

О. Г. Пустовалова, В. В. Дударев

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f$$

Решение задач теплопроводности в конечно-элементном пакете FlexPDE

Учебное пособие

$$a = \frac{k}{c\rho}$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + f$$



Ростов-на-Дону – Таганрог

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Г. ПУСТОВАЛОВА,
В. В. ДУДАРЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПАКЕТЕ
FlexPDE

Учебное пособие

Ростов-на-Дону — Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2023

УДК 519.63:536.2(075.8)

ББК 22.192+22.2 я73

П 89

*Издается по решению кафедры математического моделирования
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета (протокол № 8 от 18 мая 2023 г.)*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической
механики Ростовского государственного университета путей сообщения

О. А. Беляк;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Южного федерального университета А. М. Колесников

Пустовалова, О. Г.

П 89

Решение задач теплопроводности в конечно-элементном пакете FlexPDE [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. Г. Пустовалова, В. В. Дударев; Южный федеральный университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2023. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 2,05 Мб). — 1 электрон. опт. диск (CD-R). — Системные требования: процессор с тактовой частотой 1,5 ГГц и выше, 1 Гб оперативной памяти, Windows 7 SP1, Windows 8, 8.1, Windows 10 (32- и 64-разрядные версии), Acrobat Reader DC, привод DVD-ROM. — Загл. с экрана. — 126 с.

ISBN 978-5-9275-4482-0

Пособие посвящено численному решению задач теплопроводности с помощью метода конечных элементов в пакете FlexPDE. Приведены основные теоретические положения. Рассмотрены стационарные и нестационарные задачи. Для построения численных решений в одномерном, двумерном и трехмерном случаях приведены соответствующие листинги. Даны варианты заданий для закрепления пройденного материала. Учебное пособие предназначено для широкого круга читателей, в том числе для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 прикладная математика или 01.03.03 механика и математическое моделирование.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.63:536.2(075.8)

ББК 22.192+22.2 я73

ISBN 978-5-9275-4482-0

© Южный федеральный университет, 2023

© Пустовалова О. Г., Дударев В. В., 2023

Содержание

1	Краткие сведения теории теплопроводности	6
1.1	Понятие теплоты и способы ее переноса	6
1.2	Уравнение теплопроводности	7
1.3	Граничные условия в задачах теплопроводности	10
1.4	О коэффициенте теплопроводности	13
1.4.1	Задания к примеру 1	19
1.5	Условные классификации источников тепла	19
1.5.1	Задания к разделу 1.5	21
1.6	Контрольные вопросы по теме теплопроводность	22
2	Стационарные задачи теплопроводности, имеющие аналитическое решение	24
2.1	Одномерная задача теплопроводности для стержня	24
2.2	Задача о теплопередаче для двусоставного стержня	28
2.3	Задания к примеру 3	31
2.4	Теплопередача стержня с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты	32
2.4.1	Задания к разделу 2.4	34
2.5	Теплопередача стержня с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры	34
2.6	Задания к примеру 4	36
2.7	Теплопроводность цилиндрической стенки	38
2.8	Задания к разделу 2.7	41
3	Стационарные задачи теплопроводности 2D	42
3.1	Теплопередача через пластинку. 2D задача	42
3.2	Задания к примеру 6	44
3.3	Задания к примерам 7 — 9	50

3.4	Теплопередача через двухслойную область в 2D постановке . . .	51
3.5	Задания к примеру 10	53
3.6	Коэффициент теплопроводности зависит от температуры. 2D решение	54
3.7	Задания к примеру 11	56
3.8	Перенос тепла в составной конструкции. 2D решение	58
3.8.1	Задания к примеру 12	61
3.9	Распределение температуры в составной конструкции при наличии источника тепла	63
3.9.1	Задания к примеру 13	66
4	Стационарные задачи теплопроводности 3D	67
4.1	Стационарная задача теплопроводности для цилиндра в 3D декартовых координатах	67
4.1.1	Задания к примеру 15	72
4.2	Использование нескольких слоев и limited region	75
4.3	Источник тепла в ограниченном составном объекте	78
4.3.1	Задания к примерам 16 и 17	82
4.4	Задача теплопроводности с учетом анизотропии материала . . .	83
4.4.1	Задания к примеру 18.	86
5	Технология stage в стационарных задачах теплопроводности	87
5.1	Использование stage для перемещения источника тепла. 2D задача	88
5.2	Использование staged для изменения источника тепла. 2D задача	90
5.3	Использование staged для изменения знака у источника тепла. 2D задача	91

5.3.1	Задания к примерам 19 — 21	92
5.4	Использование stages в 3D задаче для изменения коэффициента теплопроводности	93
5.5	Использование staged в 3D задаче для изменения коэффициента теплопроводности	95
5.6	Использование staged в 3D задаче для изменения граничных условий	97
5.6.1	Задания к примерам 22 — 24	98
5.7	Раздел histories	99
5.7.1	Задания к примеру 25	102
6	Нестационарные задачи теплопроводности	103
6.1	Одномерная задача для стержня	103
6.1.1	Задания к примеру 26	111
6.2	Двумерная задача для пластины	112
6.2.1	Задания к примеру 27	115
6.3	Теплообмен шара с окружающей средой	115
6.3.1	Задания к примеру 28	118
7	Приложения	120
7.1	Приложение 1. Выражения для набла-оператора и оператора Лапласа для трех систем координат	120
7.2	Приложение 2. Плотность, теплопроводность и теплоемкость некоторых материалов	123
	Список литературы	124

1 Краткие сведения теории теплопроводности

1.1 Понятие теплоты и способы ее переноса

Как известно, некоторые свойства материала, скорость протекания химических и других процессов могут зависеть от температуры. Поэтому задачи, связанные с исследованием изменения температуры в результате различных факторов, являются важными и актуальными. Неотъемлемым понятием, связанным с температурой, является теплота. Теплота (количество теплоты) — внутренняя энергия (энергия беспорядочного атомно-молекулярного движения), которую получает или теряет объект в процессе теплообмена с окружающей средой или другими объектами [1]. Перенос теплоты внутри и вне объекта осуществляется при наличии разности температур и происходит от более горячей области к менее горячей. Следует отметить, что чем ниже температура объекта, тем меньше его внутренняя энергия. При температуре минус $273,15^{\circ}\text{C}$ (абсолютный нуль температуры) беспорядочное атомно-молекулярное движение прекращается.

Существуют три способа переноса тепла [2, 3]:

- теплопроводность — тепло передается благодаря непосредственному взаимодействию малых частиц (молекул, атомов или свободных электронов) объекта, это характерно для твердых тел;
- конвекция — тепло передается благодаря относительному движению частиц, это характерно для газов и жидкостей;
- излучение — тепло передается благодаря электромагнитному излучению.

В настоящем пособии будут исследованы различные задачи, связанные с переносом тепла только за счет теплопроводности. Их численные решения в общем случае будут получены с помощью метода конечных элементов (МКЭ), который реализован в пакете FlexPDE [4–9].

1.2 Уравнение теплопроводности

Рассмотрим объект конечных размеров в трехмерном пространстве, имеющий объем V с границей ∂V (см. рисунок 1). Обозначим через скалярную функцию $T(\vec{r}, t)$ температуру в точке A с радиус-вектором \vec{r} в заданный момент времени t .

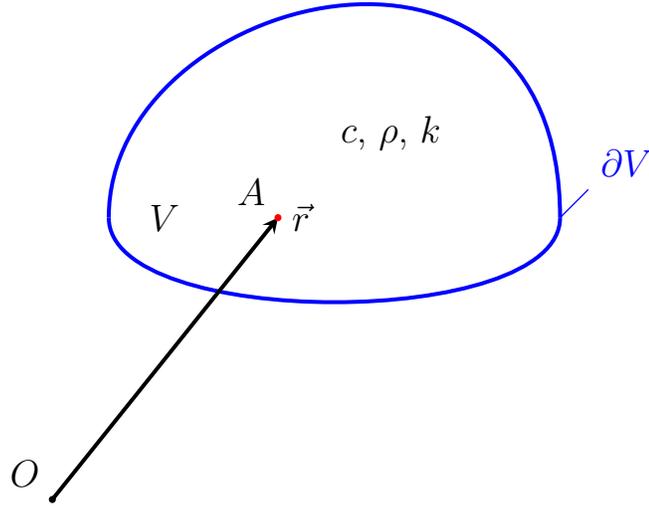


Рис. 1: Объемное тело объема V .

Вектор \vec{r} является векторной функцией от выбранных пространственных координат (например, декартовых (x, y, z) , цилиндрических (r, φ, z) , сферических (r, φ, ϑ) или других). Дифференциальное уравнение (уравнение теплопроводности), описывающие изменение температуры в рассматриваемом объекте с течением времени, при наличии источника тепла имеет вид [2, 10]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f, \quad (1.1)$$

или где c — коэффициент теплоемкости (удельная теплоемкость), ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности, $f(\vec{r}, t)$ — плотность поглощения или выделения тепла за единицу времени (мощность источника). В некоторых источниках коэффициент теплопроводности обозначается буквой λ (см., например, книгу [10]). Используя обозначение набла-оператора ∇ , это уравнение также можно записать как

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + f, \quad (1.2)$$

Определение оператора ∇ можно найти, например, в источниках [11, 12]. В приложении 7.1 для удобства приведены его представления для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат. В качестве примера приведем (1.1) в декартовой системе координат (x, y, z) :

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f. \quad (1.3)$$

В таблице 1 показаны единицы измерения введенных характеристик.

