.8 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^3$

Схематичные изображения одного из четырех вариантов условий нагружения и закрепления представлены на рисунке 7:

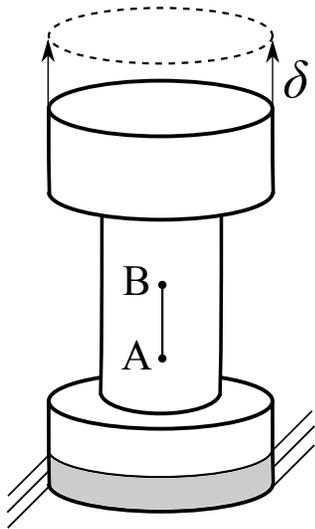
1. На верхнем торце задано вертикальное перемещение, касательные нагрузки отсутствуют. Нижняя половина боковой поверхности нижнего цилиндра жестко закреплена. Остальные части поверхности свободны от нагрузки.

2. На верхнем торце задана распределенная вертикальная нагрузка. Ниж-

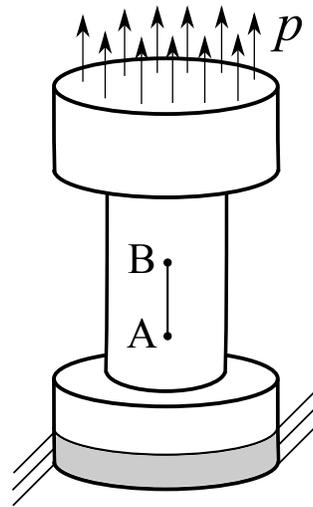
няя половина боковой поверхности нижнего цилиндра жестко закреплена. Остальные части поверхности свободны от нагрузки.

3. На верхней половине боковой поверхности задана касательная нагрузка, действующая вертикально. Боковая поверхность нижнего цилиндра жестко закреплена. Остальные части поверхности свободны от нагрузки.

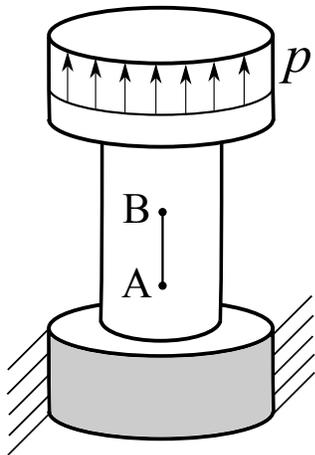
4. На верхней половине боковой поверхности задана касательная нагрузка, действующая вертикально. Нижний торец жестко закреплён. Остальные части поверхности свободны от нагрузки.



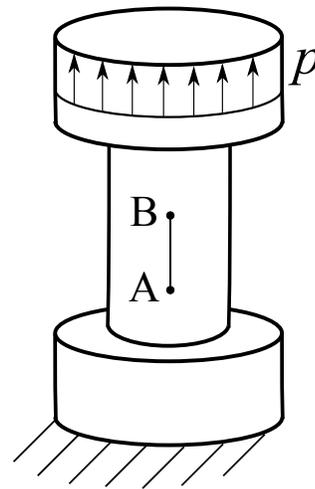
а) Первый вариант.



б) Второй вариант.



в) Третий вариант.



г) Четвертый вариант.

Рис. 7: Варианты нагружения и закрепления.

Таблица 3: Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Код	122	213	334	221	415	342	423	134	355	431	142	233
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Код	444	155	241	312	113	254	325	451	212	343	434	145

Варианты заданий даны в таблице 3, в которой код — трехзначное число означает следующее: первая цифра слева — это граничные условия, вторая цифра — вариант размеров, третья цифра — материал. Так, например, для варианта № 10 код 431 означает: граничные условия 4 — для четвертого варианта (рис. 7); вариант размеров 3 из таблицы 1 — третья строка с данными; параметры материала 1 из таблицы 2 — первая строка с данными (никель технический).

Указание. В качестве некоторого примера ниже приведен скрипт 3. С помощью него можно получить численное решение задачи о вычислении удлинения отрезка  $AB$  и изменении среднего диаметра цилиндрической части фигуры, жестко защемленной по боковой поверхности параллелепипеда (см. рисунок 8). При этом задано, что верхняя грань смещается на величину  $\delta$ .

Листинг 3: Файл (listings/Problem\_rod\_3D\_for\_tasks.pde)

```

title 'Tension 3D problem'      ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian3      ! 3D декартова система координат (x,y,z)

! описание искомым функций
variables
  ux      ! функция смещения ux вдоль оси x
  uy      ! функция смещения uy вдоль оси y
  uz      ! функция смещения uz вдоль оси z

! системные настройки
select
  serif =on ! стиль шрифта с засечками
  ngrid=6  ! ограничение размера элементов
  errlim=1e-3 ! точность расчетов

```

! задание параметров задачи и определяющих соотношений

### definitions

$$cm = 0.01 \text{ ! } 1 \text{ см} = 0.01 \text{ м}$$

$$d1 = 1.4 * cm \text{ ! сторона квадрата диаметр в м}$$

$$d2 = 1.0 * cm \text{ ! внутренний диаметр в м}$$

$$h1 = 1 * cm \text{ ! высота параллелепипеда в м}$$

$$h2 = 2 * cm \text{ ! высота цилиндра}$$

$$r1 = 0.5 * d1 \text{ ! половина стороны квадрата}$$

$$r2 = 0.5 * d2 \text{ ! радиус цилиндра}$$

$$delta = 0.1 * cm \text{ ! величина вертикального смещения верхнего торца}$$

$$\mu = 8.08e10 \text{ ! модуль сдвига в Па}$$

$$\lambda = 1.21e11 \text{ ! параметр Ламе в Па}$$

! компоненты тензора деформации

$$\epsilon_{xx} = dx ( ux )$$

$$\epsilon_{yy} = dy ( uy )$$

$$\epsilon_{zz} = dz ( uz )$$

$$\epsilon_{xy} = 0.5 * ( dy ( ux ) + dx ( uy ) )$$

$$\epsilon_{xz} = 0.5 * ( dx ( uz ) + dz ( ux ) )$$

$$\epsilon_{yz} = 0.5 * ( dz ( uy ) + dy ( uz ) )$$

$$\Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

! компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx} = \lambda * \Theta + 2 * \mu * \epsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda * \Theta + 2 * \mu * \epsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda * \Theta + 2 * \mu * \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = 2 * \mu * \epsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = 2 * \mu * \epsilon_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = 2 * \mu * \epsilon_{yz}$$

! масштабный множитель для более наглядного отображения деформации

$$scale = 0.5 * \mathit{globalmax}(\mathit{magnitude}(x,y,z)) / \mathit{globalmax}(\mathit{magnitude}(ux,uy,uz))$$

### equations

! уравнения равновесия

$$ux: dx (\sigma_{xx}) + dy (\sigma_{xy}) + dz (\sigma_{xz}) = 0$$

$$uy: dx (\sigma_{xy}) + dy (\sigma_{yy}) + dz (\sigma_{yz}) = 0$$

$$uz: dx (\text{sigmaxz}) + dy (\text{sigmayz}) + dz (\text{sigmazz}) = 0$$

### extrusion

```
{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"
при построении объемной области, и слоев между ними }
surface "bottom" z = 0 ! нижняя грань параллелепипеда
  layer "parallelepiped" ! слой параллелепипеда
surface "contact" z=h1 ! плоскость сопряжения цилиндра и параллелепипеда
  layer "cylinder" ! слой цилиндра
surface "top" z = h1 + h2 ! верхняя грань цилиндра
```

### boundaries

```
surface "bottom"
  ! нижняя грань свободна от нагрузок
  load(ux) = 0 load(uy) = 0 load(uz) = 0
surface "top"
  ! на верхней грани нет касательных нагрузок,
  load(ux) = 0 load(uy) = 0
  ! задано вертикальное перемещение точек (вдоль оси z)
  value(uz) = delta
```

region 1 { параллелепипед;

боковая поверхность закреплена — все перемещения равны нулю }

layer "parallelepiped "

{ Описывается квадрат со стороной  $d1=2*r1$  и граничные условия, которые задаются на ребрах и продолжаются на всю высоту грани. Если на грани граничные условия меняются, то необходимо создавать новый слой и задавать соответствующие условия }

```
start ( - r1, - r1 )
  value(ux) = 0
  value(uy) = 0
  value(uz) = 0
  line to ( r1, - r1 ) to ( r1, r1 ) to ( - r1, r1 ) line to close
```

region 2 { аналогично описывается контур цилиндра и граничные условия }

layer "cylinder"

void { описывается квадрат, который "вырезается" (удаляется), чтобы дальше он "не рос" при "выдавливании" нижней части }

```
start ( - r1, - r1)
  line to ( r1, - r1) to ( r1, r1) to ( - r1, r1 ) line to close
```

```

! кольцо с радиусом r2
start ( -r2, 0)
! нет нагрузок на боковой поверхности цилиндра
load(ux) = 0 load(uy) = 0 load(uz) = 0
arc(center=0,0) angle=360

! построение графиков
plots
! деформированный стержень
grid(x, y, z) as "Undeformed Shape"
grid(x + ux * scale, y + uy * scale, z + uz * scale) as "Deformed Shape"

! отдельное окно для вывода результатов расчета
summary
! изменение высоты всего цилиндра после деформации
report ( val ( uz,0, -r2, h2) - val(uz,0,-r2,h1) )
! изменение диаметра в срединном сечении цилиндра
report ( abs(val(ux,r2,0,h1+h2*0.5)) + abs(val(ux, -r2,0,h1+h2*0.5) ) )
end

```

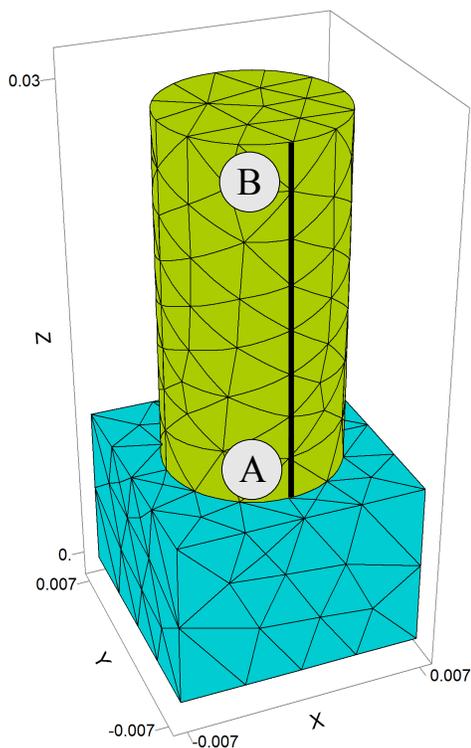


Рис. 8: Геометрия фигуры из примера для задания.

## 2.3 Задача Кирша

При исследовании напряженно-деформированного состояния объекта важно учитывать наличие областей с резкими изменениями его границы, например, малые отверстия различных форм, острые углы, надрезы, канавки, выточки, резьбы и т. п. Вблизи них обычно наблюдается существенное изменение уровня напряжений. Задача, решение которой наглядно демонстрирует такой эффект, является задача Кирша (1898) об одноосном растяжении бесконечной упругой изотропной полосы с маленьким круговым отверстием по центру [14, 15]. Для численной оценки уровня изменения напряжений обычно вводят в рассмотрение коэффициент концентрации напряжений. Его значение равно отношению максимального напряжения, которое вычисляется вблизи особенности, к номинальному напряжению, которое определяется для объекта без исследуемой особенности [8].

Аналитическое решение задачи Кирша для напряжений с учетом геометрии кругового отверстия удобно приводить в полярной системе координат [14, 15]:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}p \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \quad (2.24)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}p \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \quad (2.25)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{2}p \left[ 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi, \quad (2.26)$$

где  $p$  — величина интенсивности распределенной растягивающей нагрузки,  $a$  — радиус отверстия.

Для оценки точности численных расчетов компонент тензора напряжений по отношению к приведенным аналитическим (2.24)–(2.26) в листинге 4 представлен скрипт для построения решения похожей задачи в пакете FlexPDE для квадратной области. Для дальнейших изменений обозначим отдельно длину как  $2h$ , ширину —  $2b$ . В центре находится круговое отверстие с радиусом  $a$ . На левой и правой границе приложена нормальная распределенная растягивающая нагрузка величины  $p$  (см. рисунок 9).

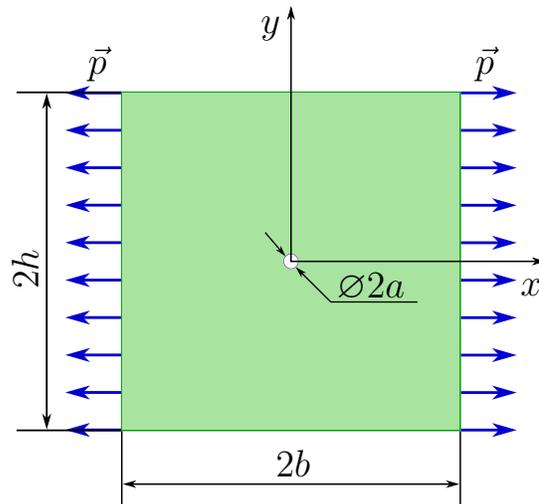


Рис. 9: Область с отверстием под действием растягивающей нагрузки.

Листинг 4: Файл (listings/Problem\_Kirsch.pde)

Title 'Kirsch problem'

coordinates

cartesian2 ! двумерная декартова система координат (x,y)

! описание искомым функций

variables

ux ! функция продольного смещения ux вдоль оси x

uy ! функция поперечного смещения uy вдоль оси y

select

ngrid=10 ! ограничение размера элементов

errlim = 1e-6 ! точность расчетов

paigned ! контурные графики с заливкой

penwidth =4 ! толщина линий во всех графических окнах

serif =on ! стиль шрифта с засечками

! задание параметров задачи и определяющих соотношений

definitions

h = 3 ! полувысота образца

b = 3 ! полуширина образца

! Радиус кругового отверстия в образце

a = 0.1

! дополнительное обозначение (расстояние)

! используется в feature и elevation

$$d = 2 * a$$

! интенсивность растягивающей нагрузки

$$p = 100$$

! параметры материала

$$\nu = 0.3 \text{ ! коэффициент Пуассона}$$

$$E = 1600 \text{ ! модуль Юнга}$$

$$\mu = E / ( 2 * ( 1 + \nu ) ) \text{ ! модуль сдвига}$$

! компоненты тензора деформации

$$\epsilon_{xx} = dx ( u_x )$$

$$\epsilon_{yy} = dy ( u_y )$$

$$\epsilon_{xy} = 0.5 * ( dy ( u_x ) + dx ( u_y ) )$$

! компоненты тензора напряжений

! для случая плоского напряженного состояния

$$\sigma_{xx} = E / ( 1 - \nu^2 ) * ( \epsilon_{xx} + \nu * \epsilon_{yy} )$$

$$\sigma_{yy} = E / ( 1 - \nu^2 ) * ( \epsilon_{yy} + \nu * \epsilon_{xx} )$$

$$\sigma_{xy} = 2 * \mu * \epsilon_{xy}$$

! переменные для удобства записи аналитического решения

! в полярной системе координат

$$\phi = \arctan ( y / x ) \text{ ! угол}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ ! радиус в квадрате } r^2$$

$$a^2 = a^2 / r^2$$

$$a^4 = a^2^2$$

! аналитическое решение задачи Кирша

$$\sigma_{rr} = 0.5 * p * ( 1 - a^2 + ( 1 - 4 * a^2 + 3 * a^4 ) * \cos ( 2 * \phi ) )$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 0.5 * p * ( 1 + a^2 - ( 1 + 3 * a^4 ) * \cos ( 2 * \phi ) )$$

$$\sigma_{r\theta} = - 0.5 * p * ( 1 + 2 * a^2 - 3 * a^4 ) * \sin ( 2 * \phi )$$

! вычисление численного решения в полярной системе координат

! на основе решения в декартовой

! при этом использованы формулы

$$\cos ( \phi ) = x / r ; \sin ( \phi ) = y / r ; \sin ( 2 \phi ) = 2 * x * y / r^2$$

$$\cos ( 2 \phi ) = ( \cos ( \phi ) )^2 - ( \sin ( \phi ) )^2 = ( x^2 - y^2 ) / r^2$$

$$\sigma_{rr\_num} = \sigma_{xx} * x^2 / r^2 + \sigma_{yy} * y^2 / r^2 +$$

$$\sigma_{xy} * 2 * x * y / r^2$$

$$\text{sigmaff\_num} = \text{sigmaxx} * y^2 / rv2 + \text{sigmayy} * x^2 / rv2 - \text{sigmaxy} * 2 * x * y / rv2$$

$$\text{sigmarf\_num} = (\text{sigmayy} - \text{sigmaxx}) * x * y / rv2 + \text{sigmaxy} * (x^2 - y^2) / rv2$$

! масштабный множитель для более наглядного отображения смещений

$$\text{scale} = 0.25 * \text{globalmax} (\text{magnitude} (x,y) ) / \text{globalmax} (\text{magnitude} (ux,uy) )$$

! координаты точек концов отрезков, для построения графиков

$$Ax = -a - d$$

$$Ay = Ax \quad ! \quad Ay = -a - d$$

$$Cx = Ax \quad ! \quad Cx = -a - d$$

$$Cy = a + d$$

$$Fx = Cy \quad ! \quad Fx = a + d$$

$$Fy = Fx \quad ! \quad Fy = a + d$$

**equations** ! уравнения равновесия для плоского напряженного состояния

$$ux: dx (\text{sigmaxx}) + dy (\text{sigmaxy}) = 0$$

$$uy: dx (\text{sigmaxy}) + dy (\text{sigmayy}) = 0$$

! ограничения на смещения и поворот объекта как

! твердого тела

**constraints**

! на перемещения

$$\text{integral} ( ux ) = 0$$

$$\text{integral} ( uy ) = 0$$

! на поворот

$$\text{integral} ( dx ( uy ) - dy ( ux ) ) = 0$$

! описание контура объекта и задание граничных условий

**boundaries**

**region 1** ! очерчивание внешней границы объекта

$$\text{start} ( -b, -h )$$

! на левой грани действует растягивающая нагрузка

! в противоположном направлении оси x

$$\text{load}(ux) = -p$$

$$\text{load}(uy) = 0$$

**line to** ( -b, h ) ! на верхней грани нет нагрузок

$$\text{load}(ux) = 0$$

$$\text{load}(uy) = 0$$

```

line to ( b, h )
! на правой грани действует растягивающая нагрузка
! сонаправленная с осью x
load(ux) = p
load(uy) = 0
line to ( b, -h ) ! на нижней грани нет нагрузок
load(ux) = 0
load(uy) = 0
line to close
! контур кругового отверстия
! внутри нет нагрузок
start ( 0, a )
load(ux) = 0
load(uy) = 0
arc ( center = 0, 0 ) angle = -360
! линия в виде окружности вокруг малого отверстия
! для удобства построения графиков
feature 'around'
start ( 0, a + d )
arc ( center = 0, 0 ) angle = -360
! построение деформированной области
! в процесс вычислений
monitors
grid ( x + ux * scale , y + uy * scale ) as "Deformed object"

! построение графиков
plots
! недеформированный объект
grid ( x, y ) as "Undeformed object"
! деформированный объект
grid ( x + ux * scale , y + uy * scale ) as "Deformed object"
! графики значений всех напряжений вдоль линий
elevation ( sigmaxx, sigmayy, sigmaxy ) from ( Ax, Ay ) to ( Cx, Cy )
as "Stress graphs on AC"
elevation ( sigmaxx, sigmayy, sigmaxy ) from ( Cx, Cy ) to ( Fx, Fy )
as "Stress graphs on CF"
! графики численного и аналитических решений для напряжений,
! построенные вдоль линий
! радиальные
elevation ( sigmarr_num, sigmarr ) from ( Ax, Ay ) to ( Cx, Cy )

```

```

    as "Sigmarr graphs on AC"
elevation ( sigmarr_num, sigmarr ) from ( Cx, Cy ) to ( Fx, Fy )
    as "Sigmarr graphs on CF"
elevation ( sigmarr_num, sigmarr ) from ( a, 0 ) to ( b, 0 )
    as "Sigmarr graphs on line "
! тангенциальные
elevation ( sigmaff_num, sigmaff ) from ( Ax, Ay ) to ( Cx, Cy )
    as "Sigmaff graphs on AC"
elevation ( sigmaff_num, sigmaff ) from ( Cx, Cy ) to ( Fx, Fy )
    as "Sigmaff graphs on CF"
elevation ( sigmaff_num, sigmaff ) from ( a, 0 ) to ( b, 0 )
    as "Sigmaff graphs on line "
! касательные
elevation ( sigmarf_num, sigmarf ) from ( Ax, Ay ) to ( Cx, Cy )
    as "Sigmarf graphs on AC"
elevation ( sigmarf_num, sigmarf ) from ( Cx, Cy ) to ( Fx, Fy )
    as "Sigmarf graphs on CF"
! графики напряжений на окружности, в центре которо расположено
! малое отверстие
elevation ( sigmaxx ) on 'around' as "Sigmaxx graph on around"
elevation ( sigmayy ) on 'around' as "Sigmayy graph on around"
elevation ( sigmaxy ) on 'around' as "Sigmaxy graph on around"
! двумерные контурные графики напряжений, включая
! увеличенные фрагменты вблизи отверстия
! напряжение sigmaxx
contour ( sigmaxx ) as "Sigmaxx graph"
contour ( sigmaxx ) as "Sigmaxx graph zoom"
    zoom ( - 2 * a, - 2 * a , 4 * a, 4 * a )
! напряжение sigmayy
contour ( sigmayy ) as "Sigmayy graph"
contour ( sigmayy ) as "Sigmayy graph zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )
! напряжение sigmaxy
contour(sigmaxy ) as "Sigmaxy graph"
contour(sigmaxy ) as "Sigmaxy graph zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )
! увеличенные фрагменты графиков напряжений в полярной системе
! координат, соответствующие численному и аналитическому решениям
! вблизи отверстия
! радиальные

```

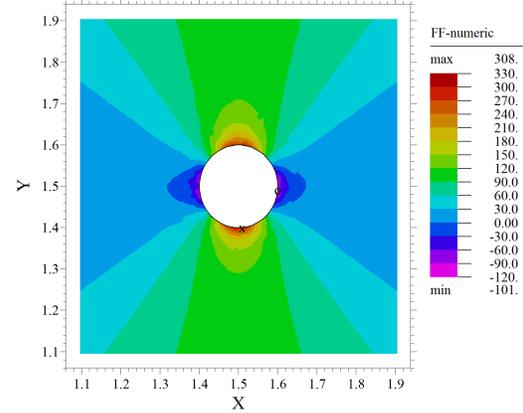
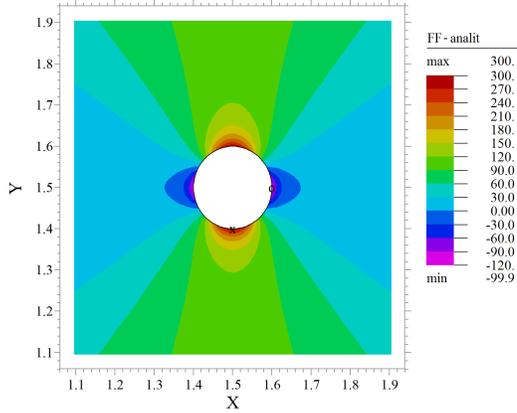
```

contour(sigmarr) as "Analit sigmarr zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )
contour(sigmarr_num) as "Numeric sigmarr zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )
! тангенциальные
contour(sigmaff) as "Analit sigmaff zoom"
    zoom ( -4 * a, -4 * a, 8 * a, 8 * a )
contour(sigmaff_num) as "Numeric sigmarf zoom"
    zoom ( -4 * a, -4 * a, 8 * a, 8 * a )
! касательные
contour(sigmarf) as "Analit sigmarf zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )
contour(sigmarf_num) as "Numeric sigmarf zoom"
    zoom ( -3 * a, -3 * a, 6 * a, 6 * a )

! отдельное окно для вывода результатов расчета
summary
    ! интегральные значения напряжений в полярной системе координат
    ! на окружности, в центре которой находится малое отверстие
    report line_integral (sigmaff_num, 'around' )
    report line_integral (sigmaff, 'around' )
    report line_integral (sigmarr_num, 'around' )
    report line_integral (sigmarr, 'around' )
    ! аналогично для напряжений в декартовой системе координат
    report line_integral (sigmaxx, 'around' )
    report line_integral (sigmayy, 'around' )
    report line_integral (sigmaxy, 'around' )
end

```

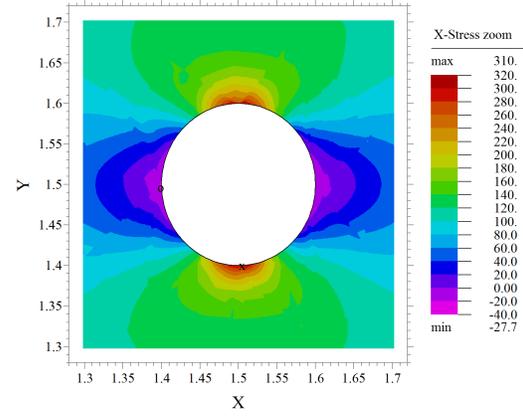
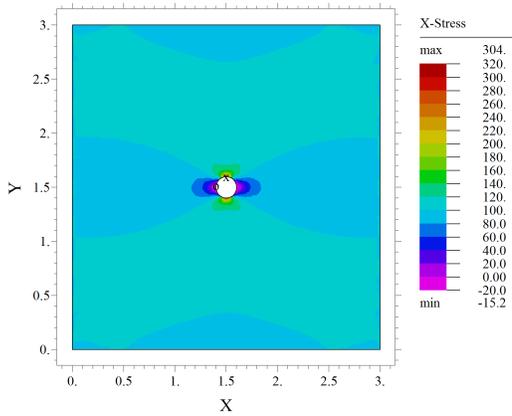
Следует отметить, что в окрестности рассматриваемого концентратора в виде маленького отверстия наблюдается существенное изменение напряженно-деформированного состояния. На рисунке 10, в качестве примера, представлены распределения напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  для аналитического и численного решений вблизи отверстия. Коэффициент напряжений вычисляется в данном случае для аналитического решения по формуле  $k = (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max}/p = 3$ ; легко убедится, что и для численного решения  $k$  приблизительно равен трем. На рисунке 11 представлены графики компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  на всей области и для наглядности в окрестности отверстия.



а)  $\sigma_{\varphi\varphi}$  аналитическое решение.

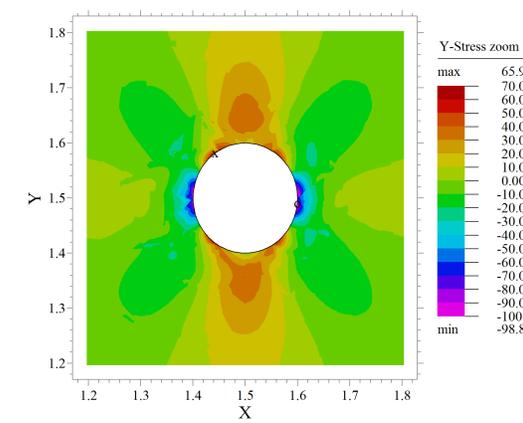
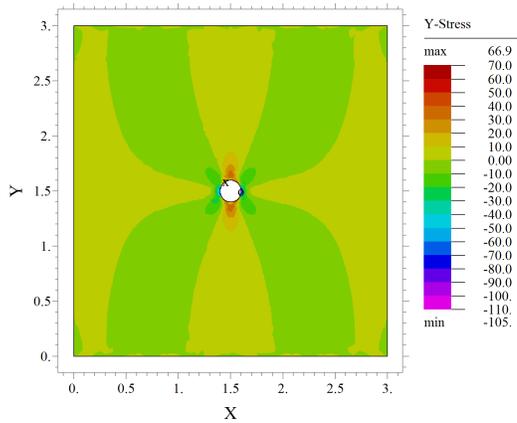
б)  $\sigma_{\varphi\varphi}$  численное решение.

Рис. 10: Графики напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  в области отверстия (листинг 4).



а) Напряжение  $\sigma_{xx}$ .

б)  $\sigma_{xx}$  в области концентратора.



в) Напряжение  $\sigma_{yy}$ .

г)  $\sigma_{yy}$  в области концентратора.

Рис. 11: Графики напряжений, построенные на основе расчетов для задачи о растяжении квадратной области с круговым отверстием (листинг 4).

## 2.4 Задания к задаче о растяжении области, ослабленной круговым отверстием

Рассматривается одноосное растяжение прямоугольной области, ослабленной центральным круговым отверстием. Заданы геометрические размеры (высота  $2h$  и ширина  $2b$ ), величина растягивающей нагрузки  $p$ , параметры изотропного упругого материала (модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , радиус отверстия  $a$ ).

**Задание 1.** Определите напряженно-деформированное состояние в зависимости от:

- 1) величины приложенной силы;
- 2) размеров области;
- 3) размеров отверстия;
- 4) изменения формы отверстия с квадратной на круглую (используйте команду `fillet` [9, 10]);
- 5) размеров укрепляющего кольца на отверстии;
- 6) параметров материала укрепляющего кольца на отверстии.

Для формирования кольца на отверстии из другого материала необходимо в разделе `boundaries` создать вторую область со следующими командами:

```
region 2 ! Кольцо из другого материала
nu = 0.49 ! коэффициент Пуассона (для резины)
E = 1060 ! модуль Юнга (для резины)
start (0, -a)
arc(center=0,0) angle=-360
load(ux) = 0
load(uy) = 0
start (0, -a-d)
arc(center=0,0) angle=-360
```

Для изменения параметров задачи из определенного набора значений используйте технологию `stage` [9, 11]. При этом для наглядности можно строить графики характеристик напряженно-деформированного состояния в зависимости от параметра, изменяющегося в `stage` для точек, близких к концентратору напряжений. В качестве образца используйте скрипт, описанный в листинге 5.

Листинг 5: Файл (listings/Problem\_Kirsch\_Task.pde)

Title 'Problem\_Kirsch\_Task'

coordinates

cartesian2 ! двумерная декартова система координат (x,y)

! описание искомых функций

variables

ux ! функция продольного смещения ux вдоль оси x

uy ! функция поперечного смещения uy вдоль оси y

select

errlim = 1e-4 ! точность расчетов

painted ! контурные графики с заливкой

! количество запусков скрипта

! позже определяется нагрузка, которая меняется для каждого запуска

stages = 3

!ngrid=1 ! опционально — ограничение размера элементов

! опционально — отключение автоматического перехода к следующему

! запуску скрипта

!autostage = off

! задание параметров задачи и определяющих соотношений

definitions

h = 0.5 ! полувысота образца

b = 1.5 ! полуширина образца

! Радиус кругового отверстия в образце

a = 0.3

! дополнительное обозначение (расстояние)

! используется в feature и elevation

d = 0.05

! абсцисса сечения

x0 = 2 \* a

! Растягивающая нагрузка

p=1

! коэффициент увеличения нагрузки в stage

k=0.1

!параметры материала  
nu = 0.3 ! коэффициент Пуассона  
E = 1600 ! модуль Юнга  
mu = E / ( 2 \* ( 1 + nu ) ) ! модуль сдвига

! компоненты тензора деформации  
epsxx = dx ( ux )  
epsyy = dy ( uy )  
epsxy = 0.5 \* ( dy ( ux ) + dx ( uy ) )

! компоненты тензора напряжений  
! для случая плоского напряженного состояния  
sigmaxx = E / ( 1 - nu ^ 2 ) \* ( epsxx + nu \* epsyy )  
sigmayy = E / ( 1 - nu ^ 2 ) \* ( epsyy + nu \* epsxx )  
sigmaxy = 2 \* mu \* epsxy

! масштабный множитель для более наглядного отображения смещений  
scale = 0.25 \* globalmax ( magnitude ( x,y ) ) / globalmax ( magnitude ( ux,uy ) )

equations ! уравнения равновесия для плоского напряженного состояния  
ux: dx ( sigmaxx ) + dy ( sigmaxy ) = 0  
uy: dx ( sigmaxy ) + dy ( sigmayy ) = 0

! описание контура объекта и задание граничных условий  
boundaries

region 1 ! очерчивание внешней границы объекта

start ( -b, -h )

! на левой грани реализовано условие жесткой заделки

value(ux) = 0

value(uy) = 0

line to ( -b, h ) ! на верхней грани нет нагрузок

load(ux) = 0

load(uy) = 0

line to ( b, h )

! на правой грани действует растягивающая нагрузка

! сонаправленная с осью x,

! увеличиваем нагрузку для очередного запуска скрипта

load(ux) = p + k \* stage

load(uy) = 0

```
line to ( b, -h ) ! на нижней грани нет нагрузок
load(ux) = 0
load(uy) = 0
line to close
```

```
! контур кругового отверстия
! внутри нет нагрузок
start ( 0, a )
load(ux) = 0
load(uy) = 0
arc ( center = 0, 0 ) angle = -360
```

```
! линия в виде окружности вокруг малого отверстия
! для удобства построения графиков
feature 'around'
start ( 0, a + d )
arc ( center = 0, 0 ) angle = -360
```

```
! вертикальный отрезок
feature 'Line'
start ( x0, -h ) line to ( x0, h )
```

```
! построение графиков
```

```
plots
```

```
! недеформированный объект
```

```
grid ( x, y ) as "Undeformed object"
```

```
! деформированный объект
```

```
grid ( x + ux * scale , y + uy * scale ) as "Deformed object"
```

```
vector( ux, uy ) as "Displacement vector" mesh points=30 !вектор перемещений
```

```
! контурные графики
```

```
contour(ux) as "Ux-Displacement" ! перемещение по вдоль оси x
```

```
contour(uy) as "Uy-Displacement" ! перемещение по вдоль оси y
```

```
contour(sigmaxx) as "sigmaxx graph" ! напряжение sigmaxx
```

```
contour(sigmayy) as "sigmayy graph" ! напряжение sigmayy
```

```
! трехмерные графики напряжений
```

```
surface(sigmaxx) as "sigmaxx graph" ! напряжение sigmaxx
```

```
surface(sigmayy) as "sigmayy graph" ! напряжение sigmayy
```

```
! одномерные графики напряжений на резке и окружности
```

```

! с увеличенной толщиной линии
elevation (sigmaxx) on 'Line' penwidth=6
    as "sigmaxx graph on Line"
elevation (sigmaxx) on 'around' penwidth=6
    as "sigmaxx graph on around"
elevation (sigmayy) on 'Line' penwidth=6
    as "sigmayy graph on line"
elevation (sigmayy) on 'around' penwidth=6
    as "sigmayy graph on around"

! вывод результатов расчетов в виде графиков
! при очередном запуске в рамках цикла stage
histories
    ! значения напряжений в точке
    history (sigmaxx) at ( 0, 0 -a -d)
    history (sigmayy) at ( 0, 0 -a -d)
    ! значения деформаций в точке
    history (epsxx) at ( 0, 0 -a -d)
    history (epsyy) at ( 0, 0 -a -d)
    history (epsxy) at ( 0, 0 -a -d)
    ! значения компонент вектора перемещений в точке
    history (ux) at ( 0, 0 -a -d)
    history (uy) at ( 0, 0 -a -d)
end

```

**Задание 2.** Исследуйте с помощью опции `stage`, как меняется напряженно-деформированное состояние в зависимости от значений следующих параметров:

- 1) модуль Юнга  $E$ ;
- 2) коэффициент Пуассона  $\nu$ ;
- 3) модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

Для изменения модуля Юнга в скрипте, например, в разделе `definitions` определите величину  $E$  по правилу:

$$n = 100$$

$$E = 1000 + n * \text{stage}$$

При этом следует в предшествующем разделе `select` задать значение параметра `stage`.

**Задание 3.** Исследуйте, как меняется напряженно-деформированное состояние, если строить численное решение задачи в трехмерной постановке. Сравните основные результаты с двумерным случаем. На сколько процентов отличаются решения? В качестве образца используйте скрипт, представленный в листинге 6. Здесь искомыми функциями являются три компоненты вектора перемещений  $(u_x, u_y, u_z)$ . Численное решение строится для системы дифференциальных уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат.

Листинг 6: Файл (listings/Problem\_Kirsch\_Task\_3D.pde)

```
Title 'Problem_Kirsch_Task_3D' ! название задачи

!выбор системы координат
coordinates
cartesian3 !3D декартовая система координат (x,y,z)

! описание искоемых функций
! компоненты вектора перемещения
variables
  ux ! функция смещения ux вдоль оси x
  uy ! функция смещения uy вдоль оси y
  uz ! функция смещения uz вдоль оси z

!системные настройки
select
errlim = 1e-1 !точность расчетов
painted ! контурные графики с заливкой
! количество запусков скрипта
! позже определяется нагрузка, которая меняется для каждого запуска
stages = 3
ngrid=1 ! опционально — ограничение размера элементов
! опционально — отключение автоматического перехода к следующему
! запуску скрипта
!autostage = off

!задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
h = 0.5 ! полувысота образца
```

$b = 1.5$  ! полуширина образца  
 $c = 0.25$  ! половина толщины образца  
! Радиус кругового отверстия в образце

$a = 0.3$   
! дополнительное обозначение (расстояние)  
! используется в feature и elevation

$d = 2 * a$   
! абсцисса сечения  
 $x0 = 2 * a$

! растягивающая нагрузка  
 $p = 1$   
! коэффициент увеличения нагрузки в stage  
 $k = 0.1$

$\nu = 0.3$  ! Коэффициент Пуассона  
 $E = 1600$  ! модуль Юнга  
 $\mu = E / 2 / ( 1 + \nu )$  !модуль сдвига  
 $\lambda = 2 * \mu * \nu / ( 1 - 2 * \nu )$  !параметр Ламе

!компоненты тензора деформации  
 $\epsilon_{sxx} = dx ( ux )$   
 $\epsilon_{syy} = dy ( uy )$   
 $\epsilon_{szz} = dz ( uz )$   
 $\epsilon_{sxy} = 0.5 * ( dy ( ux ) + dx ( uy ) )$   
 $\epsilon_{sxz} = 0.5 * ( dx ( uz ) + dz ( ux ) )$   
 $\epsilon_{syz} = 0.5 * ( dz ( uy ) + dy ( uz ) )$   
 $Teta = \epsilon_{sxx} + \epsilon_{syy} + \epsilon_{szz}$

!компоненты тензора напряжений  
 $\sigma_{maxx} = \lambda * Teta + 2*\mu*\epsilon_{sxx}$   
 $\sigma_{mayy} = \lambda * Teta + 2*\mu*\epsilon_{syy}$   
 $\sigma_{mazz} = \lambda * Teta + 2*\mu*\epsilon_{szz}$   
 $\sigma_{maxy} = 2 * \mu * \epsilon_{sxy}$   
 $\sigma_{maxz} = 2 * \mu * \epsilon_{sxz}$   
 $\sigma_{mayz} = 2 * \mu * \epsilon_{syz}$

!масштабный множитель для более наглядного отображения деформации  
 $scale = 0.05 * \mathit{globalmax}(\mathit{magnitude}(x, y, z )) / \mathit{globalmax}(\mathit{magnitude}(ux, uy, uz))$

## equations

!уравнения равновесия

$$u_x: dx(\sigma_{maxx}) + dy(\sigma_{maxy}) + dz(\sigma_{maxz}) = 0$$

$$u_y: dx(\sigma_{maxy}) + dy(\sigma_{mayy}) + dz(\sigma_{mayz}) = 0$$

$$u_z: dx(\sigma_{maxz}) + dy(\sigma_{mayz}) + dz(\sigma_{mazz}) = 0$$

## extrusion

{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"  
при построении объемной области }

surface "bottom" z = -c ! нижняя грань

layer "plate" ! один слой

surface "top" z = c ! верхняя грань

! описание контура объекта и задание граничных условий

## boundaries

! везде используется условие по умолчанию для  $u_z$  в виде  $load(u_z) = 0$

region 1 ! очерчивание внешней границы объекта

start ( -b, -h )

! на левой грани реализовано условие жесткой заделки

value( $u_x$ ) = 0

value( $u_y$ ) = 0

line to ( -b, h ) ! на верхней грани нет нагрузок

load( $u_x$ ) = 0

load( $u_y$ ) = 0

line to ( b, h )

! на правой грани действует растягивающая нагрузка

! сонаправленная с осью x,

! увеличиваем нагрузку для очередного запуска скрипта

load( $u_x$ ) = p + k \* stage

load( $u_y$ ) = 0

line to ( b, -h ) ! на нижней грани нет нагрузок

load( $u_x$ ) = 0

load( $u_y$ ) = 0

line to close

! контур кругового отверстия

! внутри нет нагрузок

start ( 0, a )

load( $u_x$ ) = 0

load( $u_y$ ) = 0

arc ( center = 0, 0 ) angle = -360

```

! построение графиков
plots
! недеформированный объект
grid( x, y, z ) as "Undeformed object"
! деформированный объект
grid( x+ux*scale, y+uy*scale, z+uz*scale ) as "Deformed object"
! Сечение при z = 0
grid( x, y ) on z = 0
! деформированная форма сечения
grid( x+ux*scale, y+uy*scale ) on z = 0
! поле перемещений на сечении z = 0
vector( ux, uy ) on z = 0 as "Displacement (ux, uy) on z=0" mesh points = 30
! график функции ux на сечении z = 0
contour( ux ) on z = 0 as "Ux graph on z=0"
! график функции uy на сечении z = 0
contour( uy ) on z = 0 as "Uy graph on z=0"
! график функции напряжения sigma_xx на сечении z = 0
contour( sigma_xx ) on z = 0 as "Sigma_xx graph on z=0"
! график функции напряжения sigma_yy на сечении z = 0
contour( sigma_yy ) on z = 0 as "Sigma_yy graph on z=0"
end

```

**Задача 4.** На примере листинга 5 проверьте принцип Сен-Венана. Для этого используйте несколько видов эквивалентных нагрузок и рассмотрите количественные характеристики напряженно-деформированного состояния для сечений вблизи приложенной нагрузки и вдали от нее.

Например, на левой грани  $x = -b$ ,  $y \in [-h, h]$  опишите жесткую заделку  $\text{value}(u_x) = 0$   $\text{value}(u_y) = 0$ . На правой  $x = b$  задайте различные законы изменения статически эквивалентных растягивающих продольных нагрузок  $p_1(y)$  или  $p_2(y)$ . Для проверки равенства между собой в интегральном смысле воспользуйтесь формулой

$$\int_{-h}^h p_1(y) dy = \int_{-h}^h p_2(y) dy.$$

Для вычисления интеграла от сосредоточенной нагрузки  $p_*$ , приложенной в

точке  $y_0$ , можно воспользоваться  $\delta$ -функцией Дирака и ее свойством:

$$\int_{-h}^h p(y)\delta(y - y_0)dy = p(y_0) = |p = const = p_*| = p_*.$$

Интегральное значение нагрузки задачи Кирша  $\int_{-h}^h p dy = 2ph$  (см. рисунок 9), тогда для одной эквивалентной ей сосредоточенной растягивающей нагрузки в точке  $(b, 0)$  ее величина будет равна  $p_* = 2ph$ . Для  $n$  штук одинаковых равноотстоящих и симметрично расположенных относительно продольной оси  $Ox$  соответственно имеем  $p_* = 2ph/n$ .

Приведем измененный фрагмент скрипта 5 для задания сосредоточенной растягивающей силы, приложенной в середине правой стороны образца:

```

region 1 ! очерчивание внешней границы объекта
start ( -b, -h )
! на левой грани реализовано условие жесткой заделки
value(ux) = 0
value(uy) = 0
line to ( -b, h ) ! на верхней грани нет нагрузок
load(ux) = 0
load(uy) = 0
line to ( b, h )
load(ux) = 0
load(uy) = 0
line to ( b, 0 )
! сосредоточенная в точке (b,0) растягивающая
! эквивалентная нагрузка,
! сонаправленная с осью x,
! k * stage используется для изменения величины нагрузки
! в цикле для stage
point load(ux)=( p + k * stage ) * 2 * h
load(uy)=0
line to ( b, -h ) ! на нижней грани нет нагрузок
load(ux) = 0
load(uy) = 0
line to close
! далее без изменений в листинге

```

## 2.5 Кручение круглого вала

Решение задачи о вращении валов имеет широкое приложение в технических устройствах и механизмах, в которых используется перенос вращательного движения. В качестве примера можно привести различные виды коробок передач, которые используются в современных автомобилях: роботизированная, автоматическая, вариатор, механическая. Рассмотрим кручение круглого сплошного вала [4], изготовленного из изотропного упругого материала. Его высота равна  $h$ , внешний радиус  $R$ . Нижний торец жестко закреплен, на верхнем действует крутящий момент  $M_{кр}$  (см. рисунок 12).

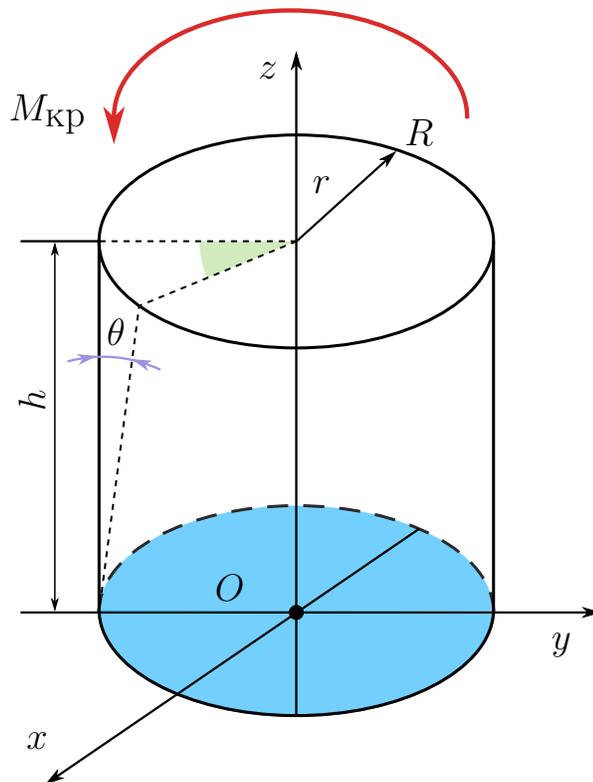


Рис. 12: Круглый вал под действием крутящего момента.

В этом случае касательное напряжение  $\tau$  в каждой точке поперечного сечения направлено перпендикулярно к радиусу и изменяется по линейному закону:

$$\tau = \mu\theta r, \quad (2.27)$$

здесь  $\theta$  — относительный угол закручивания (угол закручивания на единицу длины стержня). Для наглядности пример распределения представлен на рисунке 13.

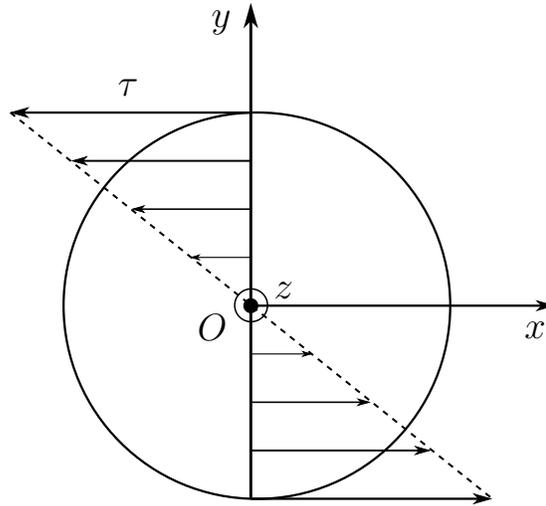


Рис. 13: Распределение касательных напряжений.

Выражения для касательных компонент тензора напряжения записываются в виде (см. рисунок 14):

$$\sigma_{yz} = \tau \frac{x}{r} = \mu \theta r \frac{x}{r} = \mu \theta x, \quad \sigma_{xz} = -\tau \frac{y}{r} = -\mu \theta r \frac{y}{r} = -\mu \theta y. \quad (2.28)$$

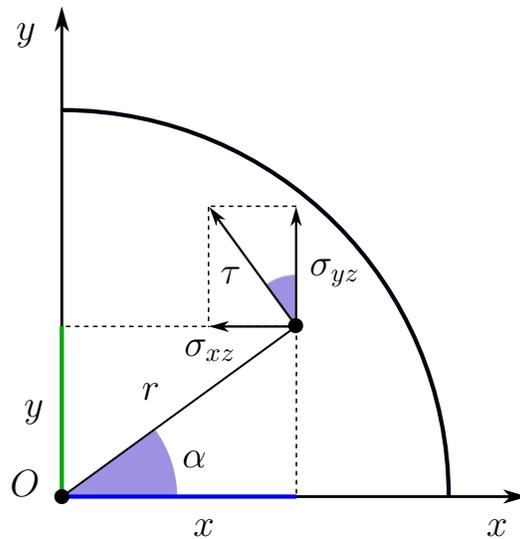


Рис. 14: Касательные напряжения ( $\cos \alpha = x/r$ ,  $\sin \alpha = y/r$ ).

В качестве решения для остальных компонент в случае некоторых видов граничных условий можно использовать следующие:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0. \quad (2.29)$$

При отсутствии массовых сил представления (2.28)–(2.29) удовлетворяют всем трем уравнениям равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Поскольку боковая поверхность ( $z \in [0, h]$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$ ) свободна от нагрузок  $\vec{P} = 0$ , то соответствующее граничное условие (1.9) можно записать в виде

$$\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx} = 0, \\ n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy} = 0, \\ n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

В силу того, что поперечное сечение является круглым, то представления компонент нормали  $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$  на этой поверхности записываются следующим образом

$$n_x = \frac{x}{r}, \quad n_y = \frac{y}{r}, \quad n_z = 0. \quad (2.32)$$

С учетом выражений (2.29) и (2.32) в (2.31) останется только одно условие, остальные выполняются тождественно:

$$n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} = 0, \quad (2.33)$$

которое с учетом (2.28) также удовлетворяется

$$n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} = -\frac{x}{r} \mu \theta y + \frac{y}{r} \mu \theta x = 0.$$

В случае поперечного сечения, отличного от кругового, для которого не справедливы представления для  $n_x$ ,  $n_y$  из (2.32), условие (2.33) не выполнится. Поэтому нельзя использовать предложенное решение (2.28)–(2.29).

Из решения для компонент тензора напряжений можно получить выражения для компонент вектора перемещения:

$$u_x = -\theta yz, \quad u_y = \theta xz, \quad u_z = 0. \quad (2.34)$$

Отсюда видно, что поперечные сечения остаются плоскими ( $u_z = 0$ ), а радиусы — прямыми.

В листинге 7 представлен скрипт для получения численного решения трехмерной задачи о кручении круглого вала в пакете FlexPDE. Нижний торец жестко закреплен, а на верхнем действует крутящий момент  $M_{\text{кр}}$ , величина которого считается известной. Для круглого поперечного сечения связь между углом  $\theta$  и величиной  $M_{\text{кр}}$  [4] определяется по формуле:

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{\mu J_p}, \quad (2.35)$$

где величина  $J_p$  называется полярным моментом инерции и определяется по правилу

$$J_p = \int_S r^2 ds = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^4, \quad (2.36)$$

где  $S = \{(r, \varphi) \in R^2 | r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi]\}$  — площадь поперечного сечения. Следует обратить внимание на описание области и граничных условий на всей поверхности объекта. На нижнем торце задано жесткое закрепление

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0.$$

На боковой поверхности отсутствуют нагрузки (естественное условие), что описывается с помощью следующих команд

$$\text{load}(u_x) = 0 \quad \text{load}(u_y) = 0 \quad \text{load}(u_z) = 0$$

На верхнем торце в явном виде записано условие для напряжений. Значения соответствующих касательных напряжений для рассматриваемого круглого поперечного сечения, связаны по известному правилу (см. (2.28) и (2.35)) с заданным значением крутящего момента

$$\sigma_{zx} = -y \frac{M_{\text{кр}}}{J_p}, \quad \sigma_{zy} = x \frac{M_{\text{кр}}}{J_p}.$$

Нормальное напряжение  $\sigma_{zz} = 0$ . Для сравнения численного и аналитических решений построены графики. Видно, что аналитическое и численное решения для перемещений совпадают с точностью, сравнимой с погрешностью вычисления. Из графиков для касательных напряжений на сечениях видно, что они действительно изменяются по соответствующим линейным законам. Для наглядности отображения деформированной области, как и в трехмерной задаче о растяжении стержня, использован параметр `scale`.

Листинг 7: Файл (listings/Problem\_torsion\_rod\_3D.pde)

```

title 'Torsion 3D problem'      ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian3      ! 3D декартова система координат (x,y,z)

! описание искомым функций
variables
  ux      ! функция смещения ux вдоль оси x
  uy      ! функция смещения uy вдоль оси y
  uz      ! функция смещения uz вдоль оси z

! системные настройки
select
  serif = on ! стиль шрифта с засечками
  ngrid = 5 ! ограничение размера элементов
  erlim = 1e-5 ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
  cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
  d = 2.0 * cm ! диаметр цилиндрического стержня в м
  h = 5.0 * cm ! высота стержня в м
  r = 0.5 * d ! радиус стержня

  E = 200E9 ! модуль Юнга в Па
  nu = 0.3      ! коэффициент Пуассона
  mu = E/2/(1+nu) ! модуль сдвига
  lam = 2*mu*nu/(1-2*nu) ! параметр Ламе

```

$M_z = 100$  ! крутящий момент Н\*м

$J_p = \rho_i * r^4 / 2$  ! полярный момент инерции для круглого сечения

! угол закручивания отнесенный к единице длины стержня

$$\eta = M_z / ( J_p * \mu )$$

$u_{xan} = -\eta * y * z$  ! аналитическое решение для компоненты  $u_x$

$u_{yan} = \eta * x * z$  ! аналитическое решение для компоненты  $u_y$

! аналитические решения для компонент напряжений

$$\sigma_{maxz} = -\mu * \eta * y$$

$$\sigma_{mayz} = \mu * \eta * x$$

! координаты точек на нижнем и верхнем торцах стержня

$$x_b = r * \cos ( \rho_i / 6 )$$

$$y_b = r * \sin ( \rho_i / 6 )$$

$$z_b = 0$$

$$x_{top} = x_b$$

$$y_{top} = y_b$$

$$z_{top} = h$$

! компоненты тензора деформации

$$\epsilon_{sxx} = dx ( u_x )$$

$$\epsilon_{syy} = dy ( u_y )$$

$$\epsilon_{szz} = dz ( u_z )$$

$$\epsilon_{sxy} = 0.5 * ( dy ( u_x ) + dx ( u_y ) )$$

$$\epsilon_{sxz} = 0.5 * ( dx ( u_z ) + dz ( u_x ) )$$

$$\epsilon_{syz} = 0.5 * ( dz ( u_y ) + dy ( u_z ) )$$

$$Teta = \epsilon_{sxx} + \epsilon_{syy} + \epsilon_{szz}$$

! компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{maxx} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{sxx}$$

$$\sigma_{mayy} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{syy}$$

$$\sigma_{mazz} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{szz}$$

$$\sigma_{maxy} = 2 * \mu * \epsilon_{sxy}$$

$$\sigma_{maxz} = 2 * \mu * \epsilon_{sxz}$$

$$\sigma_{mayz} = 2 * \mu * \epsilon_{syz}$$

! выражение крутящего момента через компоненты тензора напряжений

$$M_{rod} = -y * \sigma_{maxz} + x * \sigma_{mayz}$$

! масштабный множитель для более наглядного отображения деформации  
 $scale = 0.15 * globalmax(magnitude(x,y,z)) / globalmax(magnitude(ux,uy,uz))$

### equations

! уравнения равновесия

$$ux: dx(\sigma_{maxx}) + dy(\sigma_{maxy}) + dz(\sigma_{maxz}) = 0$$

$$uy: dx(\sigma_{maxy}) + dy(\sigma_{mayy}) + dz(\sigma_{mayz}) = 0$$

$$uz: dx(\sigma_{maxz}) + dy(\sigma_{mayz}) + dz(\sigma_{mazz}) = 0$$

### extrusion

{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"  
при построении объемной цилиндрической области }

surface "bottom"  $z = 0$  ! нижняя грань цилиндра

surface "top"  $z = h$  ! верхняя грань цилиндра

### boundaries

surface "bottom"

! нижняя грань жестко закреплена

$$value(ux) = 0 \quad value(uy) = 0 \quad value(uz) = 0$$

surface "top"

{ на верхней грани действуют только касательные напряжения,  
которые выражаются через заданный крутящий момент }

$$load(ux) = -y * Mz / Jp$$

$$load(uy) = x * Mz / Jp$$

$$load(uz) = 0 \quad ! \text{ нормальное напряжение } \sigma_{mazz} = 0$$

region 1 "Ring" { описывается контур цилиндра и граничные условия }

! кольцо с радиусом  $r$

$$start(-r, 0)$$

! нет нагрузок на боковой поверхности цилиндра

$$load(ux) = 0 \quad load(uy) = 0 \quad load(uz) = 0$$

$$arc(center=0,0) \quad angle=360$$

! построение графиков

### plots

! недеформированный стержень

grid(x, y, z) as "Undeformed Shape"

! деформированный стержень

grid(x + ux \* scale, y + uy \* scale, z + uz \* scale) as "Deformed Shape"

! построение графиков численных и аналитических решений вдоль линии  
! на боковой поверхности

```
elevation (uxan, ux) from (xb,yb,zb) to (xtop,ytop,ztop) as "Ux graphs"  
elevation (uyan, uy) from (xb,yb,zb) to (xtop,ytop,ztop) as "Uy graphs"
```

! графики  $u_x$  и  $u_y$  на сечениях

```
surface (ux) on x=0 as "Ux graph on x=0"  
surface (uy) on y=0 as "Uy graph on y=0"
```

! контурные графики касательных напряжений на поперечном сечении

```
contour (sigmayz) on z=h/2 painted ! с заливкой  
contour (sigmaxz) on z=h/2 painted
```

! контурный график распределения момента на поперечном сечении

```
contour (Mrod) on z = 0 painted ! с заливкой
```

! вектор смещения в проекции на плоскость верхней грани

```
vector(ux,uy) on z=h as "Vector u (ux,uy) on z=h " mesh points=16  
penwidth=4
```

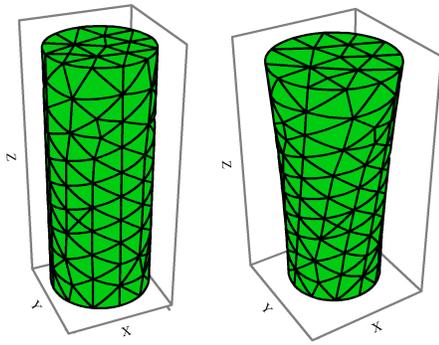
! отдельное окно для вывода результатов расчета

```
summary
```

! значения аналитического и численного решений в точке верхнего торца

```
report (val(uxan, xtop, ytop, ztop))  
report (val(ux, xtop, ytop, ztop))  
report (val(sigmayz, xtop, ytop, ztop))  
report (val(sigmayzan, xtop, ytop, ztop))  
end
```

На рисунке 15 представлены в качестве примера некоторые результаты расчетов. Из формы деформированного объекта видно, что поперечные сечения деформированного объекта действительно остаются плоскими. Максимальные перемещения наблюдаются на внешнем контуре сечения.



a) Стержень до и после деформации.