Таблица 1: Единицы измерения основных характеристик.

Характеристика	c	ρ	k	T
Единицы измерения	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$	град

В частном случае, когда источники тепла отсутствуют $f = 0$, процесс установившийся, то есть не зависит от времени, и коэффициент теплопроводности постоянен, из (1.1), используя оператор Лапласа $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, получаем

$$\Delta T = 0, \quad (1.4)$$

то есть стационарное температурное поле в среде с постоянными свойствами и без внутренних источников тепла не зависит от физических свойств среды, а определяется только формой рассматриваемого тела и распределением температуры на его гранях.

Если же есть внутренние источники тепла, то поле температуры зависит от геометрии тела, плотности внутренних источников тепла и коэффициента теплопроводности среды.

$$k\Delta T + f = 0. \quad (1.5)$$

В общем случае для неоднородного материала характеристики c , ρ , k могут быть переменными, т.е. функциями от радиус-вектора \vec{r} (пространственных координат). При рассмотрении процессов, связанных со значительными изменениями температуры, например, при застывании форм, учитывают зависимость термических характеристик и от температуры T . Тогда уравнение (1.1) будет нелинейным. Далее будут рассматриваться случаи, когда c , ρ , k

являются либо постоянными, либо переменными только по пространственным координатам. Тогда уравнение (1.1) будет линейным относительно неизвестной функции распределения температуры $T(\vec{r}, t)$.

Будем считать, что функция $T(\vec{r}, t)$, а также ее первые и вторые производные являются непрерывными функциями по всем ее аргументам (пространственным координатам и времени t) за исключением границы объекта ∂V и момента времени, с которого начинается поступление тепла. Множество точек пространства с заданными в них соответствующими значениями температуры в некоторый момент времени образуют температурное поле.

Одним из наглядных способов изображения изменения температуры в объекте являются изотермические поверхности (англ. isotherm, греч. «isos» — равный, одинаковый, подобный, «therme» — тепло), каждая из которых представляет собой множество точек с одинаковой температурой. Если пересечь такие поверхности некоторой плоскостью, то можно получить изотермы — линии, каждая из которых соответствует одинаковой температуре. На рисунке 2 показаны примеры трех изотерм, изображенных цветными линиями и соответствующих значениям температуры T_1 (красная линия), T_2 (фиолетовая линия), T_3 (синяя линия).

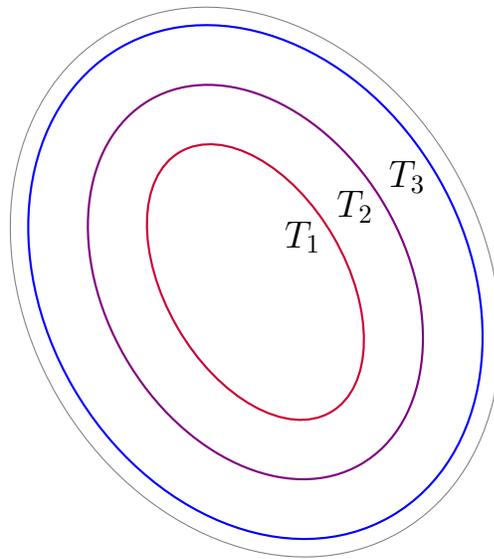


Рис. 2: Пример трех изотерм внутри объекта.

Важной характеристикой, описывающей процесс изменения температуры

в объекте, является вектор теплового потока в точке (или вектор потока тепла в точке) $\vec{q}(\vec{r}, t)$. Также эту величину называют плотностью теплового потока — количество энергии, которое проходит через единицу площади в единицу времени). Значение \vec{q} определяется по правилу (согласно закону Фурье) [10]:

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T = -k \nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}, \quad (1.6)$$

где $\operatorname{grad} T = \nabla T$ — градиент температуры, $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная функции T по направлению нормали n к изотермической поверхности, \vec{n} — единичный вектор нормали, направленной в сторону увеличения температуры. Таким образом, вектор теплового потока прямо пропорционален градиенту температуры. Знак минус « $-$ » в формуле (1.6) показывает, что передача тепла происходит в направлении от области с более высокой температурой к области с меньшей температурой. На рисунке 3 показаны ∇T , \vec{n} , \vec{q} и фрагменты изотерм, соответствующих различным значениям температуры.

Для построения решения уравнения теплопроводности (1.1) в общем случае необходимо иметь кроме граничных условий, также начальное условие. Начальное (временное) условие описывает закон распределения температуры в каждой точке объекта (или части пространства) в отсчетный (начальный) момент времени t_* , принятый за отсчетный. Это условие можно записать в следующей форме:

$$T(\vec{r}, t_*) = F(\vec{r}), \quad A(\vec{r}) \in V, \quad (1.7)$$

где F — известная непрерывная функция. Если в начальный момент времени распределение температуры считается однородным (одинаковым во всех точках объекта), то функция $F(\vec{r})$ будет постоянной, т.е. $F(\vec{r}) = T_0 = \text{const}$.

1.3 Граничные условия в задачах теплопроводности

Граничные условия описывают как взаимодействует тело с другими телами или окружающей средой на его границе ∂V . Такие условия можно условно разделить на несколько видов [10].

1. Граничное условие первого рода (граничное условие Дирихле). На гра-

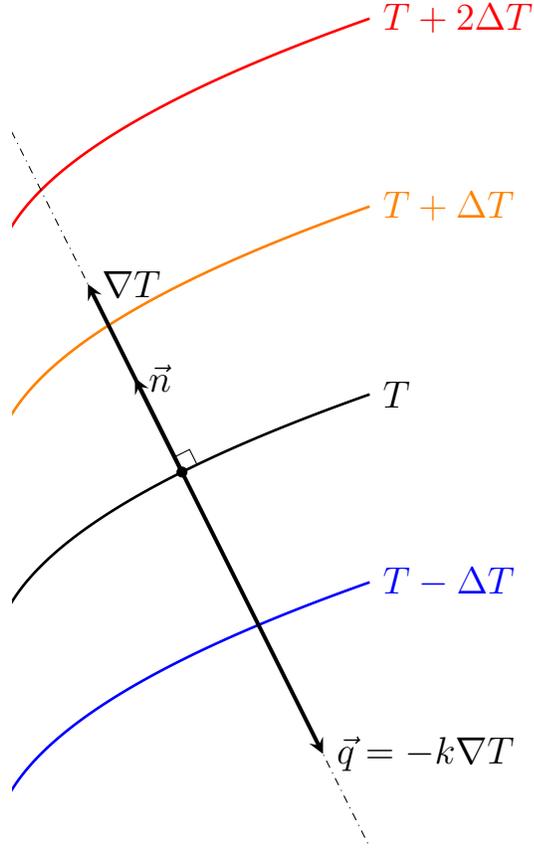


Рис. 3: Направление вектора потока тепла \vec{q} .

нице тела (в каждой точке A границы ∂V) в каждый момент времени t задан закон распределения температуры:

$$T(\vec{r}_*, t) = T_s(\vec{r}_*, t), \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V, \quad (1.8)$$

где $T_s(\vec{r}_*, t)$ — известная функция, заданная на границе тела. Для некоторых прикладных задач теплопроводности в качестве функции $T_s(\vec{r}_*, t)$ выбирается константа $T_s(\vec{r}_*, t) = const$, т.е. на границе тела температура не изменяется в течение всего времени рассмотрения.

2. Граничное условие второго рода (граничное условие Неймана). На границе тела в каждый момент времени t задан закон изменения теплового потока:

$$\vec{q}(\vec{r}_*, t) = \vec{q}_s(\vec{r}_*, t), \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V, \quad (1.9)$$

где $\vec{q}_s(\vec{r}_*, t)$ — известная функция. Например, функция $\vec{q}_s(\vec{r}_*, t) = 0$ описыва-

ет случай полной теплоизоляции на границе, т.е. теплообмен с окружающей средой или другими контактирующими объектами не происходит.

Граничное условие (1.9) с учетом определения (1.6) можно записать также в скалярном виде

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{r}_*, t) = q_s(\vec{r}_*, t), \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V, \quad (1.10)$$

где $q_s(\vec{r}_*, t)$ — заданная скалярная функция на границе области, занимаемой телом.

3. Граничное условие третьего рода. На границе тела в каждый момент времени t задан закон конвективного теплообмена (закон Ньютона):

$$\vec{q}(\vec{r}_*, t) = \alpha(T_s - T_0)\vec{n}, \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V, \quad (1.11)$$

или в скалярном виде

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{r}_*, t) = \alpha(T_s - T_0), \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V, \quad (1.12)$$

где α — коэффициент теплообмена (коэффициент поверхностной теплопередачи), T_s — температура поверхности тела, T_0 — температура окружающей среды. Из (1.11) видно, что вектор-функция \vec{q} на границе тела является линейной, а ее значение в каждый момент времени прямо пропорционально величине $(T_s - T_0)$. Обычно такое условие используется при исследовании процессов не зависящих от времени t . В более общем случае коэффициент α может определяться различными факторами, например, видом теплоносителя и его температурой, температурой напора, видом конвекции и режимом течения, направлением обтекания, геометрией границы тела и т. д.

4. Граничные условия четвертого рода. На границе контакта двух тел в каждый момент времени t заданы условия непрерывности теплового потока и температуры:

$$\begin{cases} \vec{q}_1(\vec{r}_*, t) = \vec{q}_2(\vec{r}_*, t), \\ T_1(\vec{r}_*, t) = T_2(\vec{r}_*, t), \end{cases}, \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V_*, \quad (1.13)$$

или

$$\begin{cases} -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}(\vec{r}_*, t) = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}(\vec{r}_*, t), \\ T_1(\vec{r}_*, t) = T_2(\vec{r}_*, t), \end{cases}, \quad A(\vec{r}_*) \in \partial V_*, \quad (1.14)$$

где \vec{q}_i и T_i , $i = 1, 2$ — соответственно значения тепловых потоков и температур каждого из тел на границе контакта. Эти условия используются для описания теплового взаимодействия непосредственно соприкасающихся двух твердых тел с различными коэффициентами теплопроводности k_1 , k_2 или твердого тела с жидкостью или газом.

Следует отметить, что также возможны ситуации, когда на различных частях границы объекта заданы различные виды граничных условий.

1.4 О коэффициенте теплопроводности

Коэффициент теплопроводности k характеризует способность вещества проводить тепло (чем больше его значение, тем выше способность материала проводить тепловую энергию). Металлы хорошо проводят тепло и обычно имеют большое значение k , а изоляционные материалы (пенопласт, вата, войлок, минеральная вата) — наоборот. Поэтому материалы с большими значениями коэффициента теплопроводности широко используются в системах охлаждения и отопления, а материалы с маленькими значениями коэффициента теплопроводности ($k < 0.25$) — в качестве теплоизоляции. Порядок значений k для различных веществ представлены на диаграмме (см. рисунок 4) [13]. Поскольку k является характеристикой материала, то его конкретное значение определяется экспериментально и в общем случае зависит различных аспектов (агрегатного состояния, микроструктуры вещества, наличия примесей, температуры и т.д.).

В металлах тепло передается в основном благодаря диффузии свободных электронов. Для большинства металлов значение коэффициента k уменьшается с увеличением температуры, а для металлов с примесей этот эффект проявляется более сильно [14]. У твердых диэлектриков (например, полимеры, резина) значение коэффициента k наоборот увеличивается с ростом температуры. Как правило, для более плотные материалы обладают большей

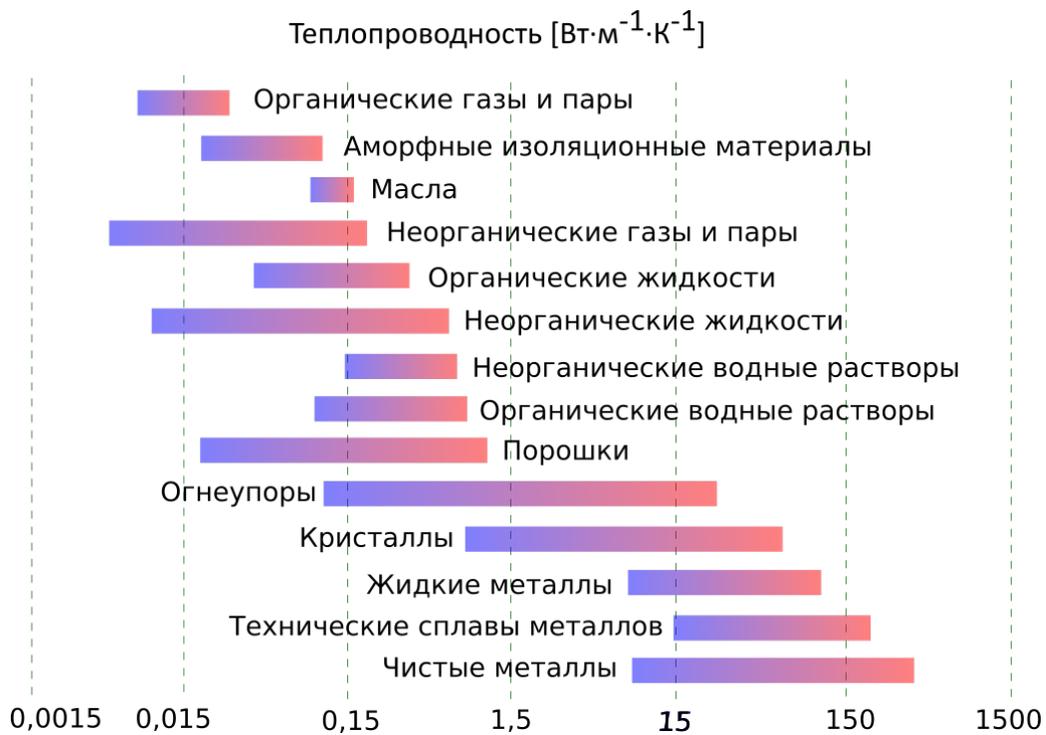


Рис. 4: Порядок значений коэффициента k для различных веществ.

теплопроводностью, чем менее плотные. На теплопроводность пористых материалов оказывает существенное влияние пористость и влажность.

Материал называется однородным (гомогенным (англ. homogeneous), греч. «hom-» — равный, одинаковый, «genos» — род), если его свойства одинаковы во всех его точках, т.е. не зависят от координат, и неоднородным (негомогенный (англ. non homogeneous, heterogeneous), греч. «hetero-» — различный), если его свойства зависят от координат. Материал называется изотропным ((англ. isotropic), греч. «isos» — равный, одинаковый, «tropikos» — относящийся к повороту) по отношению к некоторому свойству, если это свойство не зависит от выбора направления в точке, и анизотропным ((англ. anisotropic), греч. «anisos» — неравный, различный) — если зависит.

Некоторые кристаллы с некубической решеткой (например, сапфир) и искусственные материалы (например, композиты) обладают анизотропией теплопроводности, поэтому коэффициент теплопроводности для них зависит от направления. Для описания такой анизотропии используется симметричный тензор второго ранга \mathbf{K} , матрица коэффициентов его компонент в декартовой системе координат (x, y, z) может быть записана в виде [15]

$$\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix},$$

здесь $k_{xy} = k_{yx}$, $k_{xz} = k_{zx}$, $k_{yz} = k_{zy}$. Если оси декартовой системы координат обозначены как (x_1, x_2, x_3) с ортами $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, то можно, используя правило суммирования Эйнштейна по повторяющемуся индексу, кратко записать представление тензора \mathbf{K} через алгебраическую сумму диад [11]

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = k_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j,$$

где $k_{ij} = k_{ji}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$. Матрица коэффициентов, соответственно запишется как

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}.$$

В случае анизотропного материала уравнение теплопроводности (1.2) сохраняет свою форму:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla T) + f, \quad (1.15)$$

или в покомпонентном виде в декартовой системе координат (x, y, z) :

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В системе (x_1, x_2, x_3) с учетом правила суммирования по повторяющемуся

индексу правая часть может быть представлена более компактно:

$$\begin{aligned} \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \left(k_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot \frac{\partial T}{\partial x_p} \vec{e}_p \right) + f &= \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_p} \vec{e}_i \delta_{jp} \right) + f = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \delta_{si} + f = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + f, \end{aligned} \quad (1.17)$$

тогда получим запись уравнения теплопроводности

$$c\rho T_{,t} = (k_{ij} T_{,j})_{,i} + f, \quad (1.18)$$

где введено обозначение частной производной [11]

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{,i}. \quad (1.19)$$

Если материал однородный, то это уравнение (1.16) с учетом симметричности тензора \mathbf{K} примет запись

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= k_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \\ &+ 2k_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 2k_{xz} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + 2k_{yz} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + f \end{aligned} \quad (1.20)$$

или при других обозначениях осей координат с учетом равенства смешанных частных производных $T_{,ji} = T_{,ij}$ имеем кратко

$$c\rho T_{,t} = k_{ij} T_{,ij} + f. \quad (1.21)$$

Следует отметить, что за счет перехода к другой декартовой системе координат (x', y', z') , которая может быть получена путем поворотов исходной (x, y, z) , тензор \mathbf{K} может быть приведен к шаровому тензору с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} k_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z'} \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (1.20) примет более простой вид

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k_{x'}\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + k_{y'}\frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} + k_{z'}\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2} + f. \quad (1.22)$$

При этом оси координат (x', y', z') называются главными осями теплопроводности, а коэффициенты $k_{x'}, k_{y'}, k_{z'}$ — главными коэффициентами теплопроводности соответственно [15]. Задача поиска значений коэффициентов $k_{x'}, k_{y'}, k_{z'}$ и направлений осей (x', y', z') сводится к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы коэффициентов тензора \mathbf{K} [11, 16].

В источнике [17] приведены данные для коэффициента теплопроводности k , теплоемкости c и плотности ρ различных материалов.

При рассмотрении ряда практических задач рассматривается однородный и изотропный материал (параметры c , ρ и k не зависят от пространственных координат), в этом случае уравнение теплопроводности (1.2) принимает вид

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla \cdot (\nabla T) + f \quad (1.23)$$

или, используя оператор Лапласа $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$,

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + f. \quad (1.24)$$

Разделив левую и правую части на множитель $c\rho$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \tilde{f}, \quad (1.25)$$

где $\tilde{f} = f/(c\rho)$ и введен в рассмотрение коэффициент температуропроводности a :

$$a = \frac{k}{c\rho}. \quad (1.26)$$

Легко убедиться, что размерность этой величины $[a] = \text{м}^2/\text{с}$. Самый высокий коэффициент температуропроводности у чистого серебра. Скорость теплопередачи выше, чем выше коэффициент температуропроводности. Для теплоизоляции выбирают материалы, обладающие малым коэффициентом температуропроводности.