## Torsion 3D problem

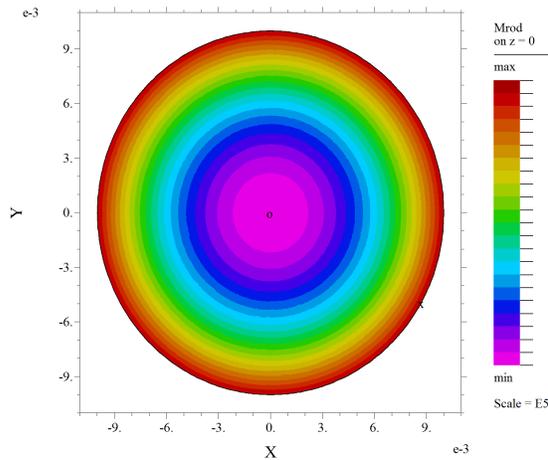
### SUMMARY

```

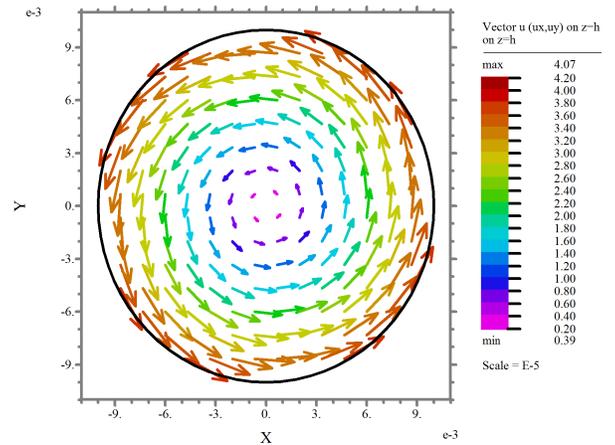
val(uxan, xtop, ytop, ztop)= -2.069014e-5
val(ux, xtop, ytop, ztop)= -2.069180e-5
val(sigmaz, xtop, ytop, ztop)= 5.515328e+7
val(sigmazan, xtop, ytop, ztop)= 5.513289e+7

```

b) Численное и аналитическое решения.



с) Момент  $M_z$  на  $z = 0$ .



d) Вектор  $(u_x, u_y)$  на  $z = h$ .

Рис. 15: Результаты расчетов для листинга 7.

## 2.6 Кручение квадратного стержня

Рассмотрим задачу о кручении стержня квадратного поперечного сечения. Сторона квадрата равна  $2a$ , высота стержня —  $h$ . Нижний торец жестко закреплен, а на верхнем действует крутящий момент  $M_{кр}$ . Относительный угол закручивания  $\theta$  считается известным. В этом случае поперечные сечения, которые были плоскими до приложения момента, искривляются по некоторой поверхности, называемой депланацией (англ. «deplanation», приставка лат. «de» — удаление, устранение, противоположный процесс или явление, лат. «planum» — плоскость) сечения. При построении аналитического решения используются подход, предложенный в 19 веке французским ученым Сен-Венаном. В рамках него предполагается, что деформация состоит из двух частей [4]:

1) поворотов поперечных сечений стержня, которые будут такими же, как и для стержня круглого сечения;

2) деформации поперечных сечений, которая будет одинаковой для всех поперечных сечений.

Согласно этим предположениям решение для компонент вектора перемещения представляются в виде:

$$u_x = -\theta zy, \quad u_y = \theta zx, \quad u_z = w(x, y), \quad (2.37)$$

где  $w(x, y)$  — деформация поперечных сечений,  $\theta z$  — угол закручивания поперечного сечения, которое находится на расстоянии  $z$  от начала координат. Компоненты тензора деформации согласно определению (1.16)–(1.17) будут равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Т. е. отличными от нуля являются только две компоненты  $\varepsilon_{xz}$  и  $\varepsilon_{yz}$ .

Можно показать [4], что задача об определении отличных от нуля касательных напряжений  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  сводится к отысканию функции напряжений Прандтля  $\varphi(x, y)$  на области поперечного сечения. Они связаны с ней по следующему правилу

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} = \sigma_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \sigma_{zy} = \sigma_{yz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

При этом третье уравнение равновесия (2.30) выполняется:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Компоненты тензора деформации также согласно закону Гука можно выразить через эту функцию:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{zy} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

С учетом (2.38) и (2.40) можно записать:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\theta x + \frac{\partial w}{\partial y}\right).\end{aligned}\tag{2.41}$$

Продифференцируем первое уравнение по  $y$ , второе — по  $x$  и вычтем одно из другого для исключения функции  $w$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -2\theta.\tag{2.42}$$

Для случая однородного материала  $\mu = \text{const}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -2\mu\theta.\tag{2.43}$$

Таким образом, функция  $\varphi$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = -2\mu\theta.\tag{2.44}$$

На границе  $s \in \partial S$  поперечного сечения должно выполняться условие

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{\partial S} = 0,\tag{2.45}$$

т. е. функция  $\varphi$  принимает постоянное значение на границе области. В частности для односвязной области

$$\varphi|_{\partial S} = C.\tag{2.46}$$

Поскольку функция напряжений определяется с точностью до константы, то обычно принимают

$$C = 0.$$

Для многосвязных областей (стержень с  $N$  штук сквозными вдоль продольной оси отверстиями) на внешнем контуре принимают  $\varphi|_{\partial S} = 0$ , а на контурах отверстий  $\varphi|_{\partial S_i} = C_i$ ,  $i = 1..N$ . Константы  $C_i$  заранее не известны и определяются из условия однозначности функции  $w(x, y)$  в многосвязной области.

Величина крутящего момента  $M_{кр}$  связана с функцией напряжений:

$$M_{кр} = 2 \iint_S \varphi ds. \quad (2.47)$$

Т. е. равна удвоенному объему фигуры ограниченной сверху функцией напряжений.

Линией уровня функции напряжения называется линия, для всех точек которой  $\varphi = const$ . Справедливо равенство, полученное Бредтом в 1896 году [1, 4]:

$$\oint_{\varphi=const} \tau_{zs} ds = 2\mu\theta S_*, \quad (2.48)$$

где  $S_*$  — площадь области, ограниченной линией  $\varphi = const$ , величина  $\tau_{zs}$  связана с компонентами касательных напряжений следующим образом (см. рисунок 16)

$$\tau_{zs} = \sigma_{xz} \cos(s, x) + \sigma_{yz} \cos(s, y) = \sigma_{xz} \frac{dx}{ds} + \sigma_{yz} \frac{dy}{ds}. \quad (2.49)$$

Величина касательного напряжения  $\tau$  тоже выражается через  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  (см. рисунок 16):

$$\tau = \sigma_{yz} \cos(n, x) - \sigma_{xz} \cos(n, y), \quad (2.50)$$

где  $\cos(n, x) = \frac{dx}{dn}$ ,  $\cos(n, y) = \frac{dy}{dn}$ . Или с учетом (2.39) запишем

$$\tau = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dn} \right) = - \frac{d\varphi}{dn}. \quad (2.51)$$

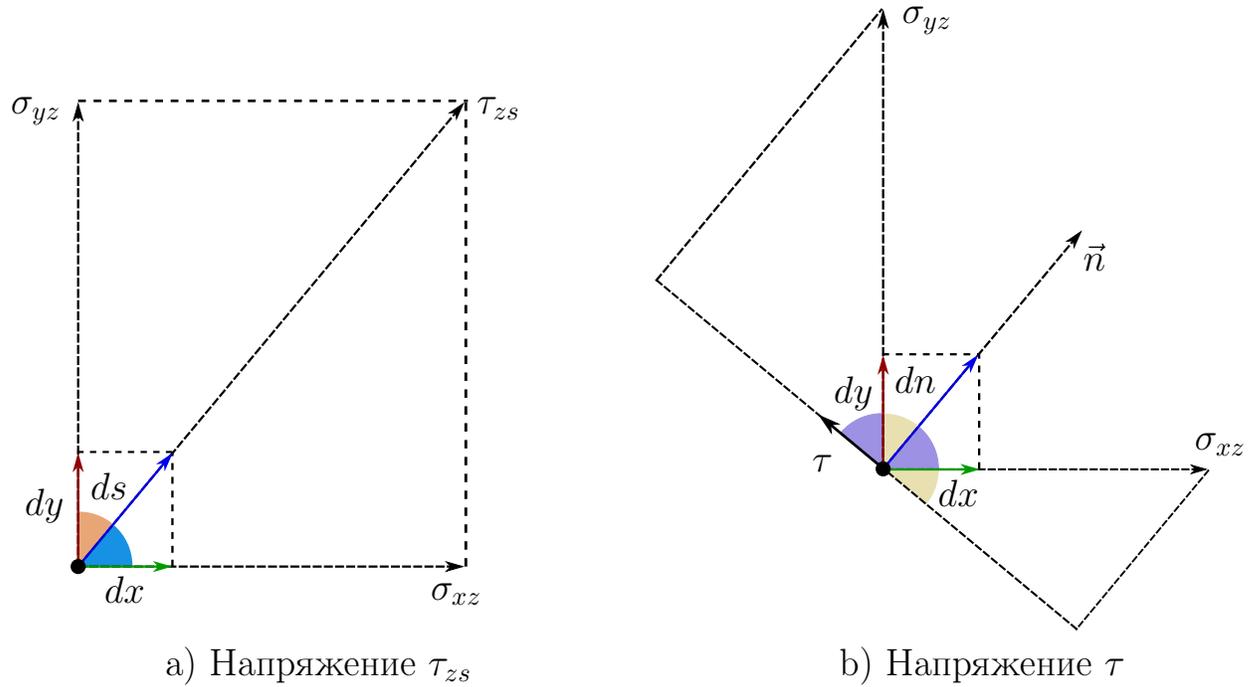


Рис. 16: Направления напряжений  $\tau$  и  $\tau_{zs}$ .

Отсюда видно, что максимальное касательное напряжение действует в точках, где линии уровней функции напряжений расположены ближе всего друг к другу, т. е. в местах, где склон поверхности, образованной функцией  $\varphi$ , является более крутым.

В более общем случае кручения стержня с прямоугольным сечением (ширина —  $2a$ , высота —  $2b$ ) получены аналитические формулы для вычисления максимального значения касательного напряжения  $\tau_{\max}$ , крутящего момента и связи между ними [4]:

$$\tau_{\max} = k2\mu\theta a, \quad (2.52)$$

$$M_{\text{кр}} = k_1 2\mu\theta (2a)^3 2b, \quad (2.53)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{k_2 (2a)^2 2b}, \quad (2.54)$$

где значения коэффициентов  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$  для некоторых соотношений сторон прямоугольника приведены в таблице 4.

Из этих формул и данных легко можно получить для рассматриваемого квадратного сечения выражения для  $\tau_{\max}$  и  $M_{\text{кр}}$ :

$$\tau_{\max} = 0.675 \cdot 2\mu\theta a, \quad (2.55)$$

Таблица 4: Значения коэффициентов  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$  для задачи о кручении стержня с прямоугольным сечением [4]

$b/a$	$k$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k$	$k_1$	$k_2$
1.0	0.675	0.1406	0.208	3	0.985	0.263	0.267
1.2	0.759	0.166	0.219	4	0.997	0.281	0.282
1.5	0.848	0.196	0.231	5	0.999	0.291	0.291
2.0	0.930	0.229	0.246	10	1.000	0.312	0.312
2.5	0.968	0.249	0.258	$\infty$	1.000	0.333	0.333

$$M_{\text{кр}} = 0.1406\mu\theta(2a)^4. \quad (2.56)$$

Получим дифференциальное уравнение для функции деформации  $w$ . Для этого обратимся к (2.41). Умножим левые и правые части обоих уравнений на  $2\mu$ , продифференцируем первое уравнение по  $x$ , второе — по  $y$  и сложим их:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Для случая однородного материала  $\mu = \text{const}$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta w = 0. \quad (2.58)$$

Видно, что функция  $w$  является гармонической функцией, поскольку должна удовлетворять уравнению Лапласа.

Для записи граничных условий обратимся к определению производной по нормали  $\vec{n}(n_x, n_y)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla w = n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_y \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.59)$$

Используя формулы (2.40) выпишем представления для частных производных функции  $w$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \theta y, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta x. \end{aligned} \quad (2.60)$$

С учетом этих представлений, на основе (2.59) получим следующую формулу для производной  $\frac{\partial w}{\partial n}$ :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = n_x \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \theta y \right) + n_y \left( -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta x \right). \quad (2.61)$$

Таким образом, для односвязной области из однородного материала, определив функцию напряжений  $\varphi$ , можно найти функцию депланации  $w$  из дифференциального уравнения (2.58) с учетом заданного граничного условия для производной по нормали (2.61) на границе области. Такая задача называется задачей Неймана, ее решение может быть найдено с точностью до аддитивной константы [16].

Для выявления зон, в которых начнутся пластические деформации, можно воспользоваться напряжением Мизеса, которое используется в соответствующем критерии текучести и в общем случае определяется по правилу:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) \right]. \quad (2.62)$$

В рассматриваемой задаче, когда отличными от нуля являются только две компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  вдали от заделки, выражение для  $\sigma_M$  примет вид:

$$\sigma_M^2 = 3(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2). \quad (2.63)$$

В листинге 8 представлен скрипт для получения численного решения трехмерной задачи о кручении вала квадратного сечения в пакете FlexPDE. Нижний торец ( $z = 0$ ) жестко закреплен ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ), а на верхнем действует крутящий момент  $M_{кр}$ . Относительный угол закручивания  $\theta$  считается известным. На верхней грани ( $z = h$ ) заданы значения двух компонент вектора смещения  $u_x$  и  $u_y$  согласно (2.37) и условие отсутствия нормального напряжения  $\sigma_{zz} = 0$ . На боковой поверхности отсутствуют напряжения, поэтому заданы условия `load(ux) = 0 load(uy) = 0 load(uz) = 0` при описании контура квадрата. Для сравнения численного и аналитических решений построены графики. Заметно, что аналитическое и численное решения для перемещений совпадают с точностью, сравнимой с погрешностью вычисления. Из графиков для касательных напряжений на сечениях видно, что они в отличии от

задачи для вала с круглым поперечным сечением изменяются не по линейному закону. Вычисление значения результирующего момента на верхнем сечении осуществляется автоматически при построении соответствующего графика и выводится в виде выражения  $\text{Integral} = 0.173734$  под ним. Видно, что оно близко к аналитическому значению  $0.173046$ , полученному согласно приведенной выше формуле (2.56). В отдельном окне выведены максимальные значения крутящего момента, полученные численно и с использованием формулы (2.55). Графики распределения касательных напряжений и напряжения Мизеса указывают, что  $\tau_{\max}$  достигается на серединах сторон квадрата.

Листинг 8: Файл (listings/Problem\_torsion\_rod\_3D\_square.pde)

```

title 'Torsion 3D problem square'      ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian3    ! 3D декартова система координат (x,y,z)

! описание искомым функций
variables
  ux ! функция смещения ux вдоль оси x
  uy ! функция смещения uy вдоль оси y
  uz ! функция смещения uz вдоль оси z

! системные настройки
select
serif =on      ! стиль шрифта с засечками
errlim =1e-5   ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
h = 20.0 * cm ! высота (длина) в м
a = 1.0 * cm ! сторона квадратного сечения в м

E = 200E9      ! модуль Юнга в Па
nu = 0.3       ! коэффициент Пуассона

mu = E / 2 / ( 1 + nu )      ! модуль сдвига

```

$\text{lam} = 2 * \text{mu} * \text{nu} / ( 1 - 2 * \text{nu} )$  ! параметр Ламе

{ угол закручивания отнесенный к единице длины,  
считается известным }

$\text{eta} = 1\text{e}-4$

$\text{uxan} = - \text{eta} * \text{y} * \text{z}$  ! аналитическое решение для компоненты ux

$\text{uyan} = \text{eta} * \text{x} * \text{z}$  ! аналитическое решение для компоненты uy

! координаты точек на нижнем и верхнем торцах стержня

$\text{xb} = \text{a}$

$\text{yb} = \text{a}$

$\text{zb} = 0$

$\text{xtop} = \text{xb}$

$\text{ytop} = \text{yb}$

$\text{ztop} = \text{h}$

! компоненты тензора деформации

$\text{epsxx} = \text{dx} ( \text{ux} )$

$\text{epsyy} = \text{dy} ( \text{uy} )$

$\text{epszz} = \text{dz} ( \text{uz} )$

$\text{epsxy} = 0.5 * ( \text{dy} ( \text{ux} ) + \text{dx} ( \text{uy} ) )$

$\text{epsxz} = 0.5 * ( \text{dx} ( \text{uz} ) + \text{dz} ( \text{ux} ) )$

$\text{epsyz} = 0.5 * ( \text{dz} ( \text{uy} ) + \text{dy} ( \text{uz} ) )$

$\text{Teta} = \text{epsxx} + \text{epsyy} + \text{epszz}$

! компоненты тензора напряжений

$\text{sigmaxx} = \text{lam} * \text{Teta} + 2 * \text{mu} * \text{epsxx}$

$\text{sigmayy} = \text{lam} * \text{Teta} + 2 * \text{mu} * \text{epsyy}$

$\text{sigmazz} = \text{lam} * \text{Teta} + 2 * \text{mu} * \text{epszz}$

$\text{sigmaxy} = 2 * \text{mu} * \text{epsxy}$

$\text{sigmaxz} = 2 * \text{mu} * \text{epsxz}$

$\text{sigmayz} = 2 * \text{mu} * \text{epsyz}$

{ выражение крутящего момента в точке  
через компоненты тензора напряжений }

$\text{Mrod} = - \text{y} * \text{sigmaxz} + \text{x} * \text{sigmayz}$

{ величина суммарного крутящего момента через угол закручивания  
для квадратного сечения — аналитическое решение }

$$Mz = 0.1406 * \mu * \eta * ( 2 * a ) ^ 4$$

! масштабный множитель для более наглядного отображения деформации  
scale = 0.05\*globalmax(magnitude(x,y,z))/globalmax(magnitude(ux,uy,uz))

### equations

! уравнения равновесия

$$ux: dx(\sigma_{maxx}) + dy(\sigma_{maxy}) + dz(\sigma_{maxz}) = 0$$

$$uy: dx(\sigma_{maxy}) + dy(\sigma_{mayy}) + dz(\sigma_{mayz}) = 0$$

$$uz: dx(\sigma_{maxz}) + dy(\sigma_{mayz}) + dz(\sigma_{mazz}) = 0$$

### extrusion

{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"  
при построении объемной области }

surface "bottom" z = 0 ! нижняя грань

surface "top" z = h ! верхняя грань

### boundaries

surface "bottom"

! нижняя грань жестко закреплена

$$value(ux) = 0 \quad value(uy) = 0 \quad value(uz) = 0$$

surface "top"

{ на верхней грани известны законы изменения компонент вектора  
смещения вдоль осей x, y,  
выраженные через относительный угол закручивания,  
нормальное напряжение отсутствует }

$$value(ux) = -\eta * y * z \quad ! \quad z=h$$

$$value(uy) = \eta * x * z \quad ! \quad z=h$$

$$load(uz) = 0 \quad ! \quad \text{напряжение } \sigma_{mazz}=0$$

{ описывается контур квадрата и граничные условия }

region 1 "Square"

! квадрат со стороной a

start ( -a, -a)

! нет нагрузок на боковой поверхности (условия по умолчанию)

$$load(ux) = 0 \quad load(uy) = 0 \quad load(uz) = 0$$

line to (a,-a) to (a,a) to (-a,a) to close

! построение графиков

plots

```

! недеформированный вал
grid(x, y, z) as "Undeformed Shape"
! деформированный вал
grid(x + ux * scale, y + uy * scale, z + uz * scale) as "Deformed Shape"

! построение графиков численных и аналитических решений вдоль линии
! на боковой поверхности
elevation (uxan, ux) from (xb,yb,zb) to (xtop,ytop,ztop) as "Ux graphs"
elevation (uyan, uy) from (xb,yb,zb) to (xtop,ytop,ztop) as "Uy graphs"

! графики ux и uy на сечениях
surface (ux) on x=0 as "Ux graph on x=0"
surface (uy) on y=0 as "Uy graph on y=0"

! наблюдается искривление сечения в направлении оси z
surface (uz) on z=h as "Uz graph on z=h"
surface (uz) on z=h/2 as "Uz graph on z=h/2"

! трехмерные графики касательных напряжений на поперечном сечении
surface (sigmayz) on z=h/2 painted as "Sigmayz graph on z=h/2"
surface (sigmaxz) on z=h/2 painted as "Sigmaxz graph on z=h/2"

! вектор смещения в проекции на плоскость верхней грани
vector(ux,uy) on z=h as "Vector u (ux,uy) on z=h " mesh points=16
penwidth=4

! контурный график распределения момента на поперечном сечении
contour (Mrod) on z = h painted as "Moment graph"

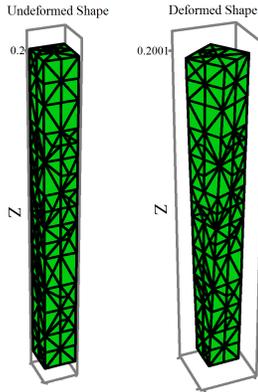
report( Mz ) ! аналитическое значение суммарного крутящего момента

! отдельное окно для вывода результатов расчета
summary
! значения аналитического и численного решений в точке
report ( val ( uxan, xtop, ytop, ztop*0.5) )
report ( val ( ux, xtop, ytop, ztop*0.5) )
end

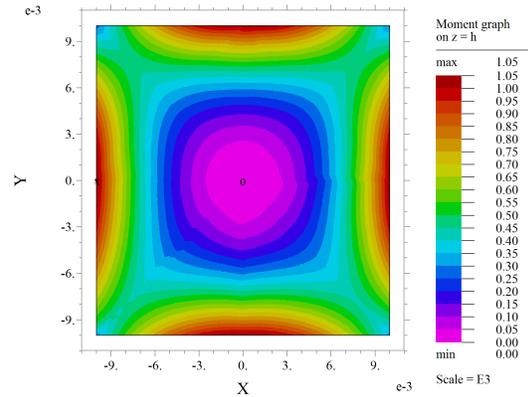
```

На рисунке 17 представлены: деформированная и недеформированная форма стержня, график распределения момента на верхней грани  $z = h$ , график

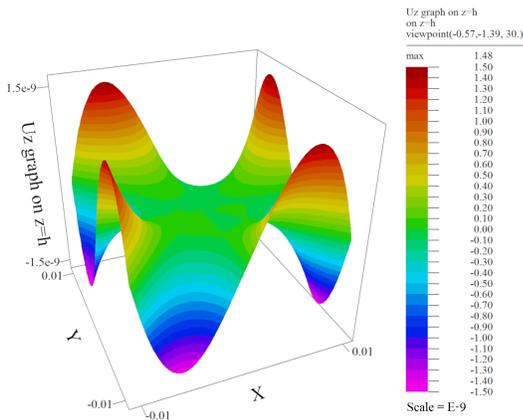
функции деформации  $u_z = w(x, y)$  и векторное поле смещения  $(u_x, u_y)$  на верхнем торце.



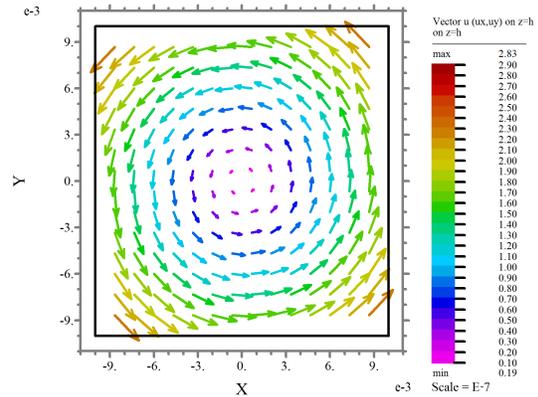
a) Стержень до и после деформации.



b) Момент  $M_z$  на  $z = h$ .



с) Перемещение  $u_z$  на  $z = h$ .



d) Вектор  $(u_x, u_y)$  на  $z = h$ .

Рис. 17: Результаты расчетов для листинга 8.

Из приведенных теоретических результатов видно, что задача о кручении призматического стержня сводится к нахождению функции напряжений  $\varphi$ , определенной на поперечном сечении. Функция деформации  $w$  также определяется на поперечном сечении. Поэтому вместо трехмерной задачи можно рассматривать двумерную, которая позволяет получать более точные решения. Также очевидным преимуществом такой задачи является существенно меньшее требование к числу элементов сетки разбиения области решения, что позволяет сократить время расчетов.

В листинге 9 представлен скрипт для получения численного решения двумерной задачи о кручении вала квадратного сечения в пакете FlexPDE. Здесь также считается, что относительный угол закручивания  $\theta$  задан, а искомыми

функциями являются функция напряжения  $\varphi$  и функция деформации  $w$ . Численное решение строится для уравнения (2.43) с граничным условием (2.46) (при  $C = 0$ ).

Как и в случае трехмерной задачи для сравнения численного и аналитических решений построен график  $M_{кр}$  и по умолчанию вычислено его интегральное значение `Integral = 0.173049`, которое выведено под ним. Видно, что оно более близко к аналитическому значению `0.173046` по сравнению с результатом, полученным для трехмерной задачи. Также посчитано значение контурного интеграла согласно формуле (2.48) на внешнем контуре квадрата, что очевидно соответствует линии уровня  $\varphi = 0$  в силу граничных условий. Соответствующее значение `Integral = 6153.361` выведено под графиком, который задается командой `elevation ( tangential ( tauv ) ) on "Path" as "Tangential tau graf on border"`. Видно, что оно также близко к значению `6153.846`, полученному аналитически при  $S_* = a^2$ . Максимальное касательное напряжение для квадратной области можно определить по аналитической формуле (2.55). Здесь также наблюдается близость к полученному численному значению.