Используя представление оператора Лапласа (см. приложение 7.1), приведем в качестве примера (1.25) для декартовой системы координат (x, y, z)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \tilde{f}. \quad (1.27)$$

Также могут быть получены записи уравнения (1.25) для цилиндрической и сферической систем координат.

Пример 1. Вычисление коэффициента температуропроводности a для трех материалов (сталь, медь, стекло) согласно формуле (1.26).

Листинг 1: Файл (listings/a_calculation.pde)

```

title 'Calculation of coefficient a'

definitions
! задание массивов коэффициентов k, c, rho
!1—steel (сталь) 2—copper (медь) 3—glass (стекло)
k = array [3](58,407,0.76)
c = array [3](482 ,420,840)
rho = array [3](7850,8500,2500)
!задание массива значений коэффициента a
a=array [3]
!заполнение массива a в цикле
repeat i=1 to 3
  a[i]=( k[i] / ( c[i] * rho[i] ) ) !согласно определению
endrepeat

boundaries !раздел boundaries — обязательный

plots
summary !вывод на экран результатов расчетов
  report (a [1]) as 'Coefficient a for steel' !1.533 × E−5
  report (a [2]) as 'Coefficient a for copper' !1.14 × E−4
  report (a [3]) as 'Coefficient a for glass' !3.619 × E−7
end

```

1.4.1 Задания к примеру 1

Вычислите коэффициент температурпроводности для: алюминия, резины, гранита, глины, грунта сухого, золота, камня, дерева, керамзита, кирпича, кремния, льда, мела, мрамора, нейлона, пакли, паркета дубового, пенобетона, пенополистирола, плиты минеральной, пробки технической, полихлорвинила, раствора известкового, рубероида, серебра, стекловаты, торфа, фарфора, чугуна, шлака, эбонита, эковаты. Необходимые данные для расчета можно найти в [17].

1.5 Условные классификации источников тепла

При рассмотрении прикладных задач теплопроводности они заменяются на модельные. В частности, источники тепла описываются некоторыми идеализированными. Их можно различать по нескольким признакам, тем самым выделяя в условные классы [18, 19].

Вообще говоря, в общем случае все источники тепла являются трехмерными, поскольку реальные объекты также являются трехмерными. С другой стороны, при исследовании конкретной задачи для удобства построения решения можно использовать упрощения, при которых осуществляется переход к двумерной или одномерной постановке. Также учитываются соотношения размеров источника тепла и самого объекта. Поэтому, если рассматривать источники по их размерам (объемам), то можно условно выделить следующие типы [18, 19]:

1) объемные (трехмерные) — тепловыделение источника распределено по некоторому объему (куб, параллелепипед, сфера, цилиндр или другая объемная фигура),

2) плоские (двумерные) — один из размеров источника много меньше соизмеримых двух других (плоская фигура),

3) линейные (одномерные) — один из размеров источника много больше двух других (линии),

4) точечные — размеры источника много меньше размеров рассматриваемого объекта.

При этом источник 1-го и 2-го типов могут быть ограниченными по одному или нескольким направлениям, 3-го типа — только по направлению линии, которой описывает его расположение.

В реальных технологических процессах распределение интенсивности источников описывается сложными закономерностями. При теплофизическом анализе прибегают к некоторым идеализированным законам распределения интенсивности источников и стоков в пространстве и во времени [18].

Другим способом условной классификации источников является их разделение по виду законов, с помощью которых описываются функции их интенсивности. Например, для одномерного случая можно выделить следующие [18, 19]: равномерно распределенный $q(x) = const$, линейный $q(x) = q_0 - bx$, экспоненциальный $q(x) = q_0 e^{-bx}$, нормально распределенный симметричный $q(x) = q_0 e^{-bx^2}$, нормально распределенный несимметричный $q(x) = q_0 e^{-b(d-x)^2}$, $x \leq d$, или $q(x) = q_0 e^{-bx^2}$, $x \geq 0$, а также их различные комбинации.

Для разделения источников тепла по времени их действия используется число Фурье

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2}, \quad (1.28)$$

которое описывает отношение произведения коэффициента температуропроводности a и времени действия источника τ к квадрату характерного размера l тела. Тогда можно выделить три основных класса [18, 19]:

- 1) мгновенные ($Fo \rightarrow 0$),
- 2) действующие на определенном временном отрезке ($Fo > 0$),
- 3) длительные ($Fo \rightarrow \infty$), действующие в течение очень большого промежутка времени.

Также существует разделение источников тепла по их скорости перемещения v . При этом используется критерий Пекле $Pe = vL/a$, где L — длина источника в направлении перемещения [18, 19]:

- 1) неподвижные (источник не перемещается по области, занимаемой объектом, $v = 0$, $Pe = 0$),
- 2) подвижные (источник перемещается по области, занимаемой объектом,

$v \neq 0, Pe < 10$),

3) быстро движущиеся (источник перемещается по области, занимаемой объектом, $Pe \geq 10$).

В настоящем пособии рассматриваются задачи с неподвижными источниками тепла.

1.5.1 Задания к разделу 1.5

Дайте характеристику источникам тепла согласно критериям — по форме и времени действия.

1. $q(x) = q_0 - kx$.

2. $q(x, y) = q_0 - k_1x - k_2y$.

3. $q(x, y, z) = q_0 - k_1x - k_2y - k_3z$.

4. $q(x) = q_0 e^{-kx}$.

5. $q(x) = q_0 e^{-kx^2}$.

6. $q(x, y) = q_0 e^{-k_1x - k_2y}$.

7. $q(x, y, z) = q_0 e^{-k_1x - k_2y - k_3z}$.

8. $q(x, y, z) = q_0 e^{-k(x+y+z)}$.

9. $q(x, y, z) = q_0 e^{-k(x^2+y^2+z^2)}$.

10. $q(x, t) = [\text{sign}(\sin t) + 1] kx$.

11. $q(x) = \begin{cases} q_0 - kx, & 0 \leq x \leq l_0, \\ q_0 e^{-kx}, & l_0 < x \leq L. \end{cases}$

12. $q(x, y) = \begin{cases} q_0 - k_1x - k_2y, & 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, \\ q_0 e^{-k_1x}, & l_x < x \leq L_x, l_y < y \leq L_y. \end{cases}$

13. $q(x, y, z, t) = \begin{cases} q_0 - k_1x - k_2y, & 0 \leq t \leq t_0, \\ q_0 e^{-k_3z^2}, & t_0 < t. \end{cases}$

14. $q(x, t) = \begin{cases} [\text{sign}(\sin 2\pi t) + 1] kx, & 0 \leq t \leq t_0, \\ kx, & t_0 < t. \end{cases}$

15. $q(x, y, z, t) = \begin{cases} [\text{sign}(\cos t) - 1] kx, & 0 \leq t \leq t_0, \\ e^{-k(x+y+z)}, & t_0 < t. \end{cases}$

1.6 Контрольные вопросы по теме теплопроводность

1. Дайте определение температуры.
2. Что называется процессом теплопередачи?
3. Что такое поле температуры?
4. Что такое изотермы?
5. Что определяет градиент температуры?
6. Может ли градиент температуры быть равным нулю?
7. Сформулируйте закон Фурье.
8. Что определяют коэффициент теплопроводности?
9. В чем измеряется коэффициент теплопроводности?
10. Что определяет коэффициент теплоемкости?
11. В чем измеряется коэффициент теплоемкости?
12. Приведите соотношение, связывающее теплопроводность и температуропроводность.
13. Что такое вектор потока тепла?
14. Какая задача теплопроводности называется стационарной?
15. Чем стационарная задача отличается от нестационарной?
16. Приведите основные допущения при выводе уравнения теплопроводности.
17. Напишите общий вид уравнения теплопроводности.
18. Сколько и какие граничные условия можно задать в задачах теплопроводности?
19. Решить задачу теплопроводности — это значит определить что?

20. В одномерной задаче теплопроводности для стержня заданы значения температуры на его концах. На какие вопросы можно ответить, решив такую задачу?
21. Почему в холодную погоду при прикосновении к металлическим предметам они кажутся «более холодными», чем деревянные?
22. Какие материалы обладают большой теплопроводностью?
23. Каким критерием нужно руководствоваться при выборе материала для теплоизоляции?
24. Какие вы знаете изоляционные материалы?
25. При каких условиях происходит процесс переноса тепла?
26. Что такое термодинамическое равновесие?
27. На какие вопросы можно ответить, решив задачу нестационарной теплопроводности?
28. Какие факторы могут влиять на теплопроводность?
29. Что обладает самой низкой теплопроводностью?
30. В каком состоянии вещество обладает большей теплопроводностью?
31. Кто открыл теплопроводность?
32. Какой металл обладает наибольшей теплопроводностью?
33. Как изменяется теплопроводность при увеличении температуры?
34. Как зависит теплопроводность от примесей в материале?
35. Как изменяется теплопроводность металлов при уменьшении температуры?

2 Стационарные задачи теплопроводности, имеющие аналитическое решение

Решения некоторых задач теплопроводности можно построить в аналитическом виде [2, 10, 20]. Рассмотрим в качестве примера несколько стационарных задач, когда температура объекта изменяется только по пространственным координатам и не зависит от времени.

2.1 Одномерная задача теплопроводности для стержня

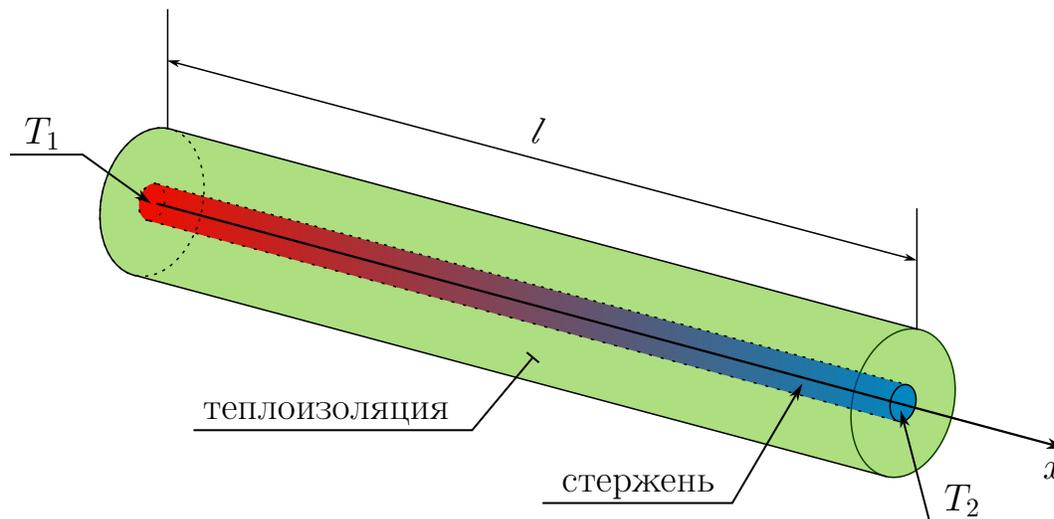


Рис. 5: Стержень с теплоизоляцией на боковой поверхности и с заданными значениями температуры на торцах.

Напомним, что стержнем называется объект, у которого один размер много больше двух других. Рассмотрим задачу теплопроводности для тонкого изотропного однородного стержня, на всей боковой поверхности которого находится теплоизоляция. Длина стержня l , площадь поперечного сечения S . Выберем ось x вдоль оси стержня. На левом торце ($x = 0$) задана температура T_1 , на правом ($x = l$) — T_2 . Для определенности будем считать, что $T_1 > T_2$. Источника тепла нет. Если не рассматривать изменение температуры по поперечному сечению (т.е. температура $T = T(x)$), то в рамках одномерной модели постановку этой задачи можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \text{ или } T'' = 0, \\ T(0) = T_1, \\ T(l) = T_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь дифференциальное уравнение легко получается, например, из представления (1.27). Следуя теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [21], запишем общее решение этого уравнения:

$$T(x) = C_1x + C_2, \quad (2.2)$$

где две константы интегрирования определяются из двух граничных условий

$$\begin{cases} T(0) = C_2 = T_1, \\ T(l) = C_1l + C_2 = T_2, \end{cases} \Rightarrow C_2 = T_1, \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{l}. \quad (2.3)$$

Окончательно решение рассматриваемой задачи для стержня запишется как

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l}x + T_1. \quad (2.4)$$

Т.е. температура T изменяется по линейному убывающему закону, так как коэффициент $(T_2 - T_1)/l < 0$. Максимальное значение T_1 достигается на левом конце ($x = 0$), а минимальное T_2 на правом ($x = l$). По определению градиент температуры равен

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T = -k \frac{dT}{dx} \vec{e}_1 = -k T' \vec{e}_1 = -k \frac{T_2 - T_1}{l} \vec{e}_1 = k \frac{T_1 - T_2}{l} \vec{e}_1, \quad (2.5)$$

где \vec{e}_1 — единичный вектор направленный вдоль оси x . Из полученного представления видно, что вектор потока тепла постоянен (не зависит от координаты) и сонаправлен с осью x , т.е. от части стержня с большей температурой к области стержня с меньшей температурой.

Следует отметить, что решение полученное для исследуемого стержня может быть также использовано для описания изменения температуры по тол-

щине однородной твердой пластины при некоторых допущениях. Длина и высота много больше толщины ($l \gg \delta$, $h \gg \delta$), рассмотрение проводится вдали от торцевых поверхностей (см. рисунок 6), что позволяет не учитывать изменение температуры вдоль осей y и z . Для такой пластины решение (2.4) можно переписать в виде

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\delta}x + T_1, \quad (2.6)$$

здесь T_1 — температура на левой стенке, T_2 — на правой.

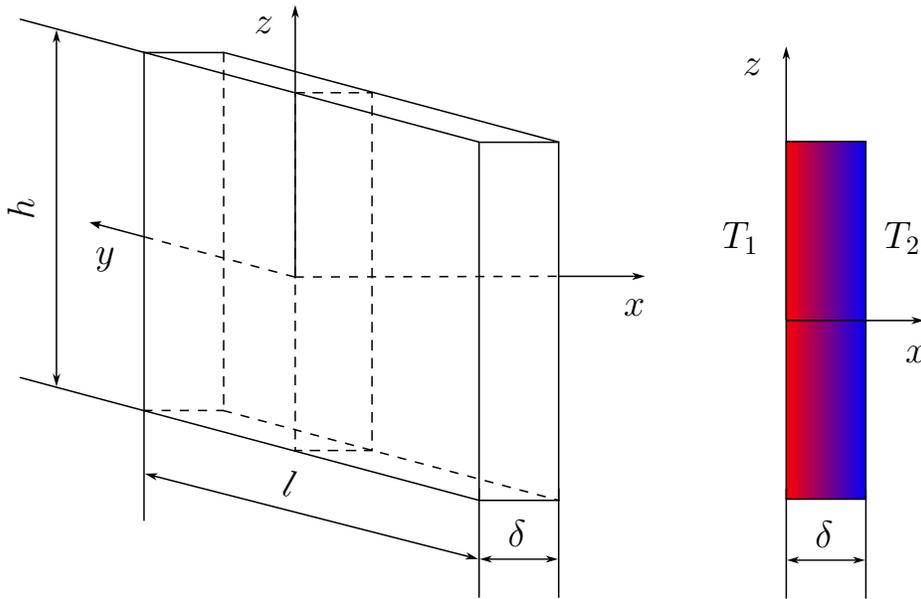


Рис. 6: Тонкая однородная пластина

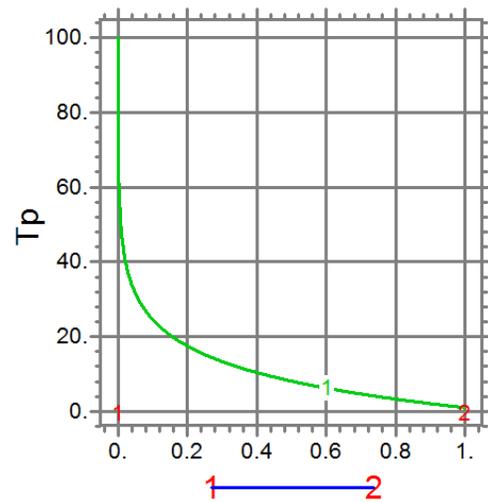
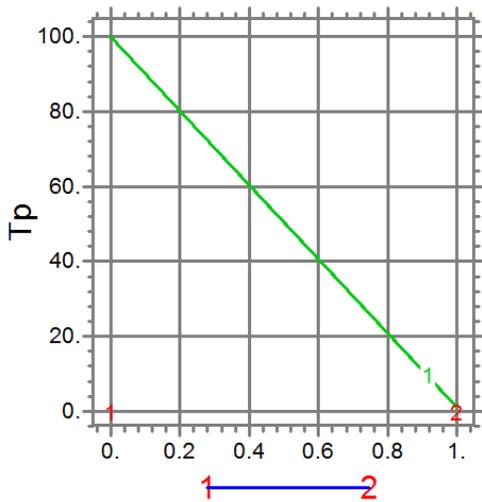
Пример 2. Скрипт, представленный в листинге 2, позволяет получить численное решение задачи для стержня (2.1) или тонкой пластины при некоторых допущениях (см. рисунки 5, 6). Граничное условие первого рода для температуры на конце стержня в одномерном случае (условие задания значения искомой функции в точке) задается следующим образом:

```
point value(Tp) = T_1
```

Здесь температура обозначена переменной T_p , так как имя T (или t) зарезервировано для обозначения времени t .