Листинг 9: Файл (listings/Problem\_torsion\_rod\_2D\_square.pde)

```

title 'Torsion 2D problem square' ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian2 !2D декартова система координат (x,y)

! описание искомым функций
variables
  phi !функция напряжений

! системные настройки
select
serif =on ! стиль шрифта с засечками
errlim =1e-5 ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions

```

cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м  
h = 20.0 \* cm ! высота (длина) в м  
a = 1.0 \* cm ! сторона квадратного сечения в м

E = 200E9 ! модуль Юнга в Па  
nu = 0.3 ! коэффициент Пуассона

mu = E / 2 / ( 1 + nu ) ! модуль сдвига  
lam = 2 \* mu \* nu / ( 1 - 2 \* nu ) ! параметр Ламе

{ угол закручивания отнесенный к единице длины,  
считается известным }  
eta = 1e-4

! аналитическое решение  
uxan = - eta \* y \* h ! для компоненты ux при z=h  
uyan = eta \* x \* h ! для компоненты uy при z=h  
uv = **vector** ( uxan, uyan ) ! вектор смещения на сечении стержня  
uvm=magnitude( uv ) ! амплитуда вектора смещения

! выражения касательных напряжений через функцию phi  
sigmaxz = dy ( phi )  
sigmayz = - dx ( phi )  
tauv = **vector**( sigmaxz, sigmayz ) ! вектор касательных напряжений  
tauvm = magnitude( tauv ) ! амплитуда вектора касательных напряжений

! максимальное аналитическое значение вектора касательных напряжений  
tauman = 0.675\*2 \* mu \* eta \* a  
tauvmax = **globalmax** (tauvm)

{ выражение крутящего момента в точке  
через компоненты тензора напряжений }  
Mrod = - y \* sigmaxz + x \* sigmayz

{ величина суммарного крутящего момента через угол закручивания  
для квадратного сечения — аналитическое решение }  
Mz = 0.1406 \* mu \* eta \* ( 2 \* a ) ^ 4

```
! выражения для компонент тензора деформаций через напряжения
! согласно закону Гука
epsxz = 0.5 * mu * sigmaxz
epsyz = 0.5 * mu * sigmayz
```

```
! напряжение Мизеса
mises = sqrt ( 3 * ( sigmaxz ^ 2 + sigmayz ^ 2 ) )
```

### equations

```
! уравнение для функции phi
dxx ( phi ) + dyy ( phi ) + 2 * mu * eta = 0
```

### boundaries

```
region "Square" { описывается контур квадрата и граничные условия }
! квадрат со стороной a
start "Path" ( -a, -a)
! на всей границе одно условие для функции phi
value( phi ) = 0
line to (a,-a) to (a,a) to (-a,a) to close
```

```
! построение графиков
```

### plots

```
surface(phi) as "Phi graph"
! отображение поля вектора смещения
vector(uv) norm mesh points=16 penwidth=4
```

```
! графики касательных напряжений на поперечном сечении
```

```
surface (sigmaxz)
surface (sigmayz)
```

```
! отображение поля вектора касательных напряжений
```

```
vector( tauv) mesh points=16 penwidth=4
```

```
! график амплитудных значений вектора касательных напряжений
```

```
contour( tauvm)
```

```
! график напряжения Мизеса
```

```
contour( mises)
```

```
! проверка равенства Бредта на периметре квадрата
```

```
elevation ( tangential (tauv)) on "Path" as "Tangential tau graf on border"
report(2*mu*eta*4*a^2)
```

! распределение момента по сечению  
 contour (Mrod) painted as "Moment graph"  
 ! аналитическое значение суммарного крутящего момента  
 report( Mz )

! отдельное окно для вывода результатов расчета  
 summary ! значения аналитического и численного решений в точке  
 report (tauman)  
 report (tauvmax)  
 end

На рисунке 18 представлены основные графики, полученные на основе численного решения двумерной задачи для квадратного сечения стержня. Из графиков для момента и напряжения по Мизесу можно выявить области, в которых будут достигаться максимальные касательные напряжения.

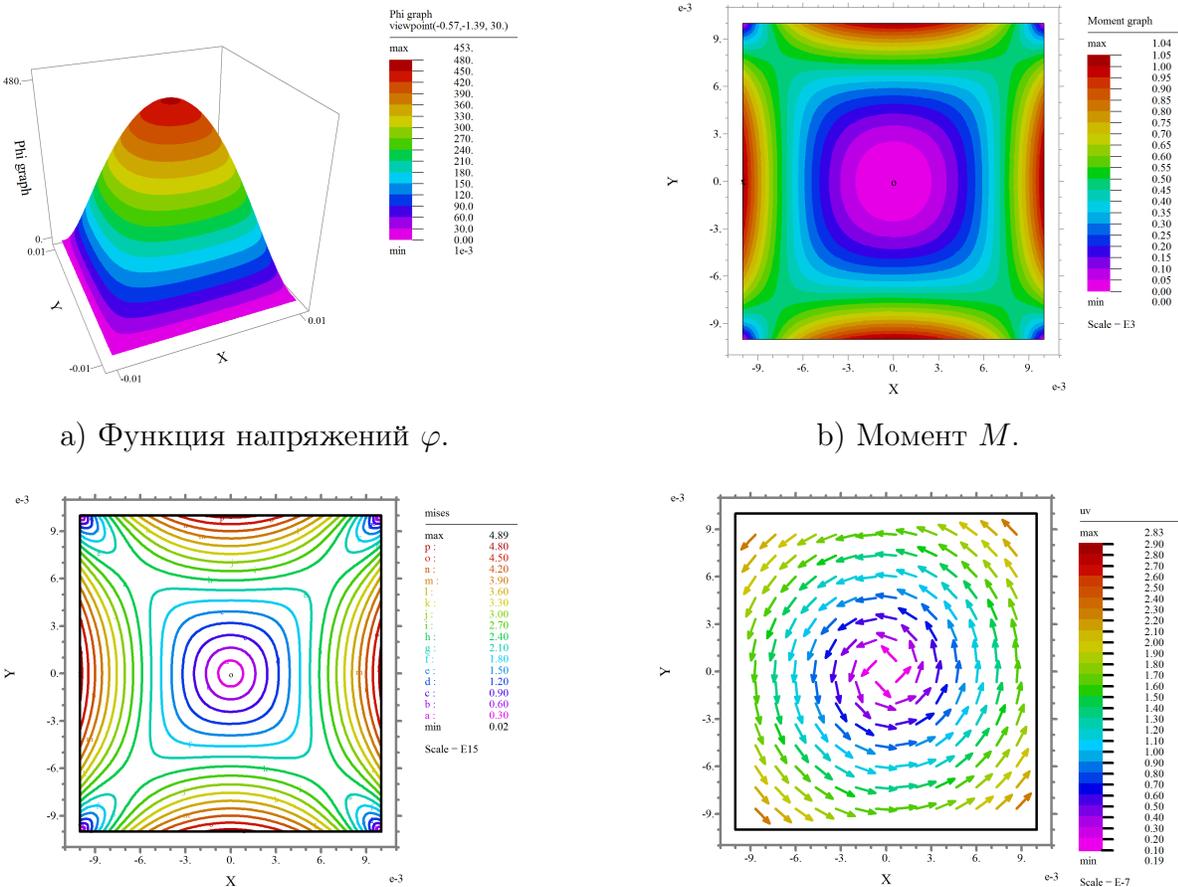


Рис. 18: Результаты расчетов для листинга 9.

## 2.7 Кручение стержня с эллиптическим сечением

Рассмотрим двумерную задачу о кручении стержня с эллиптическим сечением (см. рисунок 19), описываемым уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Она также как и для случая квадратного сечения сводится к нахождению функции напряжений  $\varphi(x, y)$  и депланации  $w(x, y)$  из соответствующих уравнений (2.43), (2.58) и граничных условий (2.46) (при  $C = 0$ ) и (2.61). При описании условия (2.61) необходимо учитывать значения компонент вектора единичной нормали  $\vec{n}(n_x, n_y)$  к границе области. Аналитическое решение для функции  $\varphi(x, y)$  известно и имеет вид [4]:

$$\varphi = -\theta\mu \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left( \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \right). \quad (2.64)$$

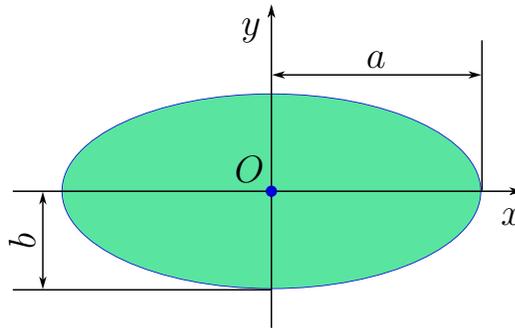


Рис. 19: Эллиптическое сечение.

В листинге 10 представлен скрипт, с помощью которого можно получить численное решение двумерной задачи о кручении стержня эллиптического сечения. В качестве искомых функций выбраны  $\varphi$  и  $w$ . Приводится сравнение численных и аналитических решений для этих функций, а также касательных напряжений и момента. Особое внимание следует уделить введению в рассмотрение единичных векторов `unit_x=vector(1,0)` и `unit_y=vector(0,1)`, которые используются при задании граничных условий для функции депланации  $w$ .

Листинг 10: Файл (listings/Problem\_torsion\_rod\_2D\_ellipse.pde)

```
title 'Torsion 2D problem ellipse' ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian2 ! 2D декартовая система координат (x,y)

! описание искомых функций
variables
  phi ! функция напряжений
  w ! функция деформации

! системные настройки
select
  serif = on ! стиль шрифта с засечками
  errlim = 1e-5 ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
  cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
  h = 20.0 * cm ! высота (длина) в м
  a = 2.0 * cm ! большая ось эллипса 2a в м
  b = 1.0 * cm ! малая ось эллипса 2b в м

  E = 200E9 ! модуль Юнга в Па
  nu = 0.3 ! коэффициент Пуассона

  mu = E / 2 / ( 1 + nu ) ! модуль сдвига
  lam = 2 * mu * nu / ( 1 - 2 * nu ) ! параметр Ламе

{угол закручивания отнесенный к единице длины
считается известным }
eta = 1e-4

u_xan = - eta * y * h ! аналитическое решение для компоненты u_x при z=h
u_yan = eta * x * h ! аналитическое решение для компоненты u_y при z=h

uv = vector ( u_xan, u_yan ) ! вектор смещения на сечении стержня
uvm=magnitude( uv ) ! амплитуда вектора смещения
```

! выражения касательных напряжений через функцию phi

$$\text{sigma}_{xz} = dy(\text{phi})$$

$$\text{sigma}_{yz} = -dx(\text{phi})$$

! выражение крутящего момента

! в точке через компоненты тензора напряжений

$$M_{rod} = -y * \text{sigma}_{xz} + x * \text{sigma}_{yz}$$

{величина суммарного крутящего момента через угол закручивания  
для эллиптического сечения — аналитическое решение}

$$M_z = \pi * \eta * \mu * a^3 * b^3 / (a^2 + b^2)$$

! вектор касательных напряжений

$$\text{tauv} = \text{vector}(\text{sigma}_{xz}, \text{sigma}_{yz})$$

! амплитуда (модуль) вектора касательных напряжений

$$\text{tauv}_m = \text{magnitude}(\text{tauv})$$

! максимальное численное значение вектора касательных напряжений

$$\text{tauv}_{max} = \text{globalmax}(\text{tauv}_m)$$

! максимальное аналитическое значение вектора касательных напряжений

$$\text{tauv}_{an} = 2 * M_z / (\pi * a * b^2)$$

! аналитическое решение для функции напряжений

$$\text{phi}_{an} = \eta * \mu * a^2 * b^2 / (a^2 + b^2) * (1 - (x/a)^2 - (y/b)^2)$$

! аналитические решения для компонент тензора напряжений

$$\text{sigma}_{xzan} = -2 * \eta * \mu * a^2 * y / (a^2 + b^2)$$

$$\text{sigma}_{yzan} = 2 * \eta * \mu * b^2 * x / (a^2 + b^2)$$

! аналитическое решение для функции деформации

$$w_{an} = M_z * (b^2 - a^2) * x * y / (\pi * a^3 * b^3 * \mu)$$

! выражения для компонент тензора деформаций через напряжения

! согласно закону Гука

$$\text{eps}_{xz} = 0.5 * \mu * \text{sigma}_{xz}$$

$$\text{eps}_{yz} = 0.5 * \mu * \text{sigma}_{yz}$$

$\text{mises} = \text{sqrt}(3 * (\text{sigma}_{xz}^2 + \text{sigma}_{yz}^2))$  ! напряжение по Мизесу

$\text{unit}_x = \text{vector}(1, 0)$  ! единичный вектор, направленный вдоль оси x

`unit_y = vector( 0, 1 )` ! единичный вектор, направленный вдоль оси y

### equations

! уравнение для функции phi

phi:  $dx( dx( phi ) ) + dy( dy( phi ) ) = - 2 * \mu * \eta$

! уравнение для функции w

w:  $dx( dx( w ) ) + dy( dy( w ) ) = 0$

### boundaries

region "Ellipse" {описывается контур эллипса и граничные условия}

! эллипс с большой осью 2a и малой 2b

start "Path" ( a, 0)

! на всей границе одно условие для функции phi

value( phi ) = 0

! граничное условие для функции w

load(w) = normal( unit\_x ) \* ( 1/ mu \* dy( phi ) + eta \* y ) +

normal( unit\_y ) \* ( - 1/ mu \* dx( phi ) - eta \* x )

arc ( center=0,0 ) to ( 0, b ) to ( - a, 0 ) to ( 0, - b ) close

! построение графиков

### plots

surface( phi ) as "Phi graph"

surface( phian ) as "Phian graph"

elevation ( phi, phian ) from ( - a, 0 ) to ( a, 0 ) as "Phi graphs on x-line"

surface( w ) as "Deplanation w graph"

surface( wan ) as "Deplanation wan graph"

elevation ( w, wan ) on "Path" as "W graphs on border"

contour( w ) painted as "Deplanation"

! отображение поля вектора смещения с одинаковой длиной стрелок

vector(uv) norm

! графики касательных напряжений на поперечном сечении

surface (sigmaxz) as "Sigmaxz graph"

surface (sigmayz) as "Sigmayz graph"

```

elevation (sigmaxz, sigmaxzan ) on "Path" as "Sigmaxz graphs on border"

! отображение поля вектора касательных напряжений
vector( tauv)
!график амплитудных значений вектора касательных напряжений
contour( tauvm)

! график напряжения по Мизесу
contour( mises)

! распределение момента по сечению
contour (Mrod) painted as "Moment graph"
!аналитическое значение суммарного крутящего момента
report( Mz )

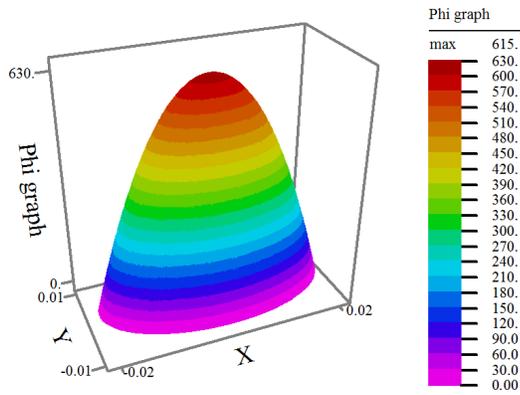
! отдельное окно для вывода результатов расчетов
summary
! аналитическое и численные значения максимального
! касательного напряжения
report (tauman )
report (tauvmax )
end

```

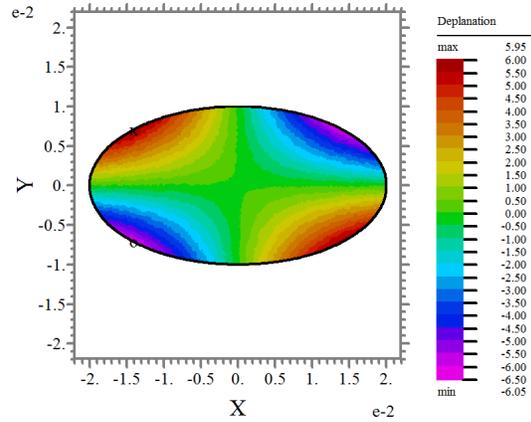
На рисунке 20 представлены некоторые графики, полученные на основе численного решения. Видно, что сечение искривляется, максимальное напряжение достигается на границе по концам малой оси эллипса.

### Задание

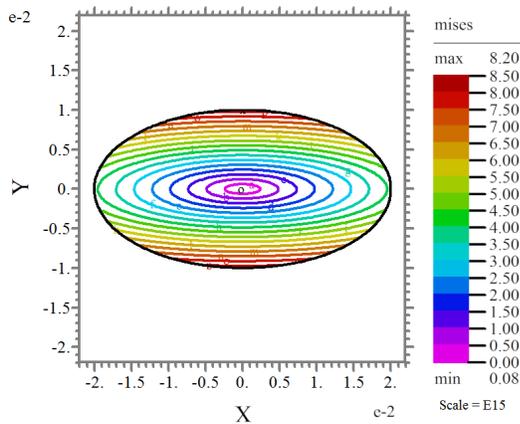
Постройте численное решение задачи о кручении стержня. В качестве искомой функции выберите функцию напряжения  $\varphi$ . Угол закручивания считать заданным. Варианты сечений представлены в приложении 4.5. Предусмотрите возможность задавать различные материалы для подобластей 1, 2. Постройте графики функции  $\varphi$  и напряжения Мизеса. Ознакомьтесь с мембранной аналогией Прандтля для качественной проверки выявления зон с максимальными касательными напряжениями. Для моделирования отверстия можно воспользоваться подходом, в рамках которого в зоне 1 задается материал с маленьким модулем Юнга. Проведите анализ, как изменятся в этом случае график функции  $\varphi$  и распределение касательных напряжений.



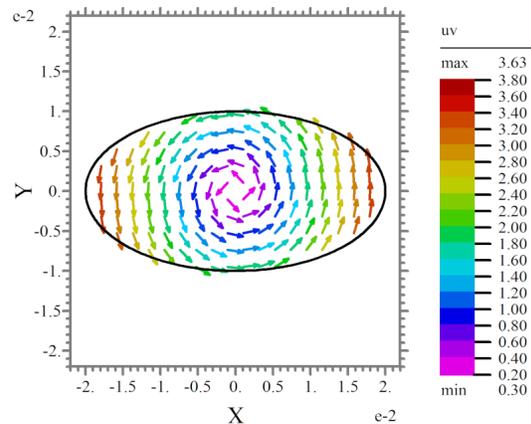
a) Функция напряжений.



b) Деформация сечения.



c) Напряжение по Мизесу.



d) Вектор  $(u_x, u_y)$ .

Рис. 20: Результаты расчетов для листинга 10.

## 2.8 Задача Ламе для полого цилиндра

### 2.8.1 Одномерная задача

Рассмотрим задачу для упругого однородного полого цилиндра, находящегося под действием равномерного давления изнутри  $P_1$  и снаружи  $P_2$ . Массовые силы отсутствуют. На торцах реализованы условия скользящей заделки, т. е. отсутствуют касательные напряжения и не допускается смещение вдоль продольной оси цилиндра. Внутренний радиус равен  $r_1$ , внешний  $r_2$ , высоту обозначим  $2h$  (см. рисунок 21). Исследование этой задачи удобно проводить в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  (см. приложения 4.1, 4.2). Из граничных условий видно, что в рассматриваемом объекте реализуется плоское деформированное состояние [2, 4, 14]. В силу симметричности нет зависимости от угловой координаты  $\varphi$ .

Таким образом, компоненты вектора перемещения  $\vec{u}$  можно представить в виде:

$$u_r = u_r(r), \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (2.65)$$

Выражения для соответствующих компонент тензора деформаций согласно формулам (4.15) примут вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{zr} = 0. \quad (2.66)$$

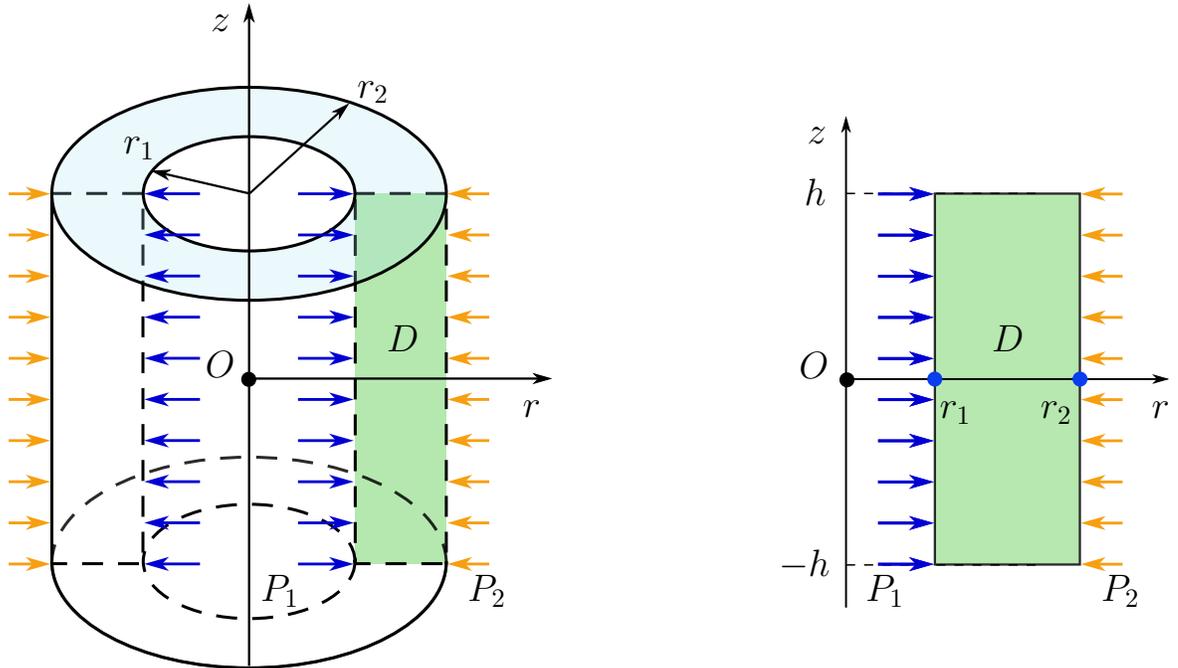


Рис. 21: Цилиндр под действием внутреннего и внешнего давлений (слева) и часть его продольного сечения (справа).

В этом случае с учетом закона Гука (4.14) из трех уравнений равновесия (4.13) остается только первое

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (2.67)$$

Используя формулы (4.14)–(4.15) имеем представления для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

При этом

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (2.69)$$

Подставим выражения (2.68)–(2.69) в уравнение равновесия (2.67)

$$((\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi})' + \frac{2\mu(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})}{r} = 0.$$

Здесь для краткости производная по радиальной координате  $d/dr$  обозначена через штрих «'». С учетом представлений (2.66) для компонент тензора деформаций через функцию радиального смещения  $u$ , получим

$$(\lambda + 2\mu)u_r'' + \lambda\frac{u_r'}{r} - \lambda\frac{u_r}{r^2} + 2\mu\frac{u_r'}{r} - 2\mu\frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Приводя подобные и далее разделив обе части уравнения на величину  $\lambda + 2\mu$ , имеем

$$u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.70)$$

Или с учетом диапазона изменения радиальной координаты  $r \in [r_1, r_2]$ ,  $r \neq 0$ , это уравнение путем умножения левой и правой частей на  $r^2$  можно привести к явному виду уравнения Эйлера [12, 13]:

$$r^2u_r'' + ru_r' - u_r = 0. \quad (2.71)$$

Используя представление  $u = r^k$ , найдем значения параметра  $k$ :

$$\begin{aligned} k(k-1)r^k + kr^k - r^k &= 0, \\ (k-1)(k+1) &= 0, \\ k_1 = 1, \quad k_2 &= -1. \end{aligned}$$

Тогда общее решение для искомой функции  $u$  запишем в виде:

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}. \quad (2.72)$$

Выражения для компонент тензора деформаций и напряжений согласно формулам (2.66) и (2.68) примут вид:

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = A + \frac{B}{r^2}, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \left( A - \frac{B}{r^2} \right) + \lambda \left( A + \frac{B}{r^2} \right) = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu) \left( A + \frac{B}{r^2} \right) + \lambda \left( A - \frac{B}{r^2} \right) = 2(\lambda + \mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Неизвестные константы  $A$ ,  $B$  найдем из граничных условий на внутренней ( $r = r_1$ ) и внешней ( $r = r_2$ ) боковой поверхностях цилиндра. Используя общий вид записи граничных условий второго типа (1.9) с учетом представления тензора напряжений в цилиндрической системе координат (4.12) и связи вектора внешней нормали  $\vec{n}$  с ортом  $\vec{e}_r$  ( $\vec{n} = -\vec{e}_r$  на внутренней поверхности,  $\vec{n} = \vec{e}_r$  на внешней), запишем:

$$\vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} -\sigma_{rr}\vec{e}_r - \sigma_{r\varphi}\vec{e}_\varphi - \sigma_{rz}\vec{e}_z = P_1\vec{e}_r, & r = r_1, \quad z \in [-h, h] \\ \sigma_{rr}\vec{e}_r + \sigma_{r\varphi}\vec{e}_\varphi + \sigma_{rz}\vec{e}_z = -P_2\vec{e}_r, & r = r_2, \quad z \in [-h, h]. \end{cases} \quad (2.75)$$

Каждое из этих выражений представляет собой запись равенство двух векторов. Выписывая эти равенства по координатно, получим, в частности, для рассматриваемой одномерной задачи

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_1) = -P_1, \\ \sigma_{rr}(r_2) = -P_2. \end{cases} \quad (2.76)$$

Отметим, что здесь компоненты  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0$  согласно закону Гука (4.14) и выражениям для компонент тензора деформаций (2.66).

Подставляя в (2.76) выражение для компоненты  $\sigma_{rr}$  из (2.74), получим систему двух алгебраических уравнений относительно для нахождения констант  $A$ ,  $B$ :

$$\begin{cases} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r_1^2} = -P_1, \\ 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r_2^2} = -P_2. \end{cases} \quad (2.77)$$

Умножим первое уравнение на  $r_1^2$ , второе на  $r_2^2$  и вычтем одно из другого, получим значение для  $A$ :

$$A = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{2(\lambda + \mu)(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Вычтем из первого уравнения системы (2.77) второе, получим формулу для вычисления  $B$ :

$$B = \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{2\mu (r_2^2 - r_1^2)}.$$

С учетом найденных значений  $A$ ,  $B$  выпишем выражения для функции радиального смещения (2.72) и напряжений (2.74):

$$u_r = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{2(\lambda + \mu)(r_2^2 - r_1^2)} r + \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{2\mu (r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r}, \quad (2.78)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}, \quad (2.79)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r^2}. \quad (2.80)$$

Согласно закону Гука (4.14) выражение для компоненты  $\sigma_{zz}$  имеет вид

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}).$$

Складывая выражения (2.68), получим, что

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}).$$

Тогда

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (2.81)$$

Используя формулы (1.6), можно записать

$$\lambda + \mu = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} + \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{E}{2(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \cdot \frac{2(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{2E} = \nu.$$

Выражение (2.81) для  $\sigma_{zz}$  перепишем в виде

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (2.82)$$

С учетом формул для  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  окончательно получим

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (2.83)$$

Видно, что  $\sigma_{zz}$  не зависит от координат, т. е. наблюдается равномерно распределенное по торцу нормальное напряжение.

В листинге 11 представлен скрипт, с помощью которого можно получить численное решение одномерной задачи Ламе для полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давлений. Искомой функцией является  $u_r$ . Приводится сравнение численных и аналитических решений. Следует обратить внимание на запись граничных условий (2.76). Здесь на внутренней границе при  $r = r_1$  в среде FlexPDE необходимо использовать выражение `load ( ur ) = P1`, т. к. вектор  $\vec{P}_1$  направлен вправо, в сторону координатной оси  $r$ . Из численных результатов в разделе `summary` видно, что аналитическое и численное решения совпадают с точностью, сравнимой с погрешностью вычисления.

Листинг 11: Файл (listings/Problem\_Lame\_1D.pde)

```
title 'Problem_Lame_1D' ! название задачи

!выбор системы координат
coordinates
cartesian1 ( "r" ) !1D декартова система координат (x),
! для удобства переходим к обозначению радиальной координаты x -> r

!описание искомой функции
variables
ur !функция радиального смещения

!системные настройки
select
serif =on !стиль шрифта с засечками
```

errlim = 1e-3 !точность расчетов

!задание параметров задачи и определяющих соотношений

definitions

cm = 0.01 !1 см = 0.01 м  
r2 = 1.0 \* cm !внешний радиус в м  
r1 = 0.8 \* r2 !внутренний радиус в м

P1 = 200 !внутреннее давление в Па

P2 = 100 !внешнее давление в Па

E = 200E9 !модуль Юнга в Па

nu = 0.3 !коэффициент Пуассона

mu = E / 2 / ( 1 + nu ) !модуль сдвига

lam = 2 \* mu \* nu / ( 1 - 2 \* nu ) !параметр Ламе

!ненулевые компоненты тензора деформации

epsrr = dr ( ur )

epsff = ur / r

Teta = epsrr + epsff

!ненулевые компоненты тензора напряжений

sigmarr = lam \* Teta + 2 \* mu \* epsrr

sigmaff = lam \* Teta + 2 \* mu \* epsff

sigmazz = lam \* Teta

!константы для краткости записи

C = ( P1 \* r1 ^ 2 - P2 \* r2 ^ 2 ) / ( r2 ^ 2 - r1 ^ 2 )

D = ( P1 - P2 ) \* r1 ^ 2 \* r2 ^ 2 / ( r2 ^ 2 - r1 ^ 2 )

!аналитические решения

uran = C / ( 2 \* ( lam + mu ) ) \* r + D / ( 2 \* mu \* r )

sigmarran = C - D / r ^ 2

sigmaffan = C + D / r ^ 2

sigmazzan = 2 \* nu \* C

equations

!уравнение равновесия

dr ( sigmarr ) + ( sigmarr - sigmaff ) / r = 0

```

! описание области рассмотрения и граничных условий
boundaries
  region 1 "R_line"
    start ( r1 )
      ! условие в точке  $\text{sigmarr}(r1) = -P1$ 
      ! с учетом направления вектора давления и оси r в среде FlexPDE
      ! (сонаправленные)
      point load ( ur ) = P1
    line to ( r2 )
      ! условие в точке  $\text{sigmarr}(r2) = -P2$ 
      ! с учетом направления вектора давления и оси r в среде FlexPDE
      ! (противоположно направленные )
      point load ( ur ) = - P2

```

! построение графиков

```

plots
  elevation ( ur, uran ) as 'Ur graphs '
  elevation ( sigmarr, sigmarran ) as 'Sigmarr graphs'
  elevation ( sigmaff, sigmaffan ) as 'Sigmaff graphs'
  elevation ( sigmaz, sigmazan ) as 'Sigmaz graphs'

```

! отдельное окно для вывода результатов расчета

```

summary
  ! значения аналитического и численного решений в точке
  report val ( ur, r2 ) !значение ur(r2)
  report val ( uran, r2 ) !значение аналитического решения uran(r2)
  report val ( sigmaff, r2 ) !значение sigmaff(r2)
  report val ( sigmaffan, r2 ) !значение аналит. реш. sigmaffan(r2)
end

```

На рисунке [22](#) приведены графики численного и аналитического решения для компонент напряжения  $\sigma_{rr}$   $\sigma_{\varphi\varphi}$ . Рекомендуется проверить, что численные результаты с достаточной степенью точностью совпадают с аналитическими решениями для всех компонент тензора напряжений ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) и для компоненты вектора перемещения  $u_r$  на внутренней границе области.