Листинг 2: Пример стационарной задачи теплопроводности в 1D постановке. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_1D.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . 1D '  
select  
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
coordinates cartesian1  
variables Tp {температура}  
definitions  
  k = 0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  T_1=100 { значение температуры на левом конце }  
  T_2=1 { значение температуры на правом конце }  
  L= 1 { длина стержня }  
  q=-k*dx(Tp) { функция изменения вектора потока тепла }  
  Tpan=(T_2-T_1) / L * x + T_1 { аналитическое решение }  
equations  
  { уравнение теплопроводности в одномерном случае,  
    источников тепла нет. Стержень однородный }  
  dx(dx(Tp)) = 0  
boundaries  
region 1  
  start (0)  
  { значение температуры слева }  
  point value(Tp) = T_1  
  line to (L)  
  { значение температуры справа }  
  point value(Tp) = T_2  
plots  
  { график изменения температуры от начала стержня до конца }  
  elevation (Tp) from (0) to (L) penwidth = 6  
  elevation (Tpan) from (0) to (L) penwidth = 6  
  elevation (q) from (0) to (L) penwidth = 6  
  { окно численных результатов  
    для температуры в указанных точках }  
summary  
  report val (Tp, 0) as "Temperature in 0"  
  report val (Tp, L/2) as "Temperature in L/2"  
  report val (Tpan, L/2) as "Temperature in L/2 ( analitical )"  
  report val (Tp, L) as "Temperature in L"  
end
```



а) График температуры при $k=0.5$

б) График функции изменения \vec{q}

Рис. 7: Графики изменения температуры и вектора потока тепла, построенные по данным расчетов листинга 2.

Как было отмечено выше в случае, когда k коэффициент теплопроводности постоянен, то получаем линейный график изменения температуры и решение этой задачи зависит только от значений температуры на концах стержня. В этом легко убедиться, запуская программу несколько раз с разными значениями k , и T_1 , T_2 .

Команда

```
report val (f, x_0)
```

в разделе программы `summary` позволяет вывести значения функции f (в данном случае Tr или $Tran$) в указанной точке x_0 .

Задача для переменного коэффициента теплопроводности k будет рассмотрена ниже. Подобная задача возникает при исследовании функционально-градиентных материалов, свойства которых изменяются по пространственным координатам.

2.2 Задача о теплопередаче для двусоставного стержня

Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности для стержня длиной l , состоящего из двух частей с различными коэффициентами теплопроводности k_i и длинами $l_i : l_1 + l_2 = l$ (см. рисунок 8). Источники тепла внутри стержня отсутствуют. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. На концах

заданы условия первого рода (1.8):

$$T(0) = T_1, \quad T(l) = T_2.$$



Рис. 8: Двусоставной стержень с заданными значениями температуры на торцах.

Ниже приведен скрипт для решения этой задачи. Следует отметить, что в пакете FlexPDE по умолчанию реализованы условия четвертого рода (1.14) на границе стыка двух материалов (идеальный тепловой контакт). Поэтому условия такого рода внутри объекта, состоящего из нескольких частей, описывать не нужно, непрерывность функции температуры учитывается средой FlexPDE в автоматическом режиме. Решение подобной задачи для функции изменения вектора потока тепла, как известно, существует в аналитической форме [13, 22]. При этом термическое сопротивление составного стержня, состоящего из последовательно расположенных частей, находящихся в идеальном контакте, определяется как сумма термических сопротивлений этих частей. Формула для закона изменения вектора потока тепла (закон Фурье):

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R^T}, \quad (2.7)$$

где $R^T = R_1^T + R_2^T$, $R_i^T = l_i/k_i$, $i = 1, 2$ — термическое сопротивление i -части стержня, l_i — длина i -части, k_i — коэффициент теплопроводности i -части.

Пример 3. Скрипт, представленный в листинге 3, позволяет получить численное решение одномерной задачи для двусоставного стержня.

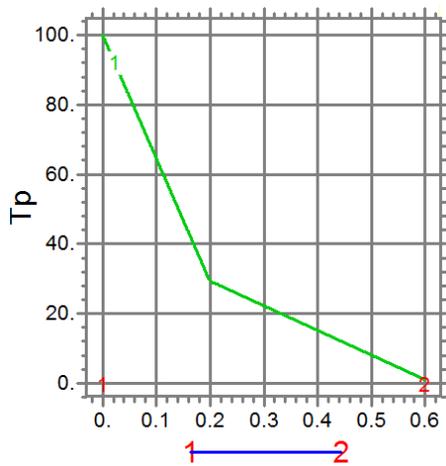
Листинг 3: Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_1D_2_parts.pde)

```

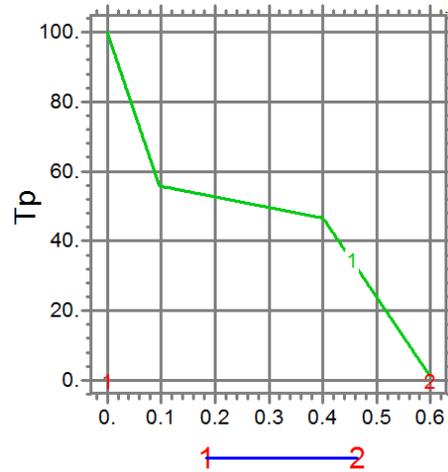
title 'Stationary heat conductivity . 1D. Two parts '
select
  textsize=16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт

coordinates cartesian1
variables Тр {температура}

```



а) График температуры для двух значений k (двусоставной стержень)



б) График температуры для трех значений k (трехсоставной стержень)

Рис. 9: Графики температуры для составных стержней.

definitions

$T_1=100$ { значение температуры слева }
 $T_2=1$ { значение температуры справа }
 $L1= 0.2$ { длина первого участка стержня }
 $L2= 0.4$ { длина второго участка стержня }
 $L=L1+L2$ { длина всего стержня }
 { коэффициент теплопроводности на разных участках стержня }
 $k1=0.1$
 $k2=0.5$
 $k = \text{if } x < L1 \text{ then } k1 \text{ else } k2$

equations { уравнение теплопроводности в одномерном случае}

{ источники тепла отсутствуют }
 $dx(k \cdot dx(T_p)) = 0$

boundaries

region 1

start (0)

point value(T_p) = T_1 { значение температуры слева }

line to (L)

point value(T_p) = T_2 { значение температуры справа }

plots

{ график изменения температуры от начала стержня до конца}

```
elevation (Tp) from (0) to (L) penwidth =6
```

```
{ окно численных результатов  
  для температуры в указанных точках }
```

```
summary
```

```
  report val (Tp, 0) as "Temperature in 0 "  
  report val (Tp, L1) as "Temperature in L1 "  
  report val (Tp, L) as "Temperature in L "
```

```
end
```

Используя, формулу (2.7), можно определить значение функции q для рассмотренного стержня. Решение для трехсоставного стержня может быть получено аналогично. Для этого необходимо задать соответствующие значения параметров l_3 , k_3 , изменить правило для параметра k и обратить внимание на общую длину стержня. Формула для q в этом случае будет иметь аналогичный вид (2.7).

2.3 Задания к примеру 3

Постройте график распределения температуры двусоставного стержня.

Таблица 2: Варианты заданий с указанием параметров для задачи 3

№	T_1	T_2	l_1	l_2	k_1	k_2
1	1	100	0.4	0.6	0.5	1
2	1	50	0.4	0.6	0.5	1
3	1	100	0.4	0.6	1	0.5
4	25	50	0.4	0.6	0.2	0.8
5	25	75	0.4	0.6	0.3	0.7
6	10	40	0.4	0.6	0.4	0.8
7	20	60	0.5	0.5	0.5	1
8	10	70	0.2	0.8	0.45	0.9
9	20	80	0.3	0.7	0.4	0.8
10	30	70	0.4	0.6	0.4	0.6

Выведите на экран значения температуры в пяти равноотстоящих точках по длине стержня и в точке стыковки двух частей. Для удобства задания точек можно воспользоваться массивом.

2.4 Теплопередача стержня с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты

Для описания поведения некоторых функционально-градиентных материалов коэффициент теплопроводности k полагается переменным по пространственным координатам. Такие материалы обладают неоднородной структурой, которая может достигаться благодаря сложным технологическим процессам. В этом случае одномерная задача для неоднородного стержня с учетом допущений, описанных ранее для задачи (2.1), на основе дифференциального уравнения (1.3) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) = 0 \text{ или } (k(x)T'(x))' = 0, \\ T(0) = T_1, \\ T(l) = T_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Обращая последовательно дифференциальный оператор, получим:

$$k(x)T'(x) = C_1 \Rightarrow T'(x) = \frac{C_1}{k(x)} \Rightarrow T(x) = C_1 \int_0^x \frac{1}{k(\eta)} d\eta + C_2.$$

Константы интегрирования C_i определяются из граничных условий:

$$C_2 = T(0) = T_1, \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\int_0^l \frac{1}{k(\eta)} d\eta}.$$

Окончательно получим

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\int_0^l \frac{1}{k(\eta)} d\eta} \int_0^x \frac{1}{k(\eta)} d\eta + T_1. \quad (2.9)$$

Для рассматриваемой одномерной задачи по определению градиент температуры равен:

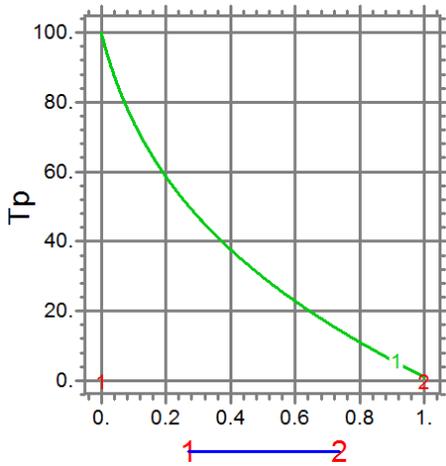
$$\begin{aligned}\vec{q} &= -k(x) \operatorname{grad} T = -k(x) \frac{dT}{dx} \vec{e}_1 = -k(x) T' \vec{e}_1 = \\ &= -k(x) \frac{T_2 - T_1}{\int_0^l \frac{1}{k(\eta)} d\eta} \frac{1}{k(x)} \vec{e}_1 = \frac{T_1 - T_2}{\int_0^l \frac{1}{k(\eta)} d\eta} \vec{e}_1.\end{aligned}$$

Обозначив

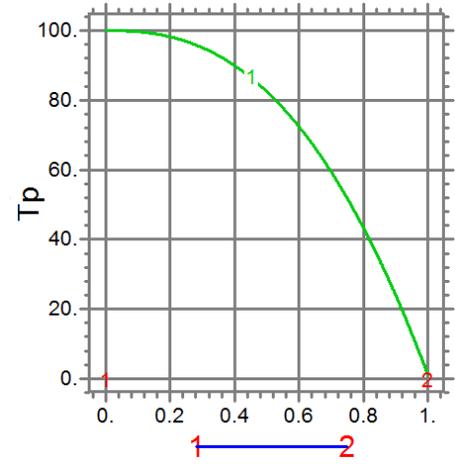
$$q = \frac{T_1 - T_2}{\int_0^l \frac{1}{k(\eta)} d\eta} > 0, \quad (2.10)$$

можно кратко записать

$$\vec{q} = q \vec{e}_1, \quad T(x) = T_1 - q \int_0^x \frac{1}{k(\eta)} d\eta. \quad (2.11)$$



а) $k(x) = 0.5 \ln(x + 1.1)$



б) $k(x) = 0.5 x^{-1.5}$

Рис. 10: Графики температуры T при различных законах изменения коэффициента теплопроводности $k(x)$.

Для того, чтобы решить задачу из 2.8 во FlexPDE, достаточно обратиться к скрипту с тем изменением, что коэффициент теплопроводности k зависит от x , следует добавить строку

`k= f(x)`

в скрипт 6 (в раздел **definitions**), где $f(x)$ — закон изменения, например, $k = 0.5 \cdot \ln(x + 1.1)$ или $k = 0.5 \cdot x^{-1.5}$. На рисунке 10 приведены соответствующие графики изменения температуры вдоль оси стержня.

2.4.1 Задания к разделу 2.4

Постройте график температуры для следующих вариантов закона изменения коэффициента теплопроводности k :

1. $2.5x^{-2}$.
2. $0.5 \ln(0.1x^2 + x + 1)$.
3. $0.5 \operatorname{tg}(x + 1)$.
4. $0.5 e^{-x+1}$.
5. $\sinh(-x + 1.5)$.
6. $\cosh(-x + 1)x$.
7. $\operatorname{tg}(-x^2 + 1)x$.
8. $(x + 1) \sin(x + 0.1)$.
9. $(x - 2) \cos(x + 0.5)$.
10. $(x - 1.5) \operatorname{tg}(x + 1.5)$.

Напомним [9], что в среде FlexPDE для задания экспоненты используется встроенная команда `exp`, а для вычисления тангенса `tg` — `tan`.

2.5 Теплопередача стержня с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры

Существует достаточно большое количество материалов, физические свойства которых, в том числе и теплопроводность, зависит от температуры окружающей среды. Обычно, чем выше температура, тем меньше значение коэффициента теплопроводности [23]. По мере роста температуры металла, величина его теплопроводности уменьшается, за исключением платины и кобальта (таблица 6).

Пример 4. Ниже приведен скрипт для 1D задачи для стержня с граничными условиями первого рода. В скрипте учитывается изменение коэффициента теплопроводности при изменении температуры в рассматриваемом теле. Учет температуры описан строкой