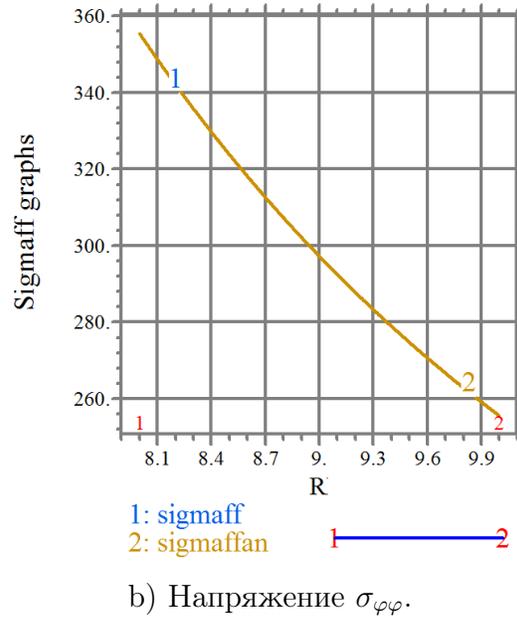
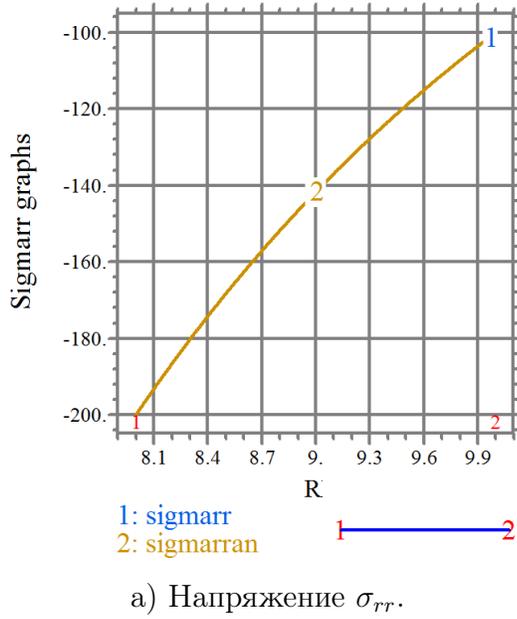


Рис. 22: Результаты расчетов для листинга 11.

## 2.8.2 Задача Ламе на поперечном сечении

Рассмотрим задачу Ламе для цилиндра в рамках плоского напряженного состояния [2, 4, 14]  $\sigma_{zz} = 0$  на поперечном сечении  $z = 0$ .

Из условия  $\sigma_{zz} = 0$  и соответствующего соотношения закона Гука (4.14) найдем выражение для продольной деформации  $\varepsilon_{zz}$ :

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (2.84)$$

Подставим (2.84) в представления для компонент  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  согласно (4.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left( \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right) + 2\mu\varepsilon_{rr}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left( \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right) + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Приводя подобные в скобках, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda^*(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{rr} = (\lambda^* + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda^*(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} = (\lambda^* + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

где введено обозначение

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (2.87)$$

Из полученных выражений (2.86) видно, что они совпадают с (2.68) при замене  $\lambda$  на  $\lambda^*$ . С учетом того, что уравнение равновесия (2.67), выражения для компонент  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  и граничные условия (2.76) остаются неизменными, решения для компонент тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  совпадут с (2.79), (2.80), а решение для функции радиального смещения  $u_r$  на основе (2.78) запишется в виде

$$u_r = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{2(\lambda^* + \mu)(r_2^2 - r_1^2)} r + \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{2\mu (r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r}. \quad (2.88)$$

В листинге 12 представлен скрипт, с помощью которого можно получить численное решение двумерной задачи Ламе для полого цилиндра на поперечном сечении в рамках плоского напряженного состояния. Внутри действует давление  $P_1$ , снаружи —  $P_2$ . Поскольку в пакете FlexPDE нет полярной системы координат  $(r, \varphi)$ , то рассмотрение задачи проводится в декартовой системе  $(x, y)$ . Искомыми функциями являются  $u_x$ ,  $u_y$ . Учитывая симметричность задачи, решение ищется на области, представляющую собой четверть окружности, которая находится в первом квадранте. Приводится сравнение численных и аналитических решений. При этом используются формулы для связи компонент тензора напряжений, записанные в полярной и декартовой системах координат. Следует обратить внимание на запись граничных условий «симметричности» на вертикальной и горизонтальной гранях области. Формально они представляют собой условия соответствующих вертикальной и горизонтальных заделок. Например, для горизонтальной грани используется команда `load (ux) = 0`, которая описывает отсутствие касательных напряжений  $\sigma_{xy} = 0$ , `value (uy) = 0` — ограничение на вертикальное смещение. На внутренней  $r = r_1$  и внешней  $r = r_2$  границах в среде FlexPDE условия для напряжений записаны с учетом их проекций на оси координат. Для наглядности оценки близости полученного численного и описанного аналитического решений приводятся соответствующие графики компонент тензора напряжений на различных линиях. В разделе `summary` представлены значения некоторых функций в заданных точках.

```
title 'Problem Lamé on cross section' ! название задачи
```

```
!выбор системы координат
```

```
coordinates
```

```
cartesian2 !2D декартовая система координат (x,y)
```

```
!описание искомым функций
```

```
variables
```

```
ux !функция смещения вдоль оси x
```

```
uy !функция смещения вдоль оси y
```

```
!системные настройки
```

```
select
```

```
serif =on !стиль шрифта с засечками
```

```
errlim =1e-3 !точность расчетов
```

```
textsize =18 ! размер шрифта на графиках
```

```
!задание параметров задачи и определяющих соотношений
```

```
definitions
```

```
cm = 0.01 !1 см = 0.01 м
```

```
r2 = 1.0 * cm !внешний радиус в м
```

```
r1 = 0.8 * r2 !внутренний радиус в м
```

```
P1 = 200 !внутреннее давление в Па
```

```
!проекция P1 на оси координат при r = r1
```

```
P1x = P1 * x / r1 ! P1x = P1 * cos (fi)
```

```
P1y = P1 * y / r1 ! P1y = P1 * sin (fi)
```

```
P2 = 100 !внешнее давление в Па
```

```
!проекция P2 на оси координат при r = r2
```

```
P2x = - P2 * x / r2 ! P2x = - P2 * cos (fi)
```

```
P2y = - P2 * y / r2 ! P2y = - P2 * sin (fi)
```

```
E = 200E9 !модуль Юнга в Па
```

```
nu = 0.3 !коэффициент Пуассона
```

```
mu = E / 2 / ( 1 + nu ) !модуль сдвига
```

```
lam = 2 * mu * nu / ( 1 - 2 * nu ) !параметр Ламе
```

```
!параметр Ламе для плоского напряженного состояния
```

$$\lambda_m = 2 * \lambda * \mu / (\lambda + 2 * \mu)$$

!компоненты тензора деформации

$$\epsilon_{xx} = dx ( u_x )$$

$$\epsilon_{yy} = dy ( u_y )$$

$$\epsilon_{xy} = 0.5 * (dx ( u_y ) + dy ( u_x ) )$$

$$\Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$$

!компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx} = \lambda_m * \Theta + 2 * \mu * \epsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda_m * \Theta + 2 * \mu * \epsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = 2 * \mu * \epsilon_{xy}$$

!длина радиус–вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

!формулы связи компонент тензора напряжений в полярной

и декартовой системе координат

$$\cos(\phi) = x / r; \sin(\phi) = y / r; \sin(2\phi) = 2 * x * y / r^2$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{xx} * (x/r)^2 + \sigma_{yy} * (y/r)^2 + \sigma_{xy} * 2 * x * y / r^2$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{xx} * (y/r)^2 + \sigma_{yy} * (x/r)^2 - \sigma_{xy} * 2 * x * y / r^2$$

!выражение функции радиального смещения через компоненты  $u_x, u_y$

$$u_r = u_x * \cos(\phi) + u_y * \sin(\phi)$$

$$u_r = u_x * x / r + u_y * y / r$$

!константы для краткости записи аналитических решений

$$C = (P1 * r1^2 - P2 * r2^2) / (r2^2 - r1^2)$$

$$D = (P1 - P2) * r1^2 * r2^2 / (r2^2 - r1^2)$$

!аналитические решения

$$u_{ran} = C / (2 * (\lambda_m + \mu)) * r + D / (2 * \mu * r)$$

$$\sigma_{marran} = C - D / r^2$$

$$\sigma_{m\phi\phi an} = C + D / r^2$$

!масштабный множитель для более наглядного отображения деформации

$$scale = 0.25 * \text{globalmax}(\text{magnitude}(x, y)) / \text{globalmax}(\text{magnitude}(u_x, u_y))$$

!угол для вычисления координат точек на сечении

$$\alpha = \pi / 6$$

!координаты точки K

$$K_x = r_1 * \cos(\text{alfa})$$

$$K_y = r_1 * \sin(\text{alfa})$$

!координаты точки N

$$N_x = r_2 * \cos(\text{alfa})$$

$$N_y = r_2 * \sin(\text{alfa})$$

!уравнения равновесия

equations

$$u_x: dx(\sigma_{xx}) + dy(\sigma_{xy}) = 0$$

$$u_y: dx(\sigma_{xy}) + dy(\sigma_{yy}) = 0$$

!описание области рассмотрения и граничных условий

boundaries

region 1 'Sector'

start 'Contour' ( r1, 0 )

!условие симметричности на нижней горизонтальной границе

load (ux) = 0 value (uy) = 0 line to ( r2, 0 )

!действие давления P2 r=r2 в проекциях на оси координат

load (ux) = P2x load (uy) = P2y arc (center = 0, 0 ) to ( 0, r2 )

!условие симметричности на левой вертикальной границе

value ( ux ) = 0 load ( uy ) = 0 line to ( 0, r1 )

!действие давления P1 при r=r1 в проекциях на оси координат

load ( ux ) = P1x load ( uy ) = P1y arc (center = 0, 0 ) to close

plots

!недеформированное сечение

grid ( x, y ) as "Deformed Shape"

!деформированное сечение

grid ( x + ux \* scale, y + uy \* scale ) as "Deformed Shape"

!графики компонент вектора перемещения

contour( ux )

contour( uy )

!векторное поле перемещения

```
vector( ux, uy ) norm mesh points=20 penwidth=4
```

!контурные графики комопонент тензора напряжений

```
contour( sigmaxx )
```

```
contour( sigmayy )
```

```
contour( sigmaxy )
```

!трехмерные графики комопонент тензора напряжений

```
surface( sigmarr )
```

```
surface( sigmaff )
```

!срание численных и аналитических решений на контуре области

! и вдоль радиальной линии от точки K до точки N

```
elevation( sigmarr, sigmarran ) on 'Contour'
```

```
elevation( sigmarr, sigmarran ) from (Kx, Ky) to (Nx, Ny)
```

```
elevation( sigmaff, sigmaffan ) on 'Contour'
```

```
elevation( sigmaff, sigmaffan ) from (Kx, Ky) to (Nx, Ny)
```

```
elevation( ur, uran ) on 'Contour'
```

```
elevation( ur, uran ) from (Kx, Ky) to (Nx, Ny)
```

!график относительной погрешности для фукнции ur

```
contour( (ur-uran)/uran * 100 )
```

!сравнение значений sigma<sub>rr</sub> и sigma<sub>ff</sub>

!вдоль радиальной линии

```
elevation( sigmarr, sigmaff ) from (Kx, Ky) to (Nx, Ny)
```

!отдельное окно для численных данных

```
summary
```

!значения аналитического и численного решений в точке

```
report val ( ur, Nx, Ny ) !значение ur(r2)
```

```
report val ( uran, Nx, Ny ) !значение аналитического решения uran(r2)
```

```
report val ( sigmaff, Nx, Ny ) !значение sigmaff(r2)
```

```
!значение аналитического решения sigmaffan(r2)
```

```
report val ( sigmaffan, Nx, Ny )
```

```
end
```

На рисунке 23 приведены некоторые графические результаты расчетов для листинга 12. На рисунке с векторным полем видно направление смещения точек.

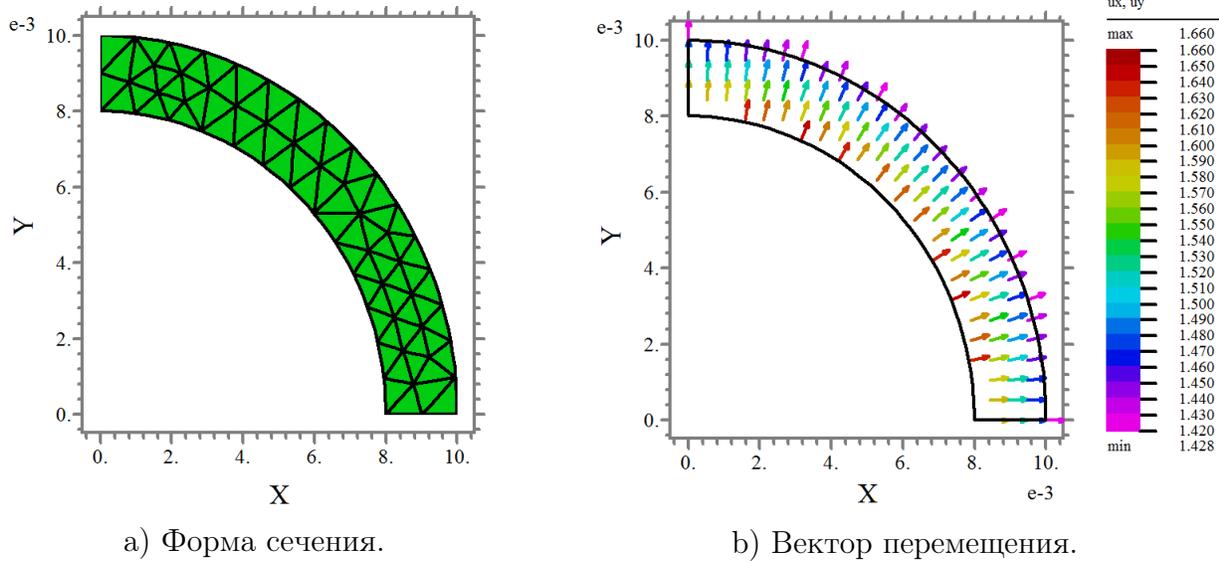


Рис. 23: Примеры результатов расчетов для листинга 12.

### 2.8.3 Задача Ламе на продольном сечении

Рассмотрим двумерную задачу Ламе на продольном сечении цилиндра (см. рисунок 21). На верхнем и нижнем торцах реализованы условия скользящей заделки. Учитывая симметричность задачи, в качестве области решения выберем, правую часть сечения  $D = \{(r, z) \in R^2 | r \in [r_1, r_2], z \in [-h, h]\}$ . Дифференциальные уравнения равновесия для искомых компонент вектора перемещения  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  на основе общих уравнений для цилиндрической системы координат (4.13) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Здесь компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций согласно закону Гука (4.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{\varphi z} &= 2\mu\varepsilon_{\varphi z}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \sigma_{zr} &= 2\mu\varepsilon_{zr}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

где  $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$ . Используя формулы (4.15) запишем выражения для компонент тензора деформаций с учетом представления вектора перемещения ( $u_r = u_r(r, z)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = u_z(r, z)$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = 0, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) = \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = 0, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{2.91}$$

Отметим, что поскольку  $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0$ , то  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$ .

Граничные условия, описывающие скользящую заделку на верхнем и нижнем торцах, можно задать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(r, h) = 0, & u_z(r, h) = 0, & r \in [r_1, r_2], \\ \sigma_{rz}(r, -h) = 0, & u_z(r, -h) = 0, & r \in [r_1, r_2]. \end{cases}\tag{2.92}$$

Поскольку цилиндр находится под действием внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давлений, то необходимо записать соответствующие условия для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(r_1, z) = 0, & \sigma_{rr}(r_1, z) = -P_1, & z \in [-h, h], \\ \sigma_{rz}(r_2, z) = 0, & \sigma_{rr}(r_2, z) = -P_2, & z \in [-h, h]. \end{cases}\tag{2.93}$$

Эти результаты можно получить из общей формулировки граничных условий для векторных величин 2.75, записывая их по координатно.

В листинге 13 представлен скрипт, с помощью которого можно получить численное решение описанной двумерной задачи Ламе для полого цилиндра на продольного сечении. В пакете FlexPDE есть специальная двумерная цилиндрическая система координат для переменных  $(r, z)$ , которая называется `ucylinder`. В ней ось  $Or$  направлена вправо, ось  $Oz$  — вверх (см. рисунок 21). Искомыми функциями являются  $u_r$ ,  $u_z$ . Граничные условия на всех гранях области описываются согласно записям (2.92)–(2.93). При этом на внутренней  $r = r_1$  и внешней  $r = r_2$  границах в среде FlexPDE условия для напря-

жения  $\sigma_{rr}$  заданы с помощью команды `load(ur)` с учетом направлений проекций усилий  $P_1$ ,  $P_2$  на оси координат. Для удобства сравнения численного и описанного аналитического решений приводятся соответствующие графики компонент тензора напряжений и функции радиального смещения на различных линиях. В разделе `summary` представлены значения основных функций в заданных точках.

Листинг 13: Файл (listings/Problem\_Lame\_2Drz.pde)

```

title 'Problem Lamé on longitudinal section' ! название задачи

!выбор системы координат
coordinates
ucylinder !2D цилиндрическая система координат (r,z)
!ось z направлена вверх, ось r — вправо

!описание искомых функций
variables
ur      !функция радиального смещения
uz      !функция смещения вдоль оси z

!системные настройки
select
serif =on      !стиль шрифта с засечками
errlim =1e-5   !точность расчетов

!задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
cm = 0.01      !1 см = 0.01 м
r2 = 1.0 * cm  !внешний радиус в м
r1 = 0.5 * r2  !внутренний радиус в м
L = 2 * cm     !высота (длина) цилиндра в м
h = 0.5 * L    !полувысота цилиндра в м

P1 = 200 !внутреннее давление в Па
P2 = 100 !внешнее давление в Па

E = 200E9      !модуль Юнга в Па
nu = 0.3       !коэффициент Пуассона

```

$\mu = E / 2 / ( 1 + \nu )$  !модуль сдвига  
 $\lambda = 2 * \mu * \nu / ( 1 - 2 * \nu )$  !параметр Ламе

!компоненты тензора деформации

!в цилиндрической системе координат

$\epsilon_{rr} = dr ( ur )$

$\epsilon_{\theta\theta} = ur / r$

$\epsilon_{zz} = dz ( uz )$

$\epsilon_{rz} = 0.5 * ( dr ( uz ) + dz ( ur ) )$

$Teta = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}$

!компоненты тензора напряжений

!в цилиндрической системе координат

$\sigma_{rr} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{rr}$

$\sigma_{\theta\theta} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{\theta\theta}$

$\sigma_{zz} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{zz}$

$\sigma_{rz} = 2 * \mu * \epsilon_{rz}$

!константы для краткости записи аналитических решений

$C = ( P1 * r1 ^ 2 - P2 * r2 ^ 2 ) / ( r2 ^ 2 - r1 ^ 2 )$

$D = ( P1 - P2 ) * r1 ^ 2 * r2 ^ 2 / ( r2 ^ 2 - r1 ^ 2 )$

!аналитические решения

$u_{rr} = C / ( 2 * ( \lambda + \mu ) ) * r + D / ( 2 * \mu * r )$

$\sigma_{rr} = C - D / r ^ 2$

$\sigma_{\theta\theta} = C + D / r ^ 2$

$\sigma_{zz} = 2 * \nu * C$

!масштабный множитель для более наглядного отображения деформации

$scale = 0.25 * globalmax(magnitude(r, z)) / globalmax(magnitude(ur, uz))$

!координаты точки K

$K_r = r1$

$K_z = 0$

!координаты точки N

$N_r = r2$

$N_z = 0$

!уравнения равновесия

## equations

$ur : dr ( \text{sigmarr} ) + dz ( \text{sigmarz} ) + ( \text{sigmarr} - \text{sigmarr} ) / r = 0$   
 $uz : dr ( \text{sigmarz} ) + dz(\text{sigmaz}) + \text{sigmarz} / r = 0$

!описание области рассмотрения и граничных условий

## boundaries

region "Section"

start "Contour" ( r1, -h )

!условия скользящей заделки на нижнем торце  $z=-h$

!sigmarz = 0; uz = 0

load ( ur ) = 0 value ( uz ) = 0

line to ( r2, -h )

!действие давления на внешней боковой поверхности

!sigmarr = -P2; касательных нагрузок нет sigmarz = 0

load ( ur ) = -P2 load ( uz ) = 0

line to ( r2, h )

!условия скользящей заделки на верхнем торце  $z=h$

!sigmarz = 0; uz = 0

load ( ur ) = 0 value ( uz ) = 0

line to ( r1, h )

{действие давления на внутренней поверхности

sigmarr = -P1 с учетом проекции на ось r;

касательных нагрузок нет sigmarz = 0 }

load ( ur ) = P1 load ( uz ) = 0

line to close

## plots

!недеформированное сечение

grid ( r, z ) as "Undeformed Shape"

!деформированное сечение

grid ( r + scale \* ur, z + scale \* uz ) as "Deformed Shape"

!графики функций ur, uz и напряжений

surface ( ur )

contour( uz )

```

vector( ur, uz ) mesh points=26 penwidth=4 !вектор смещения
surface( sigmarr)
surface( sigmaff)
contour( sigmazz)

```

!сравнение численных и аналитических решений на контуре области  
! и вдоль радиальной линии от точки K до точки N

```

elevation ( sigmarr, sigmarran) on 'Contour'
elevation ( sigmarr, sigmarran) from (Kr, Kz) to (Nr, Nz)
elevation ( sigmaff, sigmaffan) on 'Contour'
elevation ( sigmaff, sigmaffan) from (Kr, Kz) to (Nr, Nz)
elevation ( ur, uran) on 'Contour'
elevation ( ur, uran) from (Kr, Kz) to (Nr, Nz)

```

!график относительной погрешности для функции ur  
contour( (ur—uran)/uran \* 100)

!сравнение значений sigmarr и sigmaff

!вдоль радиальной линии

```

elevation ( sigmarr, sigmaff) from (Kr, Kz) to (Nr, Nz)

```

!отдельное окно для численных данных

```

summary

```

!значения аналитического и численного решений в точке

```

report val ( ur, Kr, Kz ) !значение ur(Kr, Kz)

```

```

report val ( uran, Kr, Kz ) !значение аналитического решения uran(Kr, Kz)

```

```

report val ( sigmaff, Kr, Kz ) !значение sigmaff(Kr, Kz)

```

!значение аналитического решения sigmaffan(Kr, Kz)

```

report val ( sigmaffan, Kr, Kz )

```

```

report val ( sigmazz, Kr, Kz ) !значение sigmazz(Kr, Kz)

```

!значение аналитического решения sigmazzan(Kr, Kz)

```

report val ( sigmazzan, Kr, Kz )

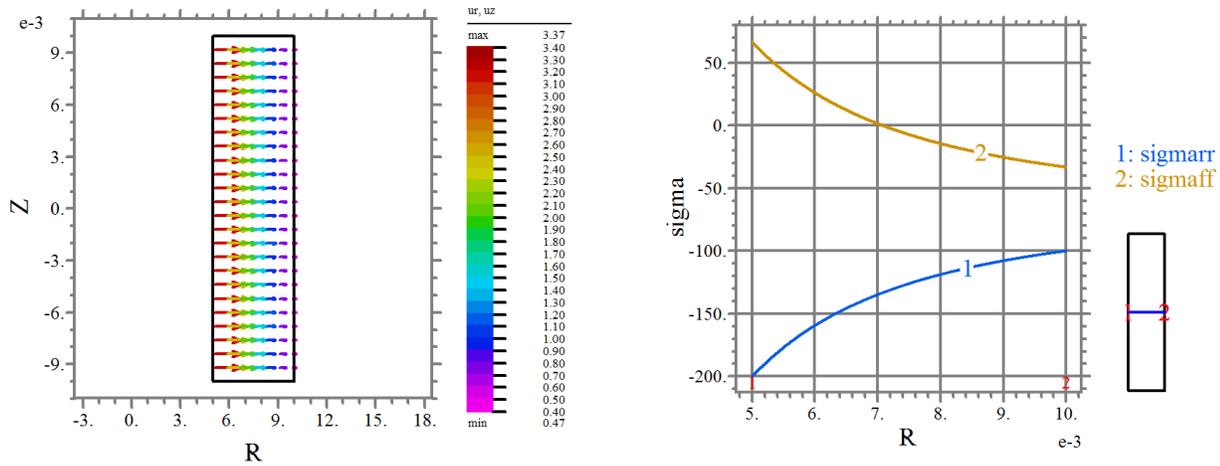
```

```

end

```

На рисунке 24 приведены некоторые результаты расчетов для листинга 13. Сравнение значений численного и аналитического решений для компонент напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  показывают совпадение с точностью до десятых. Аналогично с помощью команды **val** в разделе **summary** можно выводить на экран значения интересующей функции в любой точке области.



а) Векторное поле перемещения.

б) Графики  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  вдоль линии 1 – 2.

Рис. 24: Результаты расчетов для листинга 13.

## Задания

1. Рассмотрим полый цилиндр, который изготовлен из неоднородного изотропного материала. Переменные свойства описываются непрерывной функцией  $F$ :

$$E = E_0 F,$$

где  $E_0$  — характерное значение модуля Юнга. Цилиндр находится под действием внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давлений. В зависимости от вида функции  $F$  выберите область для построения решения:

- $F = 1 + \xi^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;
- $F = 1 + e^{n\xi}$ ,  $n = 1, 2, 3$ ;
- $F = 1 + \xi^k + \zeta^m$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $m = 1, 2, 3$ ;
- $F = kx_*^2 + my_*^2$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Здесь  $\xi = r/r_2$ ,  $\zeta = z/r_2$ ,  $x_* = x/r_2$ ,  $y_* = y/r_2$  — безразмерные координаты. В скрипте предусмотреть возможность задания значений параметров  $k$ ,  $m$ . Постройте графики компонент тензора напряжений и функции смещения.

2. Для задачи на продольном сечении рассмотреть два вида граничных условий на верхнем и нижнем торцах: скользящая или жесткая заделка. Постройте графики компонент тензора напряжений. Обратите внимание на их значения и характер изменения вблизи и вдали от торцов.

## 2.9 Чистый изгиб призматических стержней

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние призматического прямоугольного стержня, находящегося под действием двух равных и противоположных по направлениям изгибающих моментов  $\vec{M}$ . Начало декартовой системы координат  $(x, y, z)$  расположим в центре тяжести левого поперечного сечения (см. рисунок 25). Изгиб происходит в главной плоскости  $xOz$ .

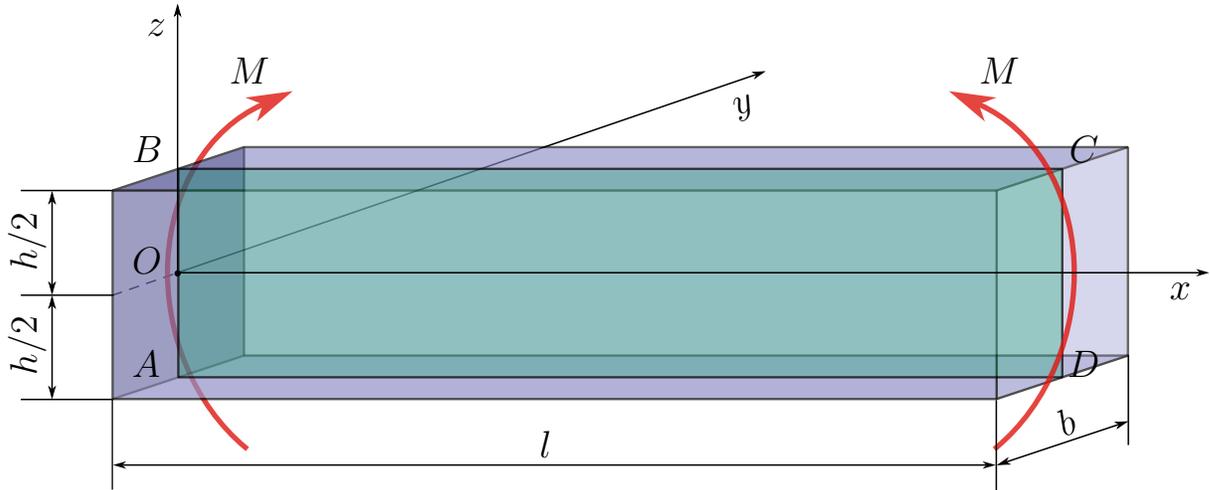


Рис. 25: Стержень под действием изгибающих моментов.

В качестве решения для компонент тензора напряжений выберем следующее:

$$\sigma_{xx} = -az, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad (2.94)$$

где

$$a = \frac{E}{R}, \quad (2.95)$$

$R$  — радиус кривизны стержня после изгиба. Это решение удовлетворяет уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.96)$$

Граничные условия на боковой поверхности стержня также удовлетворяют-

ся, т. к. на ней нет внешних нагрузок. На левом и правом торцах действует изгибающий момент, который определяется по правилу:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \int_S \vec{r} \times \vec{i}_1 \sigma_{xx} ds = - \int_S \left( y\vec{i}_2 + z\vec{i}_3 \right) \times \vec{i}_1 a z ds = \\ &= - \int_S a z y \vec{i}_2 \times \vec{i}_1 ds - \int_S a z^2 \vec{i}_3 \times \vec{i}_1 ds = \int_S a z y ds \vec{i}_3 - \int_S a z^2 ds \vec{i}_2.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Поскольку ось  $Oz$  является главной центральной осью, то центробежный момент инерции  $\int_S a z y ds = 0$ . С учетом этого запишем

$$\vec{M} = - \int_S a z^2 ds \vec{i}_2 = -a J_z \vec{i}_2 = -M \vec{i}_2, \quad (2.98)$$

где введены обозначения

$$M = - \int_S \sigma_{xx} z ds \vec{i}_2 = a J_y \quad a = \frac{M}{J_z}, \quad J_y = \int_S z^2 ds. \quad (2.99)$$

Здесь величина  $J_y$  называется осевым моментом инерции поперечного сечения стержня. Из формул (2.95) и (2.99) видно, что

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E J_y}. \quad (2.100)$$

Это соотношение также можно найти в элементарной теории изгиба, например, в источниках [4, 8, 17, 18].

Далее найдем решения для компонент вектора перемещения  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ . Из закона Гука (1.25) и выражений (2.94) следует, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) = \frac{1}{E} \sigma_{xx}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{yz} = 0, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{zx} = 0.\end{aligned}\quad (2.101)$$

Или с учетом представлений компонент тензора деформаций через компоненты вектора смещения (1.16) и (1.17)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{M}{EJ_y}z, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \frac{M}{EJ_y}z, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \frac{M}{EJ_y}z, \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Из уравнения (2.102) путем простого интегрирования по координате  $x$  получаем общее представление для компоненты продольного смещения:

$$u_x(x, y, z) = -\frac{M}{EJ_y}zx + u_x^0(y, z), \quad (2.104)$$

где функция  $u_x^0(z, y)$  пока остается неопределенной. Подставим (2.104) в выражения для  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  из (2.103):

$$\frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad -\frac{M}{EJ_y}x + \frac{\partial u_x^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0. \quad (2.105)$$

Откуда

$$u_y(x, y, z) = -x \frac{\partial u_x^0}{\partial y} + u_y^0(y, z), \quad u_z(x, y, z) = \frac{M}{2EJ_y}x^2 - x \frac{\partial u_x^0}{\partial z} + u_z^0(y, z). \quad (2.106)$$

Подставим (2.106) в выражения для  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  из (2.102):

$$-x \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_y^0}{\partial y} = \nu \frac{M}{EJ_y}z, \quad -x \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_z^0}{\partial z} = \nu \frac{M}{EJ_y}z. \quad (2.107)$$

Поскольку эти уравнения должны удовлетворяться для любых значений переменной  $z$ , то необходимо принять следующие ограничения на искомую функцию  $u_x^0$ :

$$\frac{\partial^2 u_x^0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} = 0. \quad (2.108)$$

Тогда, интегрируя каждое из уравнений (2.107), получим

$$u_y^0 = \nu \frac{M}{EJ_y} zy + f_y(z), \quad u_z^0 = \nu \frac{M}{2EJ_y} z^2 + f_z(y). \quad (2.109)$$

Подставим найденные представления (2.106), (2.109) для четырех функций  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $u_y^0$ ,  $u_z^0$  в третье уравнение из (2.103):

$$-2x \frac{\partial^2 u_x^0}{\partial y \partial z} + \nu \frac{M}{EJ_y} y + \frac{\partial f_y(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_z(y)}{\partial y} = 0. \quad (2.110)$$

Поскольку только первый член в этом уравнении зависит от переменной  $x$ , то необходимо принять следующие ограничения на функции  $u_x^0$ ,  $f_y(z)$  и  $f_z(y)$ :

$$\frac{\partial^2 u_x^0}{\partial y \partial z} = 0, \quad \nu \frac{M}{EJ_y} y + \frac{\partial f_y(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_z(y)}{\partial y} = 0. \quad (2.111)$$

С учетом ограничений (2.108) получим представления для искомым функций:

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \alpha_x x + \beta_x y + \gamma_x, \\ f_y(z) &= -\delta z + \gamma_y, \quad f_z(y) = -\nu \frac{M}{2EJ_y} y^2 + \delta y + \gamma_z, \end{aligned} \quad (2.112)$$

где  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\delta$  — произвольные постоянные. Тогда выражения для искомым компонент поля перемещения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= -\frac{M}{EJ_y} zx + \alpha_x x + \beta_x y + \gamma_x, \\ u_y(x, y, z) &= -\beta_x x + \nu \frac{M}{EJ_y} zy - \delta z + \gamma_y, \\ u_z(x, y, z) &= \frac{M}{2EJ_y} x^2 + \nu \frac{M}{2EJ_y} z^2 - \nu \frac{M}{2EJ_y} y^2 + \delta y + \gamma_z. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Для определения произвольных постоянных дополним граничные условия на левом торце стержня. Предположим, что закреплены центр тяжести левого конца стержня в точке  $O(0, 0, 0)$ , элемент оси  $x$ , а также элемент плоскости  $xOz$ . Соответствующие условия запишем в виде:

$$\left[ \begin{array}{l} u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \text{ при } x = y = z = 0. \quad (2.114)$$

Откуда имеем нулевые значения для произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} \gamma_x = 0, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = 0, \\ \alpha_x = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \delta = 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Таким образом, окончательно имеем следующее решение для компонент поля перемещения:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= -\frac{M}{EJ_y}zx, \\ u_y(x, y, z) &= \nu \frac{M}{EJ_y}zy, \\ u_z(x, y, z) &= \frac{M}{2EJ_y}(\nu(z^2 - y^2) + x^2). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Для получения функции, которая описывает кривую прогиба продольной оси стержня, можно подставить значения  $z = y = 0$  в полученное решение, тогда

$$u_z(x, y, z) = \frac{M}{2EJ_y}x^2. \quad (2.117)$$

Это выражение совпадает с кривой прогибов, которая описана в элементарной теории изгиба, (см., например, источники [4, 8, 17, 18]).

В листинге 14 представлен скрипт, с помощью которого можно получить численное решение описанной трехмерной задачи о чистом изгибе призматического стержня. Искомыми функциями являются компоненты вектора перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Боковые грани стержня свободны от напряжений. На левом торце для приведения численного решения к аналитическому заданы условия отсутствия смещения вдоль оси  $Ox$  и обращения в ноль касательных напряжений  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ . На правом торце действие момента задано через компоненту тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  согласно формулам (2.94), (2.95) и (2.99) с помощью команды `load ( ux ) = - M / Jy * z`. При этом учитываются направления осей  $Ox$  и  $Oz$  (нижние слои растягиваются, а верхние сжимаются).

В разделе **constraints** описаны условия, которые накладывают ограничения на функции  $u_y$  и  $u_z$ . Они исключают поворот объекта вокруг оси  $Ox$  и смещение как твердого тела. В этой задаче такие ограничения необходимы, поскольку ни на одной из частей поверхности не заданы условия на значения искомых функций  $u_y$  и  $u_z$ . Для удобства сравнения численного и аналитического решений вместо команды `integral (uz) = 0` использована другая запись `integral (uz) = integral (uzan)`. Для оценки точности решения приводятся соответствующие трехмерные графики компонент тензора напряжений и вектора перемещений на различных плоскостях. В разделе **summary** представлены значения функции  $u_z$  в точках в центре масс левой  $(0, 0, 0)$  и правой  $(l, 0, 0)$  гранях стержня с помощью команды **val**.

Листинг 14: Файл (listings/Problem\_Rod\_3D\_bending.pde)

```

title 'Bending rod 3D'      ! название задачи
! выбор системы координат
coordinates
cartesian3    ! 3D декартова система координат (x,y,z)

! описание искомых функций
variables
ux    ! функция смещения ux вдоль оси x
uy    ! функция смещения uy вдоль оси y
uz    ! функция смещения uz вдоль оси z

! системные настройки
select
serif =on    ! стиль шрифта на графиках с засечками
errlim =1e-5 ! точность расчетов

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
cm = 0.01    ! 1 см = 0.01 м
L = 5*cm    ! длина стержня в м
h = 0.5*cm  ! высота поперечного сечения в м
b = 0.5*cm  ! ширина поперечного сечения в м

E = 200E9 ! модуль Юнга в Па

```

$\nu = 0.3$  ! коэффициент Пуассона  
 $\mu = E / 2 / (1 + \nu)$  ! модуль сдвига  
 $\lambda = 2 * \mu * \nu / (1 - 2 * \nu)$  ! параметр Ламе

! компоненты тензора деформации

$\epsilon_{sxx} = dx(u_x)$   
 $\epsilon_{syy} = dy(u_y)$   
 $\epsilon_{szz} = dz(u_z)$   
 $\epsilon_{sxy} = 0.5 * (dy(u_x) + dx(u_y))$   
 $\epsilon_{sxz} = 0.5 * (dx(u_z) + dz(u_x))$   
 $\epsilon_{syz} = 0.5 * (dz(u_y) + dy(u_z))$   
 $Teta = \epsilon_{sxx} + \epsilon_{syy} + \epsilon_{szz}$

! компоненты тензора напряжений

$\sigma_{maxx} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{sxx}$   
 $\sigma_{mayy} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{syy}$   
 $\sigma_{mazz} = \lambda * Teta + 2 * \mu * \epsilon_{szz}$   
 $\sigma_{maxy} = 2 * \mu * \epsilon_{sxy}$   
 $\sigma_{maxz} = 2 * \mu * \epsilon_{sxz}$   
 $\sigma_{mayz} = 2 * \mu * \epsilon_{syz}$

! осевой момент инерции

$J_y = b * h^3 / 12$

! изгибающий момент

$M = 10$  ! Н\*м

! аналитические решения

$u_{xan} = -M / (E * J_y) * z * x$  ! для  $u_x$   
 $u_{yan} = \nu * M / (E * J_y) * z * y$  ! для  $u_y$   
 $u_{zan} = M / (2 * E * J_y) * (\nu * (z^2 - y^2) + x^2)$  ! для  $u_z$   
 $a = M / J_y$

! для  $\sigma_{maxx}$  — линейный закон по  $z$

$\sigma_{maxxan} = -a * z$

! потенциальная энергия деформации стержня

$W = 0.5 * \int (\sigma_{maxx} * \epsilon_{sxx} + \sigma_{mayy} * \epsilon_{syy} + \sigma_{mazz} * \epsilon_{szz} + 2 * \sigma_{maxy} * \epsilon_{sxy} + 2 * \sigma_{maxz} * \epsilon_{sxz} + 2 * \sigma_{mayz} * \epsilon_{syz})$

! масштабный множитель для более наглядного отображения смещений  
scale = 0.25\*globalmax(magnitude(x,y,z))/globalmax(magnitude(ux,uy,uz))

### equations

! уравнения равновесия

$$u_x: dx(\sigma_{maxx}) + dy(\sigma_{maxy}) + dz(\sigma_{maxz}) = 0$$

$$u_y: dx(\sigma_{maxy}) + dy(\sigma_{mayy}) + dz(\sigma_{mayz}) = 0$$

$$u_z: dx(\sigma_{maxz}) + dy(\sigma_{mayz}) + dz(\sigma_{mazz}) = 0$$

### extrusion

{ задание поверхностей, ограничивающих "выдавливание"  
при построении объемной области — параллелепипед }

surface "bottom" z = - 0.5 \* h ! поверхность # 1

surface "top" z = 0.5 \* h ! поверхность # 2

! описание области рассмотрения и граничных условий

### boundaries

! на нижней и верхней гранях нет нагрузок

surface 1 load ( ux ) = 0 load ( uy ) = 0 load ( uz ) = 0 ! z = - h / 2

surface 2 load ( ux ) = 0 load ( uy ) = 0 load ( uz ) = 0 ! z = h / 2

### surface 1

! продольное сечение в плоскости xOy

region 1 'longitudinal section bottom'

start ( 0, - 0.5 \* b )

value ( ux ) = 0 ! нет смещения вдоль оси x

load ( uy ) = 0 ! нет касательных напряжений вдоль оси y

load ( uz ) = 0 ! нет касательных напряжений вдоль оси z

line to ( 0, 0.5 \* b )

! на верхней границе продольного сечения нет нагрузок

load ( ux ) = 0

load ( uy ) = 0

load ( uz ) = 0

line to ( L, 0.5 \* b )

{ на правой грани приложен изгибающий момент,  
действие которого записано для напряжения  $\sigma_{maxx}$   
с учетом знака проекции на ось x и направления оси z,  
верхние слои сжимаются, нижние растягиваются }

load ( ux ) = - M / Jy \* z

```

    load ( uy ) = 0
    load ( uz ) = 0
    line to ( L, - 0.5 * b)
    !на нижней границе продольного сечения нет нагрузок
    load ( ux ) = 0
    load ( uy ) = 0
    load ( uz ) = 0
    line to close

```

### constraints

```

{ ограничения, накладываемые для исключения
  смещений и поворотов как твердого тела }
! для удобства сравнения численного и аналитического решений
integral ( uz ) = integral ( uzan )
integral ( uy ) = 0
integral ( dz (uy) - dy (uz) ) = 0

```

! построение графиков

### plots

! недеформированный стержень

```
grid ( x, y, z ) as "Undeformed rod"
```

! деформированный стержень

```
grid ( x + ux * scale, y + uy * scale, z + uz * scale ) as "Deformed rod"
```

!

деформированное сечение  $y=0$

```
grid ( x + ux * scale, z + uz * scale ) on y = 0 as "Rod section y=0"
```

! недеформированное продольное сечение  $x=0$

```
grid ( y, z ) on x = 0 as " Undeformed rod section x=0"
```

!деформированные продольные сечения  $x=0$ ,  $x=L$

```
grid ( y + uy * scale, z + uz * scale ) on x = 0 as "Rod section x=0"
```

```
grid ( y + uy * scale, z + uz * scale ) on x = L as "Rod section x=L"
```

! графики численного и аналитического решений  $\sigma_{maxx}$

! на различных сечениях

```
surface ( sigmamaxx ) on z = 0.5 * h as "Sigmamaxx graph z = h/2"
```

```
surface ( sigmamaxxan ) on z = 0.5 * h as "Sigmamaxxan graph z = h/2"
```

```
surface ( sigmamaxx ) on x = 0 as "Sigmamaxx graph x=0"
```

```
surface ( sigmamaxxan ) on x = 0 as "Sigmamaxxan graph x=0"
```

```

surface ( sigmaxx ) on x = L as "Sigmaxx graph x = L"
surface ( sigmaxxan ) on x = L as "Sigmaxxan graph x = L"

```

! графики численного и аналитического решений  $u_x$

```

surface ( ux ) on y = 0.5 * b as "ux graph y=b/2"
surface ( uxan ) on y = 0.5 * b as "uxan graph y=b/2"
contour ( abs ( ux - uxan ) ) on y = 0.5 * b as "|ux-uxan| graph y=b/2"

```

! графики численного и аналитического решений  $u_y$

```

surface ( uy ) on z = 0.25 * h as "uy graph z=h/4"
surface ( uyan ) on z = 0.25 * h as "uyan graph z=h/4"
contour ( abs ( uy - uyan ) ) on x = 0 as "|uy-uyan| graph x=0"

```

! графики численного и аналитического решений  $u_z$

```

surface ( uz ) on x = 0 as "uz graph x=0"
surface ( uzan ) on x = 0 as "uzan graph x=0"
contour ( abs ( uz - uzan ) ) on x = 0 as "|uz-uzan| graph x=0"
elevation ( uz, uzan ) from ( 0, 0, 0 ) to ( L, 0, 0 )
as "uz, uzan graphs on x-Line"

```

! вертикальные смещения верхней и нижней

! граней поперечного сечения  $x=L$

```

elevation ( uz ) from ( L, -0.5 * b, 0.5 * h ) to ( L, 0.5 * b, 0.5 * h )
as "uz graph on top edge"
elevation ( uz ) from ( L, -0.5 * b, -0.5 * h ) to ( L, 0.5 * b, -0.5 * h )
as "uz graph on bottom edge"

```

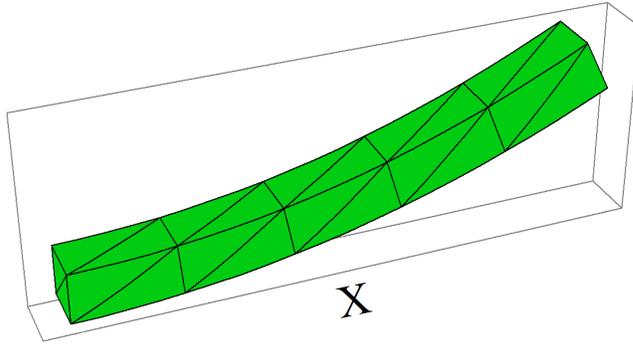
!отдельное окно для вывода результатов расчета

```

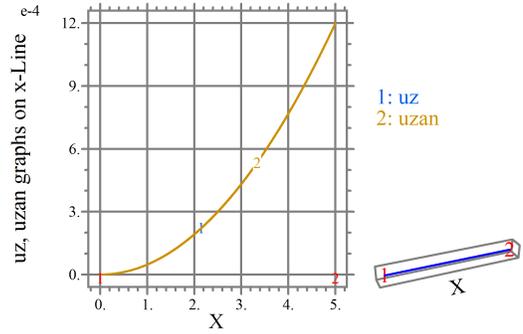
summary
report val(uz,0,0,0) ! значение uz(0,0,0)
report val(uzan,0,0,0) ! значение uzan(0,0,L)
report val(uz,L,0,0) ! значение uz(L,0,0)
report val(uzan,L,0,0) ! значение uzan(L,0,0)
report W ! потенциальная энергия
end

```

На рисунке 26 в качестве примеров расчетов представлены и графики функции смещения  $u_z$  вдоль продольной оси стержня  $Ox$ , которые получены численно и аналитически, а также деформированная форма бруса.



а) Деформированная форма в масштабе.



б) График функции  $u_z$ .

Рис. 26: Некоторые графические результаты расчетов для листинга 14.

## 2.10 Задача изгиба бруса на продольном сечении

Рассмотрим предыдущую задачу на продольном сечении стержня  $ABCD$  в плоскости  $xOz$  (см. рисунок 25) в рамках плоского напряженного состояния [1,2,4,14]. В этом случае будем считать, что  $\sigma_{yy} = 0$ . Получим выражение для компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{yy}$  из закона Гука (1.14):

$$\sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}).$$

Подставим это представление в выражения для компонент  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ , тогда по аналогии с рассмотренным случаем для цилиндра (см. пункт 2.8.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}, \end{aligned} \tag{2.118}$$

где  $\lambda^*$  определяется по правилу (2.87), а деформации  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  выражаются через компоненты вектора перемещения согласно (1.16). Решение задачи ищется для двух дифференциальных уравнений равновесия в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{2.119}$$

Аналитические решения для функций  $u_x$ ,  $u_z$  могут быть формально получены из (2.116) полагая  $y = 0$ :

$$u_x(x, z) = -\frac{M}{EJ_y}zx, \quad u_z(x, z) = \frac{M}{2EJ_y}(\nu z^2 + x^2). \quad (2.120)$$

Считая, что стержень имеет узкое прямоугольное поперечное сечение единичной толщины ( $b = 1$ ) величина  $J_y$  определяется как  $J_y = h^3/12$  [4]. Верхние грани свободны от нагрузок  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = 0$ . Левая граница жестко закреплена  $u_x = u_z = 0$ . На правой грани задан изгибающий момент.

В листинге 15 представлен скрипт, с помощью которого можно построить численное решение двумерной задачи об изгибе стержня. Искомыми функциями являются компоненты вектора перемещения  $u_x$ ,  $u_z$ . На правой грани действие момента по аналогии с трехмерной задачей задано через компоненту тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  согласно формулам (2.94), (2.95) и (2.99) с помощью команды `load ( ux ) = - M / Jy * z`. При этом учитываются направления осей  $Ox$  и  $Oz$  (нижние слои растягиваются, а верхние сжимаются). Для удобства сравнения численного решения с аналитическим приводятся соответствующие графики. В разделе `summary` представлены значения функций  $u_x$  и  $u_z$  в различных точках с помощью команды `val`.

Листинг 15: Файл (listings/Problem\_rod\_2D\_bending.pde)

```

title 'Bending rod 2D'      ! название задачи
! выбор системы координат
coordinates
cartesian2 ( "x", "z" ) ! 2D декартова система координат (x,z)

! описание искомым функций
variables
  ux ! функция продольного смещения ux
  uz ! функция поперечного смещения uz

! системные настройки
select
serif =on      ! стиль шрифта на графиках с засечками
errlim =1e-5  ! точность расчетов

```

textsize = 26 ! размер шрифта на графиках

! задание параметров задачи и определяющих соотношений

definitions

cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м

L = 5\*cm ! длина стержня в м

h = 0.5\*cm ! высота поперечного сечения в м

b = 1\*cm ! ширина поперечного сечения в м

E = 200E9 ! модуль Юнга в Па

nu = 0.3 ! коэффициент Пуассона

mu = E / 2 / ( 1 + nu ) ! модуль сдвига

lam = 2 \* mu \* nu / ( 1 - 2 \* nu ) ! параметр Ламе

! параметр Ламе для плоского напряженного состояния

lamz = 2 \* lam \* mu / ( lam + 2 \* mu )

! компоненты тензора деформации

epsxx = dx ( ux )

epszz = dz ( uz )

epsxz = 0.5 \* ( dx ( uz ) + dz ( ux ) )

Teta = epsxx + epszz

! компоненты тензора напряжений

sigmaxx = lamz \* Teta + 2 \* mu \* epsxx

sigmazz = lamz \* Teta + 2 \* mu \* epszz

sigmaxz = 2 \* mu \* epsxz

! осевой момент инерции для рассматриваемой задачи

! на продольном сечении

Jy = 1 \* h ^ 3 / 12 ! b = 1

! Изгибающий момент

M = 10 ! Н\*м

! аналитические решения

uxan = - M / ( E \* Jy ) \* z \* x ! для ux

uzan = M / ( 2 \* E \* Jy ) \* ( nu \* z ^ 2 + x ^ 2 ) ! для uz

uzanx = M / ( 2 \* E \* Jy ) \* x ^ 2 ! для uz на линии z = 0

a = M / Jy

! для  $\sigma_{xx}$  — линейный закон по  $z$

$$\sigma_{xx} = -a * z$$

! потенциальная энергия деформации стержня

! для случая плоского напряженного состояния

$$W = 0.5 * \int (\sigma_{xx} * \epsilon_{xx} + \sigma_{zz} * \epsilon_{zz} + 2 * \sigma_{xz} * \epsilon_{xz})$$

! масштабный множитель для более наглядного отображения смещений

$$\text{scale} = 0.25 * \frac{\text{globalmax}(\text{magnitude}(x,z))}{\text{globalmax}(\text{magnitude}(u_x, u_z))}$$

### equations

! уравнения равновесия

$$u_x: dx(\sigma_{xx}) + dz(\sigma_{xz}) = 0$$

$$u_z: dx(\sigma_{xz}) + dz(\sigma_{zz}) = 0$$

! описание области рассмотрения и граничных условий

### boundaries

region 1 'longitudinal section'

start ( 0, -0.5 \* h )

! левая грань жестко закреплена

$$\text{value}(u_x) = 0$$

$$\text{value}(u_z) = 0$$

line to ( 0, 0.5 \* h )

! на верхней границе продольного сечения нет нагрузок

$$\text{load}(u_x) = 0$$

$$\text{load}(u_z) = 0$$

line to ( L, 0.5 \* h )

{на правой грани действует изгибающий момент,  
действие которого записано для напряжения  $\sigma_{xx}$   
с учетом знака проекции на ось  $x$  и направления оси  $z$ ,  
верхние слои сжимаются, нижние растягиваются}

$$\text{load}(u_x) = -M / J_y * z$$

$$\text{load}(u_z) = 0$$

line to ( L, -0.5 \* h )

! на нижней границе продольного сечения нет нагрузок

$$\text{load}(u_x) = 0$$

```
load ( uz ) = 0  
line to close
```

! построение графиков

plots

! недеформированное продольное сечение стержня

```
grid ( x, z ) as "Undeformed rod section"
```

! деформированное продольное сечение стержня

```
grid ( x + ux * scale, z + uz * scale ) as "Deformed rod section"
```

! графики численных и аналитических решений

! на области и линиях

```
elevation ( sigmaxx, sigmaxxan ) from ( 0, 0 ) to ( L, 0 )  
as "sigmaxx, sigmaxxan graphs on x—Line z=0"
```

```
elevation ( sigmaxx, sigmaxxan ) from ( L, -0.5 * h ) to ( L, 0.5 * h )  
as "sigmaxx, sigmaxxan graphs on z—Line x=L"
```

```
surface ( ux ) as "ux graph"
```

```
surface ( uxa ) as "uxa graph"
```

```
vector(ux,uz) mesh points=26 penwidth=4 !вектор смещения
```

```
contour ( abs ( ux - uxa ) ) as "|ux-uxa| graph"
```

```
elevation ( ux, uxa ) from ( 0, 0.25 * h ) to ( L, 0.25 * h )  
as "ux, uxa graphs on x—Line z=0"
```

```
surface ( uz ) as "uz graph"
```

```
surface ( uza ) as "uza graph"
```

```
contour ( abs ( uz - uza ) ) as "|uz-uza| graph"
```

```
elevation ( uz, uza ) from ( 0, 0 ) to ( L, 0 )  
as "uz, uza graphs on x—Line z=0"
```

! отдельное окно для вывода результатов расчета

summary

```
report val ( uz, 0, 0 ) ! значение uz(0,0)
```

```
report val ( uza, 0, 0 ) ! значение uza(0,0)
```

```
report val ( uz, L, 0 ) ! значение uz(L,0)
```

```
report val ( uza, L, 0 ) ! значение uza(L,0)
```

```

report val ( ux, 0, 0.25 * h )      ! значение ux(0,h/4)
report val ( uхан, 0, 0.25 * h ) ! значение uхан(0,h/4)
report val ( ux, L, 0.25 * h )      ! значение ux(L,h/4)
report val ( uхан, L, 0.25 * h ) ! значение uхан(L,h/4)
report W ! потенциальная энергия
end

```

На рисунке 27 в качестве примера результатов расчетов представлены поле перемещения и график значений функции  $u_z$ , которая описывает поперечное перемещение точек. Видно, что наибольшее смещение наблюдается на правой грани, на которой приложен изгибающий момент.

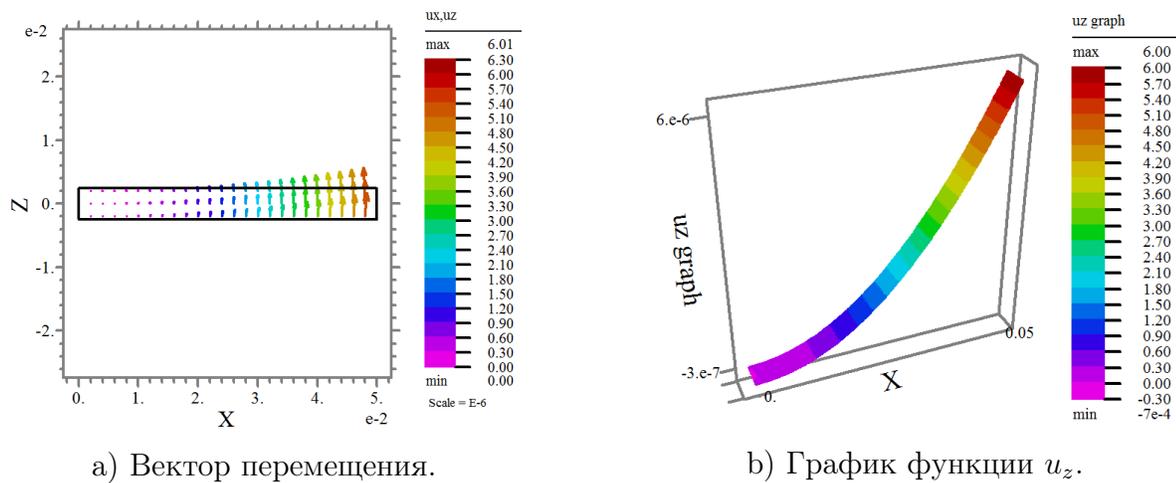


Рис. 27: Некоторые графические результаты расчетов для листинга 15.