```
k= if Tr>0 then 0.5 else 0.1 ! значения для k в двух диапазонах
```

Листинг 4: Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_1D_T_dependence.pde)

```

title 'Stationary heat conductivity . 1D. T dependence'
coordinates cartesian1

select
  fontsize =16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт

variables Tр {температура}

definitions
  k= if Tр>0 then 0.5 else 0.1 ! коэффициент теплопроводности
  T_1=-100 { значение температуры слева }
  T_2=100 { значение температуры справа }
  L=1 { длина стержня }

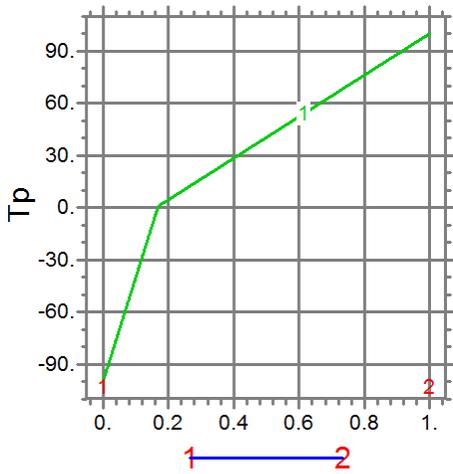
equations
  { уравнение теплопроводности в одномерном случае
    источников тепла нет }
  dx(k*dx(Tр)) = 0

boundaries
region 1
  start (0)
  { значение температуры слева }
  point value(Tр) = T_1
  line to (L)
  { значение температуры справа }
  point value(Tр) = T_2

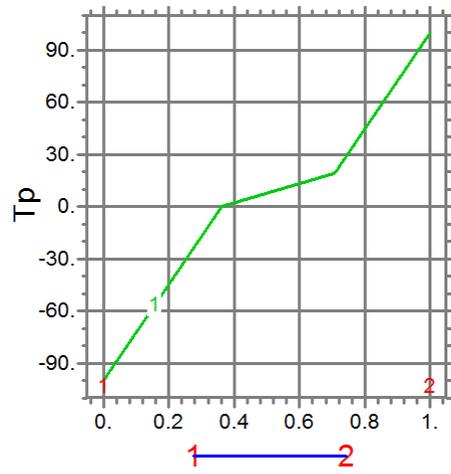
plots
  { график изменения температуры от начала стержня до конца}
  elevation (Tр) from (0) to (L) penwidth = 6