## Задания

1. Используя листинг 15 постройте численное решение задачи об изгибе балки распределенной на верхней грани нагрузки  $q$ . Левый конец жестко закреплен, правый свободен от нагрузок. В качестве законов изменения  $q(x_*)$ ,  $x_* = x/l$ , используйте следующие:

- $q(x_*) = 1 + x_*^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ,
- $q(x_*) = 1 + \cos(\pi x_*^2/2)$ .

Сравните полученные численные решения с аналитическими, которые можно получить в рамках элементарной теории изгиба балок [8, 17, 18].

2. Проведите анализ, как изменяется величина прогиба в зависимости от величины модуля Юнга материала и геометрических размеров балки.

## 3 Задачи о свободных колебаниях упругих тел

### 3.1 Продольные колебания стержня

Стержнем называется объект, у которого один размер много больше двух других [8, 17, 18]. В конструкциях наиболее широкое распространение получили стержни, которые подвергаются растяжению или сжатию. Такие элементы используются при создании арок, ферм, стропильных систем, башен, вышек и других каркасных конструкций.

Свободные или собственные колебания тела называются колебания, которые происходят без внешнего воздействия [19]. При проектировании и исследовании на прочность объекта важное значение имеет рассмотрение соответствующей задачи об определении его собственных частот колебаний. Это обусловлено тем, что при совпадении собственной частоты с частотой эксплуатационных нагрузок может возникать резонанс. При этом явлении наблюдается резкое возрастание амплитуды колебаний, что приводит к разрушению.

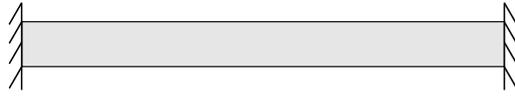
В качестве базового примера рассмотрим задачу о свободных продольных колебаниях упругого изотропного стержня в рамках одномерной модели. Длина стержня  $l$ , площадь поперечного сечения —  $S$ . Решение будем строить для двух вариантов граничных условий: оба конца стержня жестко защемлены или один конец жестко закреплен, а второй является свободным (см. рисунок 28). Уравнение свободных колебаний стержня, может быть получено из общей постановки задачи и записано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( SE \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

где  $u = u_x$  — функция продольного смещения. В случае, когда  $S$  и  $E$  — постоянные величины, то уравнение (3.1) можно переписать в виде:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

где введен в рассмотрение параметр  $a^2 = E/\rho$ . Отметим, что такой же вид имеет уравнение малых поперечных колебаний струны.



а) Жесткая заделка с обоих концов.



б) Консольная заделка слева.

Рис. 28: Два варианта граничных условий для стержня.

Решение уравнения (3.2), описывающего свободные продольные колебания стержня, будем искать в виде [19]

$$u(x, t) = v(x) e^{i\omega t}, \quad (3.3)$$

где  $\omega$  — круговая (циклическая) частота колебаний. После подстановки (3.3) в уравнение (3.2) получим

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 v = 0, \quad (3.4)$$

здесь  $\alpha = \omega/a$ . Характеристическое уравнение записывается как  $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$ . Откуда  $\lambda = \pm \alpha i$ . Соответствующее общее решение уравнения (3.3) имеет вид [13]

$$v = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x). \quad (3.5)$$

где  $A, B$  — произвольные константы. Рассмотрим первый вариант граничных условий, когда оба конца стержня жестко заделаны  $v(0) = v(l) = 0$ , поэтому должны одновременно выполняться равенства

$$\begin{cases} A \cos(\alpha 0) + B \sin(\alpha 0) = 0, \\ A \cos(\alpha l) + B \sin(\alpha l) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \sin(\alpha l) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что для отыскания нетривиального решения

$$v(x) = B \sin(\alpha x),$$

где  $B \neq 0$  необходимо принять  $\alpha_n = \pi n/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Соответствующие частоты и формы свободных колебаний определяются по формулам

$$\omega_n = a\alpha_n = \frac{a\pi}{l}n, \quad v_n(x) = B \sin(\alpha_n x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

В случае, если один конец стержня заделан, а другой свободен  $v(0) = 0$ ,  $v'(l) = 0$ , получим

$$\begin{cases} A \cos(\alpha 0) + B \sin(\alpha 0) = 0, \\ -A\alpha \sin(\alpha l) + B\alpha \cos(\alpha l) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B\alpha \cos(\alpha l) = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем, что нетривиальное решение записывается как

$$v(x) = B \sin(\alpha x),$$

где  $B \neq 0$  и необходимо принять  $\alpha_n = (-\pi/2 + \pi n)/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда собственные частоты формы колебаний определяются в аналитическом виде по формулам:

$$\omega_n = \frac{a\pi}{2l}(2n - 1), \quad v_n(x) = B \sin(\alpha_n x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Из полученных решений (3.6), (3.7) видно, что они определяются с точностью до значения константы  $B$ . Первая собственная частота для второго случая граничных условий ( $\omega_1 = a\pi/2$ ) в два раза меньше, чем для первого варианта.

В листинге 16 представлен скрипт для решения задачи о свободных продольных колебаниях стержня в рамках одномерной модели. С помощью служебного параметра `modes` в разделе `select` задается количество первых частот колебаний, которые необходимо найти. Имя параметра `lambda` является зарезервированным для обозначения искомым собственным значениям. В рассматриваемой задаче, как видно из уравнения колебаний (3.4), этот параметр равен  $\alpha^2$ . Для вычисления частоты  $\omega_*$  в Гц по данным круговой (циклической)  $\omega$  используется расчетная формула  $\omega_* = \omega/(2\pi)$  [19]. В разделе `summary` представлены полученные значения этих частот. Для оценки точности на печать выводятся также первые три значения  $\omega$ , полученные по соответствующей формуле (3.6).

Листинг 16: Расчет собственных частот стержня. Файл  
(listings/Problem\_Eigenvalues\_1D.pde)

```

title "Rod eigensvalues" ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian1 ! 1D декартова система координат с осью x

! описание искомой функции
variables
v ! функция продольного смещения

! системные настройки
select
modes = 4 ! количество мод колебаний

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
L = 5 * cm ! длина стержня

E = 200E9 ! модуль Юнга в Па
rho = 7700 ! плотность стали кг/м^3

alpha = sqrt ( lambda )
a = E / rho
omega = alpha * a ! круговая частота
omegaz = omega / ( 2*pi ) ! частота в Гц

! аналитические значения первых 3-х собственных частот
omega1 = a * pi / L
omega2 = a * pi * 2 / L
omega3 = a * pi * 3 / L

equations
! уравнение свободных колебаний
v : dx ( dx ( v ) ) + lambda * v = 0

! описание области рассмотрения и граничных условий
boundaries

```

```

region 1
start ( 0 ) ! жесткая заделка слева и справа
point value ( v ) = 0 ! перемещения слева (в точке x=0) отсутствуют
line to ( L )
point value ( v ) = 0 ! перемещения справа (в точке x= L) отсутствуют

! построение графиков для каждой найденной моды колебаний
plots
! график функции смещения
elevation ( v ) from ( 0 ) to ( L ) as " V graph"

!отдельное окно для вывода результатов расчета
summary
report omega1 as "1 Frequency (analit)"
report omega2 as "2 Frequency (analit)"
report omega3 as "3 Frequency (analit)"
report lambda
report omega as "Frequency"
report omegaz as "Frequency in Hz"
end

```

### Задания.

1. Исследуйте, как зависят формы колебаний и собственные частоты от параметров задачи:

- длины стержня  $l$ ,
- параметров материала стержня  $E$ ,  $\rho$ ,
- граничных условий.

2. Сравните численное  $v_* = v / \max v$  решение с аналитическим при  $B = 1$ .

3. Обратите внимание на количество точек перегиба функции смещения для различных мод колебаний.

4. Постройте графики зависимостей нескольких собственных частот от длины стержня. Для расчета частоты в одном скрипте для разных длин стержня используйте технологию `stage` [9, 11].

## 3.2 Изгибные колебания мембраны

Пластинкой называется объект с формой в виде прямой призмы или прямого цилиндра, высота которых (толщина) является малой по сравнению с двумя другими размерами [20]. Срединной плоскостью называется плоскость, которая делит пополам толщину пластинки. Мембраной называют абсолютно гибкую пластинку, при исследовании упругой деформации которой можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями в срединной плоскости [20]. Также мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу [21].

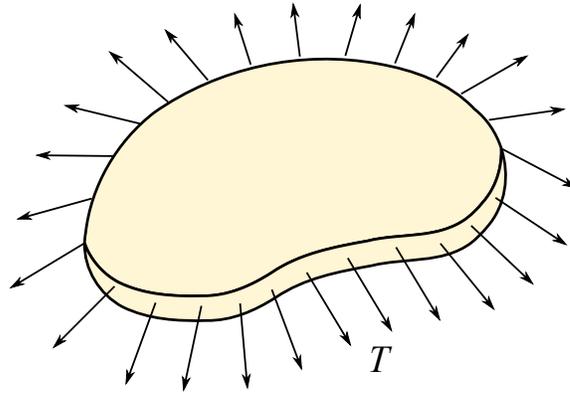


Рис. 29: Мембрана

Рассмотрим однородную мембрану, изготовленную из материала с плотностью  $\rho$ . Она натянута на плоский контур с усилием  $T$  (см. рисунок 29). Уравнения свободных изгибных колебаний мембраны в декартовой системе координат  $(x, y)$  имеет вид [21, 22]:

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.8)$$

где  $a^2 = T/\rho$ ,  $w(x, y, t)$  — функция прогиба, которая описывает перемещение точки с координатами  $(x, y)$  в направлении, перпендикулярном к срединной плоскости.

Решение уравнения (3.8) будем искать в виде

$$w(x, y, t) = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad (3.9)$$

где  $\omega$  — круговая (циклическая) частота свободных колебаний мембраны.

Можно использовать и другое представление  $w(x, y, t) = u(x, y) \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  — сдвиг фазы. Подставляя (3.9) в (3.8) получим уравнение для искомой функции  $u(x, y)$ :

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda^2 u = 0, \quad (3.10)$$

где частотный параметр  $\lambda^2 = \omega^2/a^2$ . Используя обозначение оператора Лапласа  $\Delta$  (см. приложение 4.1) в двумерной декартовой системе координат, можно кратко записать

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0. \quad (3.11)$$

Для жестко заземленной по краю мембраны граничное условие для уравнения (3.10) имеют вид:

$$u(x, y)|_{\partial S} = 0, \quad (3.12)$$

где  $\partial S$  — контур мембраны (граница срединной плоскости).

В качестве примера рассмотрим прямоугольную мембрану (или срединную плоскость абсолютно гибкой тонкой пластинки высотой  $h$ ) с длиной  $l$  и шириной  $b$  (см. рисунок 30).

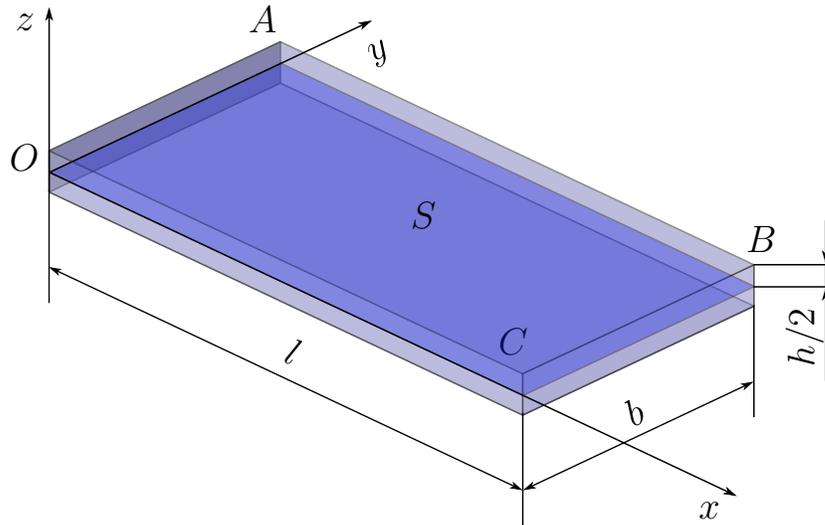


Рис. 30: Прямоугольная абсолютно гибкая тонкая пластинка (мембрана).

Тогда граничное условие (3.12) на контуре срединной плоскости  $OABC$  можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & y \in [0, b], \\ u(l, y) = 0, & y \in [0, b], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ u(x, b) = 0, & x \in [0, l]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Решение, которое сразу будет удовлетворять этим условиям, удобно искать в виде

$$w_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

где  $A_{mn}$  — константа. Подставляя это представление в (3.10), получим уравнение для отыскания собственных частот колебаний

$$-\left(\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right) + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left(\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right). \quad (3.15)$$

Из этой записи видно, что собственные значения и соответствующие им частоты могут повторяться, т.е.  $\lambda_{mn} = \lambda_{m_0 n_0}$  при некотором наборе номеров  $(m, n)$ . Количество таких повторений, равное числу решений в натуральных числах диофантова уравнения  $\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_0}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_0}{b}\right)^2$  дает кратность собственного значения  $\lambda_{mn}$  [22].

Соответствующее для (3.15) значение круговой частоты свободных колебаний:

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 a^2 \left(\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right) \Rightarrow \omega_{mn} = \pi a \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (3.16)$$

Для случая квадратной мембраны ( $l = b$ ) имеем

$$\omega_{mn} = \frac{\pi a}{l} \sqrt{m^2 + n^2}. \quad (3.17)$$

Узловыми линиями называются линии, вдоль которых амплитуды собственных гармонических колебаний равны нулю [23]. При  $m = n$  собственная частота  $\omega_{11} = \frac{\pi a}{l} \sqrt{2}$ . Для этой частоты узловые линии совпадают со сторонами мембраны.

При  $m = 1, n = 2$  и  $m = 2, n = 1$  имеем формально два решения

$$u_{12} = A_{12} \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} y, \quad u_{21} = A_{21} \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y,$$

которым соответствует собственная частота кратности 2:

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{\pi a}{l} \sqrt{5}.$$

В этом случае общая форма колебаний может быть записана как суперпозиция  $u_{12}$  и  $u_{21}$ :

$$u = u_{12} + u_{21} = 2 \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y \left( A_{12} \cos \frac{\pi}{l} y + A_{21} \cos \frac{\pi}{l} x \right).$$

Откуда следует, что уравнение для отыскания узловых линий, которые отличаются от краев мембраны, имеет вид:

$$A_{12} \cos \frac{\pi}{l} y + A_{21} \cos \frac{\pi}{l} x = 0.$$

Для некоторых частных случаев значений констант  $A_{12}, A_{21}$  можно получить решение просто в виде прямых. Например, при  $A_{12} = 0, A_{21} \neq 0$  имеем  $x = l/2$ . Для других общих случаев, когда  $A_{12} \neq \pm A_{21}$  и  $A_{12}, A_{21} \neq 0$ , узловые линии будут иметь более сложный вид [23].

С очерком развития теории гибких пластинок и оболочек можно ознакомиться в источнике [20].

В Листинге 17 приведен скрипт для численного решения задачи об определении собственных частот колебаний квадратной мембраны с жестко зашпеленными краями. Здесь в уравнении колебаний (3.11) использована запись оператора Лапласа через дивергенцию и градиент (см. приложение 4.1). Специальный параметр `lambda`, описывающий по умолчанию собственные значения, равен искомому значению  $\lambda^2$ .

В разделе `select` командой `modes=n` задается количество  $n$  первых собственных форм колебаний, для которых необходимо провести вычисления. После выполнения расчетов собственные значения сохраняются файле с на-

званием `<file_name>_eigen.txt`, который в зависимости от настроек располагается в папке проекта или в подкаталоге `<file_name>_output`. Здесь через `<file_name>` обозначено имя файла с расширением `pde` со скриптом. Собственные значения автоматически выводятся в первом окне результатов после исполнения скрипта. Для удобства сравнения значений первых двух собственных частот колебаний, которые получены аналитически и численно, введены дополнительные параметры `omega1`, `omega2`. Значение частоты в Гц определяется через параметр `omegaz`.

Листинг 17: Расчет собственных частот мембраны. Файл (listings/Membrane\_eigenvalues.pde)

```

title "Eigenvalue problem for square membrane" ! название задачи

! выбор системы координат
coordinates
cartesian2 ! 2D декартова система координат (x,y)

! описание искомой функции
variables
u ! функция поперечного смещения (прогиб)

! системные настройки
select
modes = 7 ! количество мод колебаний
painted ! контурные графики с заливкой

! задание параметров задачи и определяющих соотношений
definitions
cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
L = 30 * cm ! длина мембраны
b = L ! ширина равна длине

T = 1E4 ! натяжение в Па
rho = 7700 ! плотность стали кг/м^3
a = sqrt ( T / rho )

omega = sqrt ( lambda ) * a
omegaz = omega / ( 2*pi ) ! частота в Гц

```

```
! аналитические значения первых 2—х собственных частот
omega1 = pi * a / L * sqrt ( 2 )
omega2 = pi * a / L * sqrt ( 5 )
```

```
equations
```

```
! уравнение свободных колебаний
u: div ( grad ( u ) ) + lambda * u = 0
```

```
! описание области рассмотрения и граничных условий
```

```
boundaries
```

```
region 1
  start ( 0, 0 ) ! закрепление по всем периметру мембраны
  value ( u ) = 0
  line to ( L,0 ) to ( L , b ) to ( 0, b ) to close
```

```
monitors
```

```
  contour ( u ) ! контурный график функции u во время решения
```

```
! построение графиков для каждой найденной моды колебаний
```

```
plots
```

```
  contour ( u ) ! контурный график функции u
  surface ( u ) ! трехмерный график функции u
```

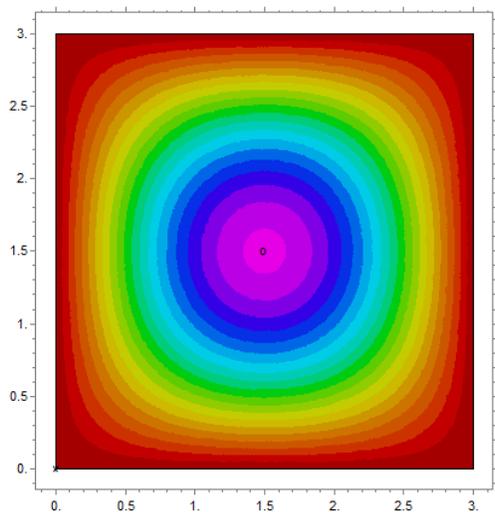
```
! отдельное окно для вывода результатов расчета
```

```
summary
```

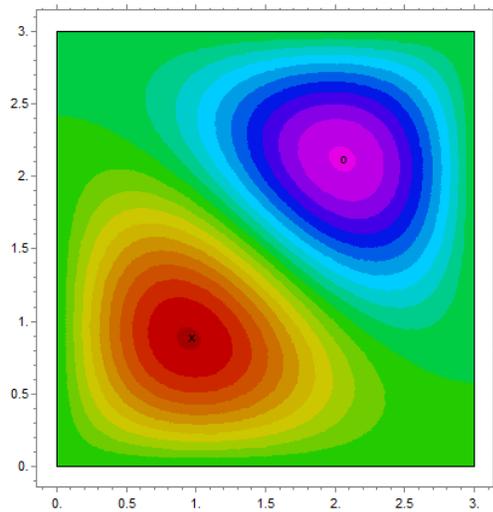
```
  report omega1 as "1 Frequency (analit)"
  report omega2 as "2 Frequency (analit)"
  report lambda
  report omega as "Frequency"
  report omegaz as "Frequency in Hz"
end
```

На рисунке 31 в качестве примера представлены графики функции смещения  $u$ . Из них видно, что форма колебаний становится более сложной с увеличением собственной частоты колебаний. Для наглядного отображения узловых линий следует удалить настройку `plotted` в разделе `select`. Они будут соответствовать линиям уровня  $u = 0$ . Видно, что вид этих линий также становится более сложным с увеличением частоты колебаний.

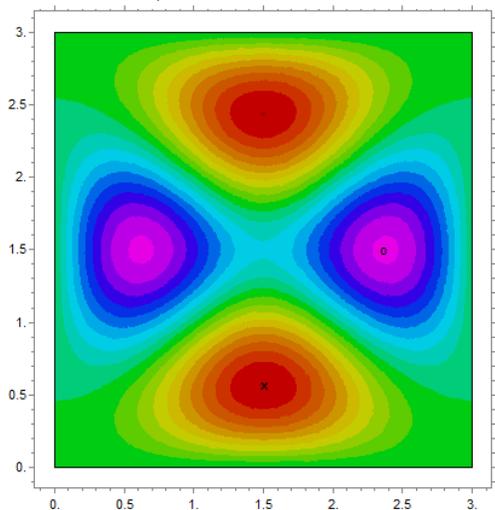
Одной из основополагающих экспериментальных работ, в которой приводилась демонстрация появления узловых линий для свободно колеблющейся квадратной тонкой пластины, принадлежит немецкому физику Хладни. С помощью песка, тонкой металлической или стеклянной пластинки и смычка возбуждались различные моды свободных колебаний пластинки. При этом песчинки песка собирались по длине узловых линий.



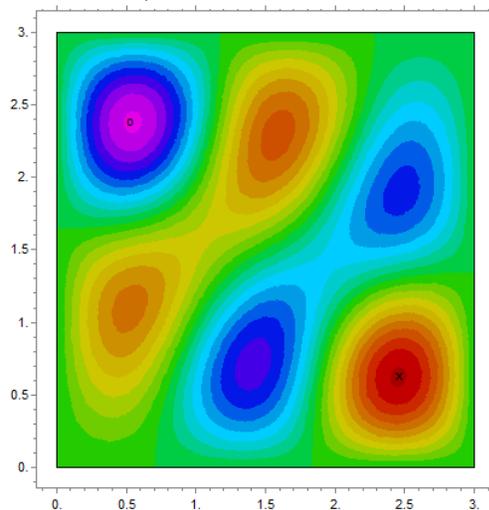
а) Первая мода.



б) Третья мода.



в) Пятая мода.



г) Седьмая мода.

Рис. 31: Модальный анализ. Графики функции перемещений квадратной мембраны.

### 3.3 Задания. Модальный анализ мембран

1. Сравнить собственные частоты для квадратной, круглой и треугольной мембран сопоставимого размера. Фрагмент скрипта для круглой мембраны:

```
definitions ! добавить значение радиуса в раздел definitions
R = 1.5 ! радиус круга
! описание области
boundaries
region 1
start ( -R, 0 ) value( u ) = 0 arc( center = 0, 0 ) angle=360
```

Фрагмент скрипта для треугольной мембраны:

```
definitions ! добавить значение стороны в раздел definitions
c = 1.5 ! сторона треугольника
! описание области
boundaries
region 1
start ( 0, 0 ) value( u ) = 0
line to ( c ,0 ) to ( 0.5 * c, 0.5 * c * sqrt( 3 )) to close
```

2. Сравнить собственные частоты для круглой мембраны и мембраны в форме кардиоиды. Фрагмент скрипта для задания границ и граничных условий задачи:

```
definitions ! добавить значения параметров в раздел definitions
R = 1
arrx = array for i (0 by 0.2 to 6) : 2 * R * cos( i ) - R * cos( 2 * i )
arry = array for i (0 by 0.2 to 6) : 2 * R * sin( i ) - R * sin( 2 * i )
! описание области
boundaries
region 1
start ( arrx [1], arry [1] ) value( u ) = 0
line list ( arrx , arry ) to close
```

3. Построить графики зависимостей для 1, 3, 5 собственных частот мембран от их характерного размера. Построить графики зависимостей для 1, 3, 5 собственных частот мембран от плотности материала мембраны.

4. Определить зависимости для 1, 3, 5 собственных частот прямоугольной (круглой) мембраны от ее длины (радиуса). Построить графики этих зависимостей.

5. Сравнить собственные частоты мембраны из листинга 17 и мембраны с закреплением вдоль одной из диагоналей. В этом случае раздел описания границ и граничных условий будет иметь вид:

```
boundaries
region 1
  start ( 0, 0 ) load( u ) = 0 ! свободные края
  line to ( L, 0 ) to ( L, b ) to ( 0, b ) to close
  ! диагональ
feature 'diag'
start ( 0, 0 ) value( u ) = 0 ! условие закрепления
line to ( L, b )
```

6. Сравнить собственные частоты мембраны из листинга 17 и мембраны с закреплением в угловых точках. Фрагмент скрипта для описания условия закрепления в углах:

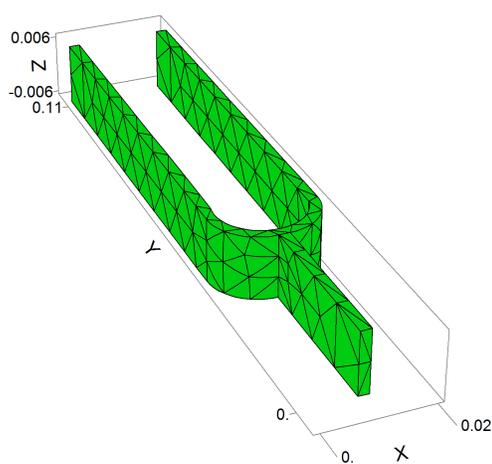
```
boundaries
region 1
start ( 0, 0 ) load( u ) = 0
line to ( L, 0 ) point value(u) = 0 ! закрепление в точке
load( u ) = 0
line to ( L, b ) point value(u) = 0 ! закрепление в точке
load( u ) = 0
line to ( 0, b ) point value(u) = 0 ! закрепление в точке
load(u) = 0 line to close
```

7. Определить собственные частоты мембраны с и без полости и сравнить их между собой. Построить графики зависимости для 1, 3, 5 и 7 собственных частот мембраны от размера полости. Варианты формы мембран представлены в приложении 4.5.

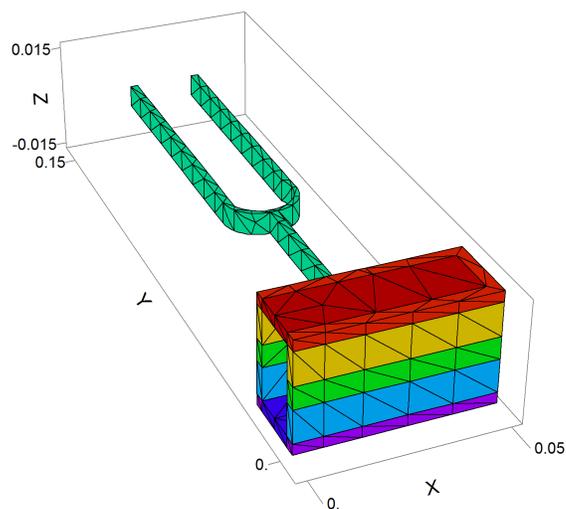
8. Определить собственные частоты составной (центр мембраны из другого материала) и однородной мембраны и сравнить их между собой. Построить графики зависимости для 1, 3, 5 собственных частот мембраны от размера включения. Воспользуйтесь приложениями 4.5 и 4.6 для выбора варианта и материала включения.

### 3.4 Вычисление собственных частот камертона

Камертон — простой акустический резонатор (см. рисунок 32 а.) в форме U-образной вилки (такая форма позволяет создавать чистый тон). Он используется во многих областях: для настройки музыкальных инструментов; для калибровки радиолокационных пушек; в гироскопах; в датчиках уровня; в медицине — хирургами-ортопедами для оценки костной проводимости и отоларингологами для проверки слуха. Высота тона камертона зависит от геометрических параметров (длины зубцов) и материала, из которого он изготовлен, обычно это сталь или алюминий. Звук ЛЯ первой октавы имеет частоту 440 Гц. Стандартные музыкальные камертоны настроены на эту частоту и используются для настройки струнных инструментов: роялей, скрипок, гитар. Частота камертонов для медицинских целей варьируется от 64 Гц до 4,096 кГц. В качестве подставки для камертона используют деревянный ящик, открытый с одной стороны (см. рисунок 32 б.). Последний играет роль резонатора, усиливающего звуковые волны. Длина ящика задается равной 0,25 длине звуковой волны камертона.



а) Камертон.



б) Камертон с резонатором.

Рис. 32: Расчетная сетка в задачах о камертонах.

В листинге 18 представлен скрипт задачи в двумерной постановке для расчета собственных частот камертона без резонатора. Искомыми функциями являются компоненты вектора смещения  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ . Количество

мод форм собственных колебаний задано в разделе `select` с помощью параметра `modes`. Уравнения свободных колебаний после отделения временного множителя для рассматриваемой задачи можно записать на основе общих уравнений (1.13):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho \omega^2 u_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho \omega^2 u_y = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Здесь компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций согласно закон Гука (1.26). В скрипте параметр `lambda` равен квадрату круговой частоты колебаний  $\omega^2$ . На всей границе области заданы условия отсутствия напряжений.

Листинг 18: Расчет собственных частот камертона в 2D постановке. Файл (listings/Frequency\_Analysis\_2D\_TuningFork.pde)

```
title '2D Tuning-fork' ! название задачи
```

```
coordinates
```

```
cartesian2 ! двумерная декартова система координат (x,y)
```

```
! описание искомым функций
```

```
variables
```

```
ux ! функция продольного смещения ux вдоль оси x
```

```
uy ! функция поперечного смещения uy вдоль оси y
```

```
select ! настройки для расчетов
```

```
modes = 4 ! количество собственных форм и значений
```

```
ngrid=10 ! размер ячеек триангуляции
```

```
errlim = 0.01 ! точность вычислений
```

```
! задание параметров задачи и определяющих соотношений
```

```
definitions
```

```
cm = 0.01 ! 1 см = 0.01 м
```

```
long = 8.7 * cm ! длина вилок
```

```
wide = 2 * cm ! ширина камертона
```

```
h_wide = wide/2
```

```
leg_long = 1.2 * cm ! длина ножки камертона
```

```
thick_wide = 0.28 * cm
```

$h\_thick\_wide = thick\_wide/2$

!параметры материала  
 $E = 210e9$  ! модуль Юнга стали  
 $\nu = 0.3$  ! коэффициент Пуассона  
 $\rho = 7800$  ! плотность стали

! компоненты тензора деформации  
 $\epsilon_{xx} = dx ( u_x )$   
 $\epsilon_{yy} = dy ( u_y )$   
 $\epsilon_{xy} = 0.5 * ( dy ( u_x ) + dx ( u_y ) )$

! модуль сдвига  
 $\mu = E / ( 2 * ( 1 + \nu ) )$

! компоненты тензора напряжений  
 $\sigma_{xx} = 2 * \mu * ( \epsilon_{xx} + \nu / ( 1 - 2 * \nu ) * ( \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} ) )$   
 $\sigma_{yy} = 2 * \mu * ( \epsilon_{yy} + \nu / ( 1 - 2 * \nu ) * ( \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} ) )$   
 $\sigma_{xy} = 2 * \mu * \epsilon_{xy}$

!масштабный множитель для более наглядного отображения смещений  
 $scale = 0.05 * globalmax(magnitude(x,y))/globalmax(magnitude(u_x,u_y))$

**equations** ! уравнения свободных колебаний

$u_x: dx ( \sigma_{xx} ) + dy ( \sigma_{xy} ) + \lambda * \rho * u_x = 0$   
 $u_y: dx ( \sigma_{xy} ) + dy ( \sigma_{yy} ) + \lambda * \rho * u_y = 0$

! ограничения на смещения и поворот объекта как  
! твердого тела

**constraints**

! на перемещения  
 $integral ( u_x ) = 0$   
 $integral ( u_y ) = 0$   
! на поворот  
 $integral ( dx ( u_y ) - dy ( u_x ) ) = 0$

! описание контура объекта и задание граничных условий

**boundaries**

**region** 1  
**start** (  $h\_wide - h\_thick\_wide$ , 0 )

! вся граница свободна от нагрузок

```
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
line to (h_wide - h_thick_wide, leg_long)
```

```
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
arc( center = h_wide-h_thick_wide, leg_long+h_wide-h_thick_wide)  
    angle=-90  
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
line to (0, long)  
to (thick_wide, long)  
to (thick_wide, leg_long + h_wide)  
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
arc( center = h_wide, leg_long + h_wide) angle = 180
```

```
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
line to (wide - thick_wide, long)  
to (wide, long)  
to (wide, leg_long+h_wide-h_thick_wide )
```

```
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
arc( center = h_wide+h_thick_wide, leg_long+h_wide-h_thick_wide)  
    angle=-90  
load( ux ) = 0 load( uy ) = 0  
line to (h_wide + h_thick_wide, 0)  
to close
```

! построение деформированной области

! в процесс вычислений

! удобно использовать для наглядности при длительных расчетах

monitors

```
grid ( x + ux * scale , y + uy * scale ) as "Deformed shape"  
report sqrt( lambda ) / ( 2 * pi ) as "Frequency in Hz"
```

! построение графиков для каждой найденной моды колебаний

plots

! форма колебаний

```
grid ( x + ux * scale , y + uy * scale ) as "Deformed shape"
```

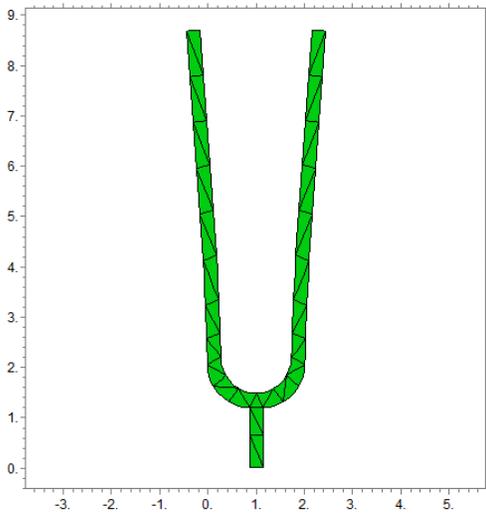
! отдельное окно для вывода результатов расчета

summary

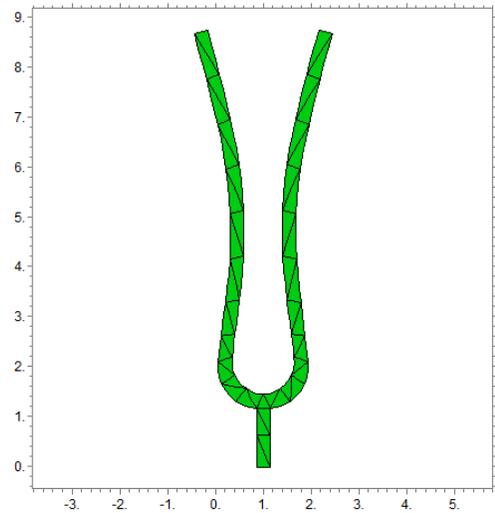
```
! собственное значение
report lambda
! собственная частота в герцах
report sqrt( lambda) / ( 2 * pi ) as "Frequency in Hz"
```

end

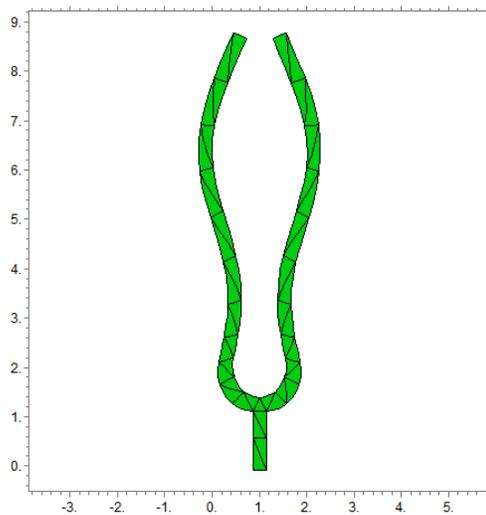
На рисунке 33 представлены примеры четырех форм свободных колебаний камертона.



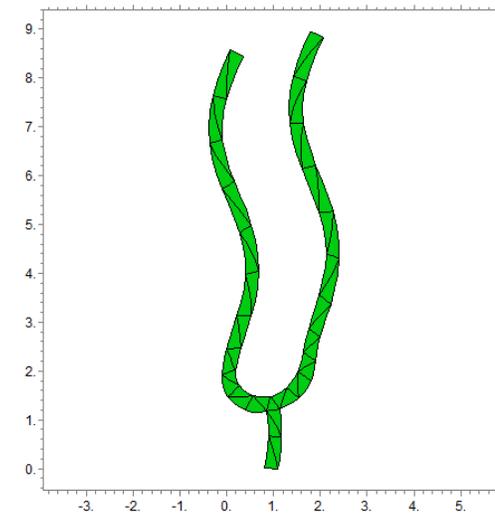
а) Первая форма.



б) Третья форма.



в) Пятая форма.



г) Шестая форма.

Рис. 33: Формы камертона для различных мод.

### 3.5 Задания к задаче о нахождении собственных частот камертона

Для выполнения следующих заданий используйте скрипт [18](#).

1. Выясните, как зависит первая собственная частота от:
  - (a) модуля Юнга,
  - (b) коэффициента Пуассона,
  - (c) плотности материала.
2. Создайте таблицы зависимостей для предыдущего задания.
3. Постройте графики зависимостей частоты от параметров из задания 1.
4. Выясните, как зависит первая собственная частота от:
  - (a) длины вилок камертона,
  - (b) длины ножки камертона,
  - (c) толщины вилок камертона.
5. Постройте графики зависимостей частоты от параметров из задания 4.
6. Напишите скрипт задачи в 3D постановке для расчета собственных частот камертона без коробки-резонатора.
7. Напишите скрипт задачи в 3D постановке для расчета собственных частот камертона с коробкой-резонатором. Расчетные сетки для вилочных камертонов представлены на рисунке [32](#).
8. Напишите скрипт задачи в 3D постановке для расчета собственных частот пластин ксилофона (рис. [32](#)).

Отметим, что время расчета 3D задачи будет значительно больше, чем для 2D задачи из-за перехода в трехмерное пространство и непростой геометрии модели. Для успешного получения численных результатов в бесплатной light версии необходимо параметр, определяющий размер ячеек триангуляции `ngrid`, задать небольшим, а точность вычислений `errlim` не стремиться задавать слишком маленькой. Иначе может произойти остановка процесса выполнения скрипта из-за установленных ограничений на количество элементов для этой версии.

## 4 Приложения

### 4.1 Приложение 1. Выражения для набла-оператора и оператора Лапласа для трех систем координат

Набла-оператор Гамильтона в трехмерной ортогональной криволинейной системе координат  $(q_1, q_2, q_3)$  называется символический вектор, который определяется следующим образом [3, 7]:

$$\nabla = \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (4.1)$$

или можно записать более компактно, используя правило суммирования по повторяющемуся индексу (соглашение Эйнштейна, «правило суммирования Эйнштейна»),

$$\nabla = \vec{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad (4.2)$$

где вектора  $\{\vec{e}_k\}$  образуют ортогональный нормированный базис,  $H_k$  — коэффициенты Ламе, которые соответствуют рассматриваемой системе координат.

Для непрерывной скалярной функции  $F(q_1, q_2, q_3)$ , используя выражение для набла-оператора (4.1), можно записать ее градиент  $\text{grad } F$ , обозначаемый также кратко  $\nabla F$ :

$$\text{grad } F = \nabla F = \frac{1}{H_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (4.3)$$

Ниже приведены записи выражения (4.3) для основных систем координат. Декартова система координат  $(q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z)$  (см. рисунок 34, а):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_3. \quad (4.4)$$

Цилиндрическая система координат  $(q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z)$  (см. рисунок 34, б):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (4.5)$$

Сферическая система координат ( $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \vartheta$ ):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (4.6)$$

Некоторые задачи теории упругости для однородных материалов сводятся к решению уравнению Лапласа. Для записи этого уравнения используется соответствующий оператор Лапласа, определяемый по правилу

$$\Delta = \text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2, \quad (4.7)$$

где  $\text{div} = \nabla \cdot$  — оператор дивергенции [3, 7]. Для дважды непрерывно дифференцируемой скалярной функции  $\Psi(q_1, q_2, q_3)$  общую запись оператора  $\Delta$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(q_1, q_2, q_3) &= \text{div grad } \Psi(q_1, q_2, q_3) = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ниже формула (4.8) выписана для трех систем координат.

Декартова система координат ( $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ) (см. рисунок 34, а):

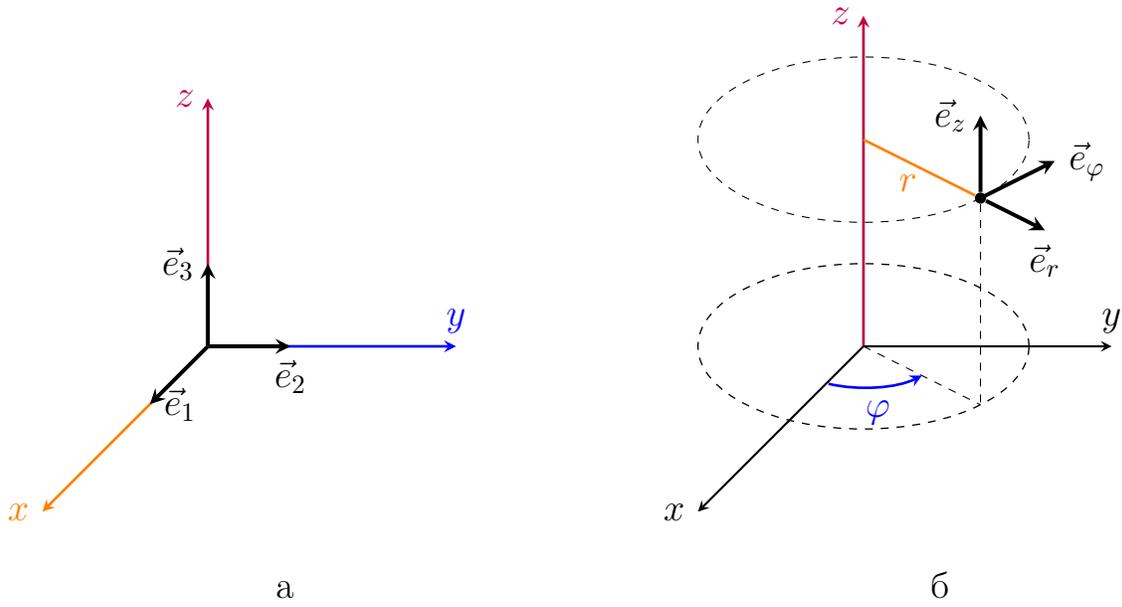
$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}. \quad (4.9)$$

Цилиндрическая система координат ( $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ) (см. рисунок 34, б):

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (4.10)$$

Сферическая система координат ( $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \vartheta$ ):

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}. \quad (4.11)$$



а б  
 Рис. 34: Декартова (а) и цилиндрическая (б) системы координат.

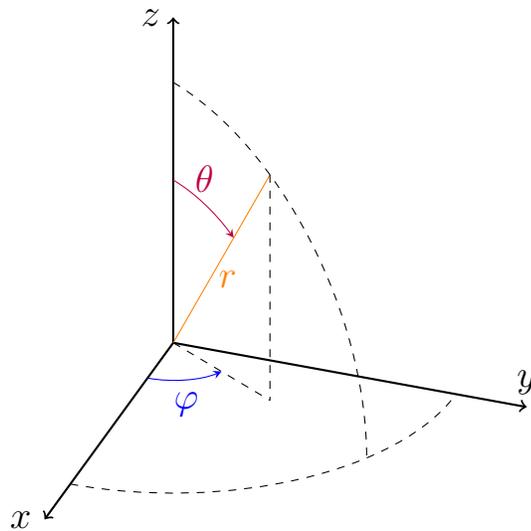


Рис. 35: Сферическая система координат

## 4.2 Приложение 2. Уравнения равновесия и определяющие соотношения в цилиндрической и сферической системах координат

Тензор напряжений Коши в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с учетом его симметричности может быть записан в виде

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr} \vec{e}_r \vec{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi} \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi + \sigma_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z + \sigma_{r\varphi} (\vec{e}_r \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \vec{e}_r) + \sigma_{rz} (\vec{e}_r \vec{e}_z + \vec{e}_z \vec{e}_r) + \sigma_{z\varphi} (\vec{e}_z \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \vec{e}_z). \quad (4.12)$$

Здесь  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  — базисные ортонормированные вектора. Аналогично записывается тензор деформаций  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Матрицы коэффициентов этих тензоров имеют вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{z\varphi} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\varphi} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

На основе (1.3) и определения операции дивергенции в цилиндрической системе координат, можно получить соответствующие три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} + F_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + F_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь  $F_r, F_\varphi, F_z$  — компоненты вектора массовых сил  $\vec{F}(F_r, F_\varphi, F_z)$ .

Из тензорной записи закона Гука (1.4) выпишем представления для компонент тензора напряжений Коши через компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{rr}, & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, & \sigma_{\varphi z} &= 2\mu\varepsilon_{\varphi z}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \sigma_{zr} &= 2\mu\varepsilon_{zr}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$ . Аналогично на основе и правила вычисления наблюда-

оператора можно получить выражения для компонент тензора деформаций в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Уравнения равновесия в сферической системе координат  $(r, \varphi, \theta)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} + F_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} + F_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta}{r} + F_\theta &= 0,\end{aligned}\quad (4.16)$$

где  $\vec{F}(F_r, F_\varphi, F_\theta)$  — вектор массовых сил. Выражения для компонент тензора деформаций в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_r \right), \\ \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), & \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right).\end{aligned}\quad (4.17)$$

Представления для компонент тензора напряжений через компоненты тензора деформаций, соответствующие закону Гука, можно записать формально заменив индекс  $z$  на  $\theta$  в выражениях (4.14).

### 4.3 Приложение 3. Уравнения совместности

#### деформаций в цилиндрической системе координат

Для решения некоторых задач теории упругости могут понадобиться уравнения совместности деформаций (1.12), записанные в цилиндрической системе координат. Ниже приводятся все 6 уравнений, описанные в источнике [1]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\varphi r})}{\partial r \partial \varphi} = 0, \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi r}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \varepsilon_{rz} \right) = 0, \\
 & -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{\varphi z})}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \varepsilon_{r\varphi})}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\varepsilon_{rz}}{r} \right) = 0, \\
 & r \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_{rr} - \frac{\partial (r \varepsilon_{\varphi\varphi})}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\varphi z})}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\varphi r})}{\partial z \partial \varphi} = 0, \\
 & \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} \left( \frac{\varepsilon_{zz}}{r} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{\varepsilon_{\varphi z}}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi \partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Их можно получить, используя представление набла-оператора для соответствующей системы координат.

#### 4.4 Приложение 4. Связь между компонентами тензора напряжений в цилиндрической и декартовой системах координат

Симметричный тензор напряжений  $\underline{\underline{\sigma}}$  в декартовой системе координат можно записать в виде [3, 7, 24]:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = & \sigma_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3 + \\ & + \sigma_{12}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + \sigma_{13}(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + \sigma_{23}(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Воспользуемся связью ортонормированных базисных векторов декартовой и цилиндрической систем координат:

$$\vec{e}_1 = \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_2 = \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z. \quad (4.20)$$

Подставим (4.20) в (4.19), получим

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = & \sigma_{11} (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + \\ & + \sigma_{22} (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + \sigma_{33} \vec{e}_z \vec{e}_z + \\ & + \sigma_{12} ((\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + \\ & + (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi)) + \\ & + \sigma_{13} ((\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \vec{e}_z + \vec{e}_z (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi)) + \\ & + \sigma_{23} ((\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \vec{e}_z + \vec{e}_z (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при диадах:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = & (\sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12} \cos \varphi \sin \varphi) \vec{e}_r \vec{e}_r + \\ & + (\sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - 2\sigma_{12} \cos \varphi \sin \varphi) \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi + \sigma_{33} \vec{e}_z \vec{e}_z + \\ & + (-\sigma_{11} \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{22} \cos \varphi \sin \varphi + \\ & + \sigma_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)) (\vec{e}_r \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \vec{e}_r) + \\ & + (\sigma_{13} \cos \varphi + \sigma_{23} \sin \varphi) (\vec{e}_r \vec{e}_z + \vec{e}_z \vec{e}_r) + \\ & + (-\sigma_{13} \sin \varphi + \sigma_{23} \cos \varphi) (\vec{e}_\varphi \vec{e}_z + \vec{e}_z \vec{e}_\varphi). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Сравнивая (4.21) с записью (4.12), получим соотношения, которые связывают компоненты тензора напряжений  $\underline{\underline{\sigma}}$  в цилиндрической и декартовой системах координат:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{33} \vec{e}_z \vec{e}_z, \\
\sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi, \\
\sigma_{rz} &= \sigma_{13} \cos \varphi + \sigma_{23} \sin \varphi, \\
\sigma_{\varphi z} &= -\sigma_{13} \sin \varphi + \sigma_{23} \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Заметим, что связь базисных векторов (4.20) может быть получена из общей формулы, которая представлена в источнике [3] на странице 853:

$$\vec{i}_k = \vec{e}_s \frac{1}{H_s} \frac{\partial x_k}{\partial q^s}, \tag{4.23}$$

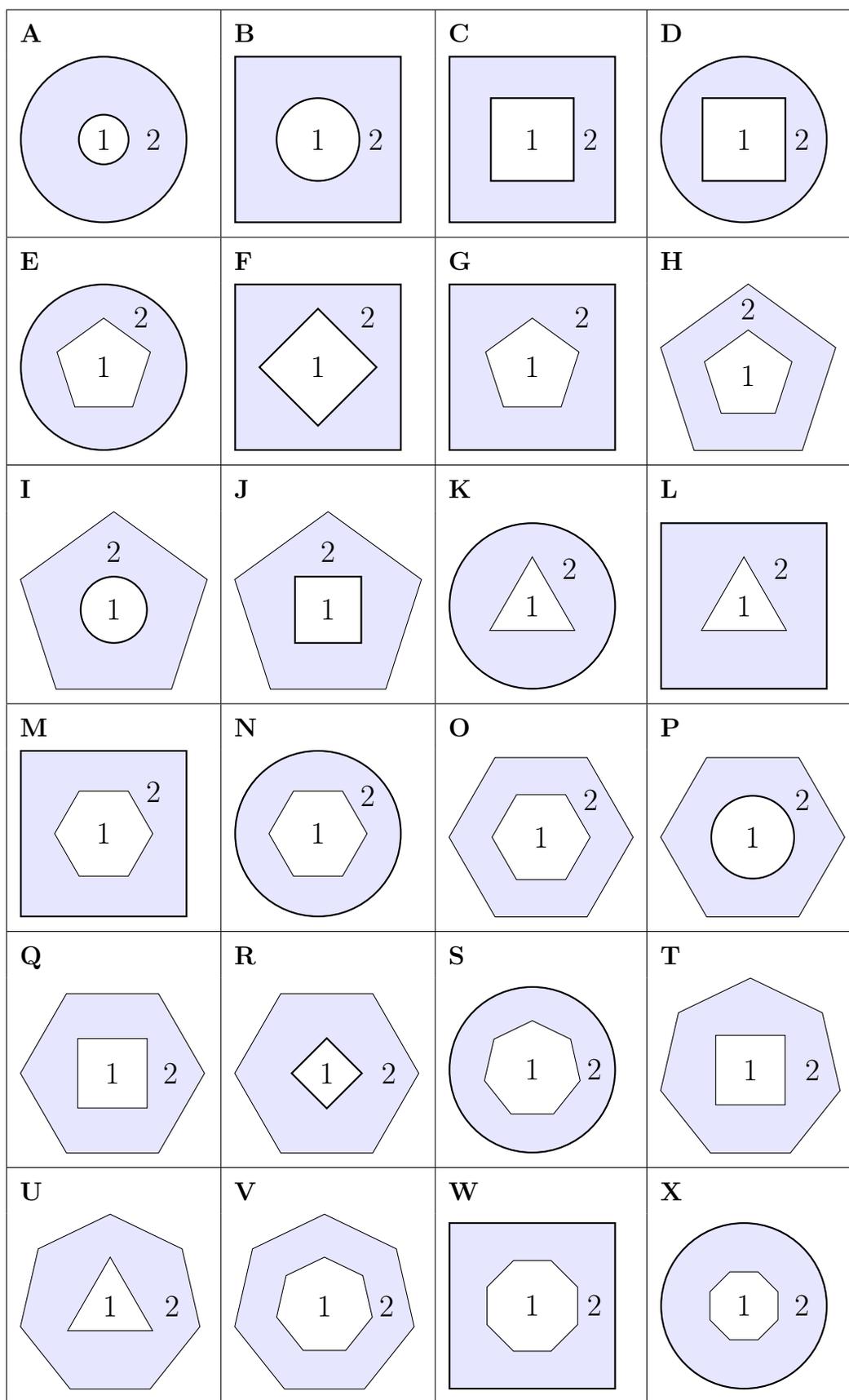
где  $\vec{i}_k$  — ортонормированные вектора декартовой системы координат,  $\vec{e}_s$  — криволинейной,  $H_s$  — соответствующие коэффициенты Ламе (см. приложение 4.1),  $x_k$  — декартовы координаты,  $q_s$  — криволинейные, здесь в правой части использовано правило суммирования по повторяющемуся индексу  $s$ . Для рассматриваемого случая цилиндрической системы координат в эту формулу следует подставить:  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ ,  $H_3 = 1$ ,  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = z$ ,  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ .

Из (4.20) следует обратная связь:

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3. \tag{4.24}$$

Подставляя эти выражения в представление (4.12) и используя описанную технику, можно получить соотношения, которые связывают компоненты тензора напряжений  $\underline{\underline{\sigma}}$  в декартовой и цилиндрической системах координат.

## 4.5 Приложение 5. Формы мембран и сечений вала



## 4.6 Приложение 6. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность некоторых материалов

№	Материал	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\nu$
1	Алюминий	2700	70-74	0.3-0.34
2	Бронза	7500-7870	112.78	0.32-0.35
3	Висмут	9800	31.9	0.33
4	Железо	7870	190-210	0.3-0.32
5	Золото	19320	79	0.44
6	Кадмий	8640	49.9	0.3
7	Каучук	919-920	0.00786	0.47
8	Константан	8900	162.79	0.33
9	Латунь	8500-8700	89.24-97.09	0.32-0.42
10	Манганин	8400	123.56	0.33
11	Медь	8600-8800	110-120	0.31-0.35
12	Никель	8910	210	0.28
13	Платина	21500	168	0.37
14	Плексиглас	118	5.25	0.35
15	Полиметилметакрилат	1190	60	0.33
16	Резина	1030-1060	0,002	0.49
17	Свинец	11350	16.67-18	0.42
18	Серебро	10500	83	0.38
19	Сталь легированная	7810-7850	205.94	0.25-0.30
20	Сталь углеродистая	7850	196.13-205.94	0.24-0.28
21	Стекло	2400-2600	49.03-78.45	0.24-0.27
22	Титан	4500	116	0.32
23	Цинк	7150	82.38	0.27
24	Чугун белый, серый	6600-7700	112.78-156.91	0.23-0.27

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кац А. М. Теория упругости. — СПб. : Лань, 2002. — 202 с.
2. Аминзаде Ю. А. Теория упругости. — М. : Высшая школа, 1976. — 272 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. — М. : Наука, 1970. — 939 с.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / Под ред. Г. С. Шапиро. — М. : Наука, 1975. — 576 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. — М. : Мир, 1975. — 872 с.
6. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. — М. : Либроком, 2009. — 536 с.
7. Зубов Л. М., Карякин М. И. Тензорное исчисление. Основы теории. — М. : Вузовская книга, 2005. — 117 с.
8. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : учебное пособие. — М. : МГТУ им. Баумана, 2018. — 542 с.
9. FlexPDE. FlexPDE Help. — 2023. — Режим доступа: <https://pdesolutions.com/help/index.html> (дата обращения: 01.07.2024).
10. Пустовалова О. Г., Дударев В. В. Основы работы в конечно-элементном пакете FlexPDE [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).
11. Пустовалова О. Г., Дударев В. В. Решение задач теплопроводности в конечно-элементном пакете FlexPDE [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2023. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).
12. Полянин А. Д. Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений. — М. : Издательство «ИПМех РАН», 2023. — 600 с.
13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М. : URSS, 2006. — 468 с.

14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М. : Наука, 1966. — 708 с.
15. Демидов С. П. Теория упругости: Учебник для вузов. — М. : Высшая школа, 1979. — 432 с.
16. Савельев Л. М. Теория упругости [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Самара : Издательство Самарского университета, 2021. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).
17. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. — 15 изд. — М. : Альянс, 2014. — 607 с.
18. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. — М. : URSS, 2018. — 455 с.
19. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. — 2 изд. — М. : Машиностроение, 1970. — 734 с.
20. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. — М. : Гостехиздат, 1956. — 419 с.
21. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — 5 изд. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
22. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — 2 изд. — М. : Физматлит, 2004. — 400 с.
23. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
24. Вильчевская Е. Н. Тензорная алгебра и тезорный анализ. — СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. — 124 с.

*Учебное издание*

Пустовалова Ольга Геннадиевна  
Дударев Владимир Владимирович

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПАКЕТЕ  
FlexPDE**

*Электронное издание*

Подписано к использованию 22.11.2024. Заказ № 9729. Тираж 10 экз.

Издательство Южного федерального университета.

Отдел полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции

Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.

344090, г. Ростов-на-Дону, пр-т Стачки, 200/1, тел. (863) 243-41-66.