{ окно численных результатов
  для температуры в указанных точках }
summary
  report val (Tр, 0) as "Temperature in 0"
  report val (Tр, L/2) as "Temperature in L/2"
  report val (Tр, L) as "Temperature in L"
end

```



а) Два значения для k .



б) Три значения для k .

Рис. 11: Иллюстрации к листингу 4. Графики температуры.

2.6 Задания к примеру 4

Постройте график распределения температуры для одномерной задачи теплопроводности для материалов, теплопроводность которых зависит от температуры следующим образом [23]:

1. Молибден

Температура, °C	-100	0	100	200
Теплопроводность, Вт/(м·град)	141.9	140.7	137.2	134.9

2. Серебро

Температура, °C	-100	0	100	200
Теплопроводность, Вт/(м·град)	419.8	410.5	391.9	372.2

3. Золото

Температура, °C	-100	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	319.8	312.8	311.7	310.5

4. Вольфрам

Температура, °C	0	100	200	600
Теплопроводность, Вт/(м·град)	162.8	151.2	140.7	113.9

5. Никель

Температура, °C	-50	0	100	200
Теплопроводность, Вт/(м·град)	98.9	93.0	82.6	73.3

6. Цинк

Температура, °С	-100	0	100	200
Теплопроводность, Вт/(м·град)	115.1	112.8	108.7	104.7

7. Железо

Температура, °С	100	200	300	400
Теплопроводность, Вт/(м·град)	87.2	76.8	66.3	55.8

8. Магний

Температура, °С	100	200	300	400
Теплопроводность, Вт/(м·град)	152.4	147.7	144.2	143.0

9. Цирконий

Температура, °С	100	200	300	400
Теплопроводность, Вт/(м·град)	11.9	13.3	14.5	15.6

10. Алюминий

Температура, °С	100	200	300	400
Теплопроводность, Вт/(м·град)	212.8	219.9	225.6	230.3

11. Бериллий

Температура, °С	-100	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	124.4	157.0	172.4	187.7

12. Литий

Температура, °С	-100	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	77.9	68.0	67.5	70.9

13. Сурьма

Температура, °С	-100	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	22.7	18.8	16.7	15.9

14. Олово

Температура, °С	-150	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	79.1	66.1	63.2	60.8

15. Свинец

Температура, °С	-100	0	50	100
Теплопроводность, Вт/(м·град)	36.6	25.1	34.3	33.5

2.7 Теплопроводность цилиндрической стенки

При реализации на практике систем охлаждения или нагрева наиболее часто используются трубчатые элементы для транспортировки теплоносителя и в качестве излучателя (радиатора). Для стационарной задачи об изменении температуры по толщине стенке полого однородного цилиндра кругового сечения при заданных значениях температуры на внутренней и внешней боковой поверхностях при отсутствии внутренних источников тепла можно получить аналитическое решение. В качестве независимых координат выберем цилиндрические (r, φ, z) (см. рисунок 36). В этом случае уравнение теплопроводности $\Delta T = 0$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2.12)$$

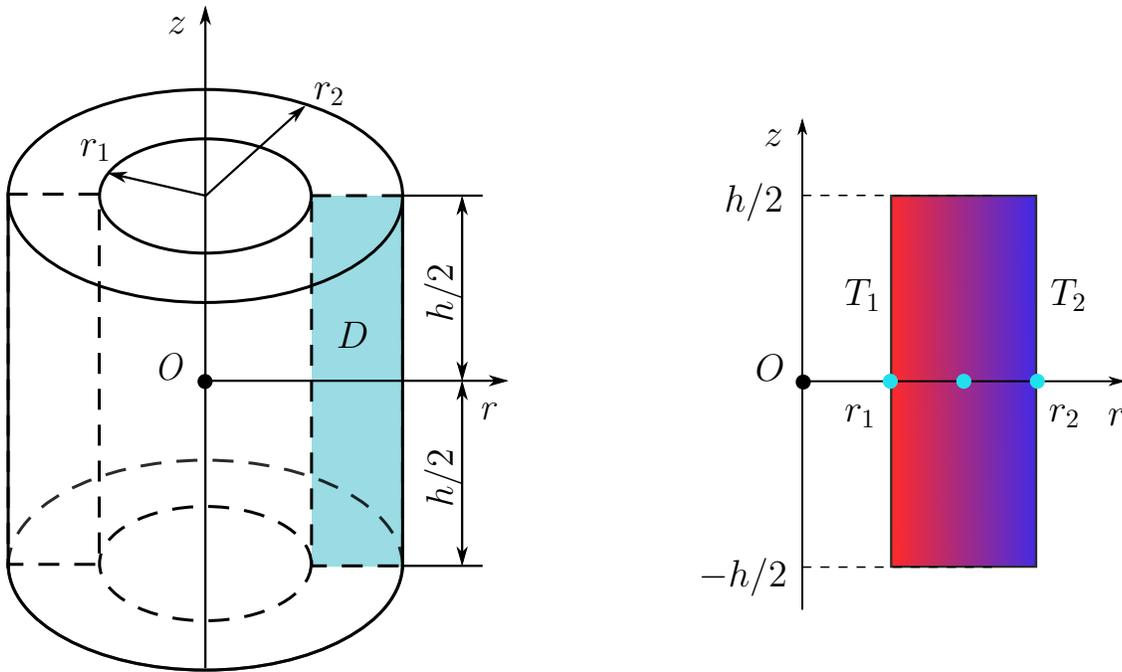


Рис. 12: Полый круговой цилиндр (слева) и часть его продольного сечения (справа).

Для упрощения исследования также как и для случая тонкой однородной пластики будем считать, что высота цилиндра h много больше толщины его стенки $\delta = r_2 - r_1$, $h \gg \delta$, r_1 — внутренний радиус, r_2 — внешний. Рассмотрение проводится вдали от торцов, что с учетом симметричности задачи позволяет свести задачу к одномерной по координате r . Тогда постановку

задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \text{ или } T''(r) + \frac{T'(r)}{r} = 0, \\ T(r_1) = T_1, \\ T(r_2) = T_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Общее решение дифференциального уравнения записывается согласно логарифмическому закону [22]:

$$T = C_1 \ln(r) + C_2, \quad (2.14)$$

где постоянные C_i определяются из граничных условий

$$\begin{cases} T(r_1) = C_1 \ln(r_1) + C_2 = T_1, \\ T(r_2) = C_1 \ln(r_2) + C_2 = T_2, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}, \quad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1 - \frac{\ln(r_2)}{\ln(r_1)}}. \quad (2.15)$$

Тепловой поток с учетом представления градиента в цилиндрической системе координат (7.5) может быть вычислен по формуле:

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T = q \vec{e}_r, \quad q(r) = -k \frac{dT}{dr} = -k \frac{C_1}{r} = -k \frac{T_1 - T_2}{r \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}. \quad (2.16)$$

В листинге представлен пример решения этой задачи в пакете FlexPDE. На рисунке представлены графики полученного численного решения и линейного приближения $T_l = \frac{T_2 - T_1}{r_2 - r_1} r - \frac{T_2 r_1 - T_1 r_2}{r_2 - r_1}$. Следует отметить, что с уменьшением толщины стенки цилиндра эти решения будут все меньше отличаться друг от друга.

Листинг 5: Пример стационарной одномерной задачи теплопроводности для цилиндра.
Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Cylinder_1D.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity of cylinder . 1D '  
coordinates cylinder1  
  
select  
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  errlim =1e-7 !точность вычислений  
  
variables Tp {температура}  
definitions  
  k = 0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  T_1=100 { значение температуры на внутренней поверхности }  
  T_2=1 { значение температуры на внешней боковой поврехности}  
  r1= 0.2 { внутренний радиус }  
  r2= 1 { внешний радиус }  
  q=-k*dr(Tp) {функция изменения вектора потока тепла}  
  C1=(T_1-T_2) / ln(r1/r2)  
  C2=T_1 - (T_1-T_2) / (1 - ln(r2) / ln (r1) )  
  Tpan=C1 * ln(r) + C2  
  Tp_line=(T_2 - T_1) / (r2 - r1) * r - (T_2 * r1 -T_1 * r2 ) / (r2 -  
r1) ! линейное приближение  
  qan=-k * C1 / r  
  
equations  
  { уравнение теплопроводности в одномерном случае,  
  источников тепла нет. Материал однородный }  
  dr(dr(Tp))+1/r *dr(Tp) = 0  
  
boundaries  
region 1  
  start (r1)  
  { значение температуры слева }  
  point value(Tp) = T_1  
  line to (r2)  
  { значение температуры справа }  
  point value(Tp) = T_2  
  
plots  
  { график изменения температуры от начала стержня до конца}  
  elevation (Tp, Tp_line) from (r1) to (r2) penwidth = 6  
  elevation (q) from (r1) to (r2) penwidth = 6
```

```
{ окно численных результатов  
  для температуры в указанных точках }
```

```
summary
```

```
  report val (Tp, r1) as "Temperature in r1"  
  report val (Tp, (r1+r2)/2) as "Temperature in (r1+r2)/2"  
  report val (Tpan, (r1+r2)/2) as "Temperature in (r1+r2)/2 ( analitical )"  
  report val (Tp, r2) as "Temperature in r2"  
  report val (q, r1) as "Heat flux q in r1"  
  report val (q, (r1+r2)/2) as "Heat flux q (r1+r2)/2"  
  report val (qan, (r1+r2)/2) as "Heat flux q in (r1+r2)/2 ( analitical )"  
  report val (q, r2) as "Heat flux q in r2"
```

```
end
```

2.8 Задания к разделу 2.7

1. Постройте решения для различных значений толщины стенки цилиндра $r_1/r_2 = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$. Вычислите относительную разницу в значениях численного решения и линейного приближения в процентах.

2. Постройте графики численного и аналитического решений для функции изменения потока.

3. Если принять линейное приближение за точное и вычислить соответствующую ему функцию изменения потока тепла, то насколько она будет отличаться от точной?

4. По аналогии с задачей для двусоставного стержня построите решение для двусоставной стенки цилиндра для моделирования изменения температуры медной трубы с идеально прилегающей теплоизоляцией (например, АБС пластика или пенополиуретана). Значения коэффициента k можно взять из данных, представленных в Приложении 7.2.

3 Стационарные задачи теплопроводности 2D

В общем случае переход от трехмерной постановки к двумерной возможен, когда отсутствует зависимость процесса теплопередачи и физических характеристик материала от третьей пространственной координаты или такой зависимостью можно пренебречь без существенного ущерба для решения.

3.1 Теплопередача через пластинку. 2D задача

Пример 6. Рассмотрим стационарную задачу о распределении температуры в прямоугольной пластине в декартовой системе координат (см. рисунок 13). Длина пластины равна l , ширина — b , толщина — $h < \max\{l, b\}$. Верхняя и нижняя поверхность теплоизолированы. На боковых гранях реализованы граничные условия первого (1.8) (заданы значения температуры, условия Дирихле) и/или второго рода (1.9) (заданы значения теплового потока, условия Неймана), не изменяющиеся по толщине пластины. В этом случае можно перейти к рассмотрению двумерной задаче для прямоугольной области $OABC$, представляющую собой срединную поверхность. При этом считается, что эта область равноудалена от верхней и нижней поверхности пластины.

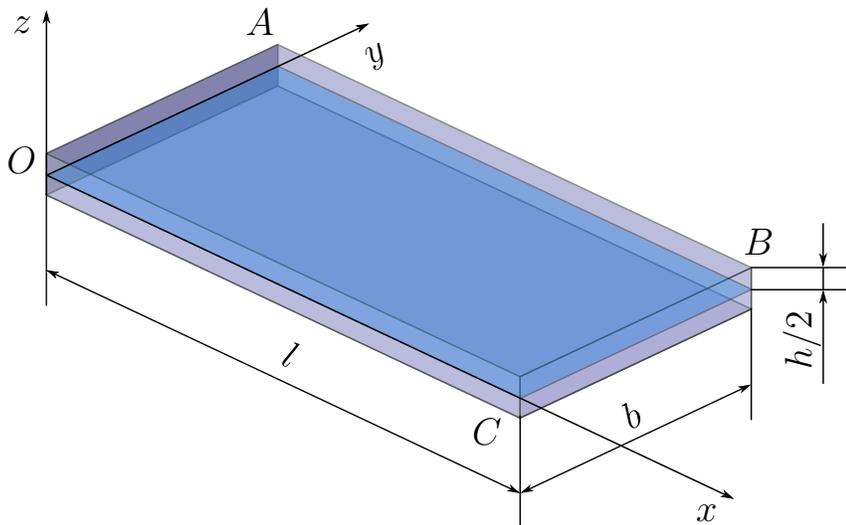


Рис. 13: Прямоугольная пластинка.

В листинге 6 представлен скрипт для решения задачи о распределении температуры в квадратной области $l = b$. На левой и правой гранях заданы

значения температуры, на верхней и нижней описаны условия теплоизоляции (тепловой поток равен нулю). Здесь для краткости записи стационарного уравнения теплопроводности (1.1) при отсутствии источников тепла в двумерном случае используются встроенные в пакет FlexPDE операторы дивергенции `div` и градиента `grad`.

Листинг 6: Пример стационарной задачи теплопроводности в 2D постановке. Файл (`listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D.pde`)

```
title 'Stationary heat conductivity . 2D '  
select  
  painted ! закрашенные графики  
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  
variables Tр {температура}  
  
definitions  
  k= 0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  T_1=100 { температура на левой границе }  
  T_2=1 { температура на правой границе }  
  L= 1 { сторона квадрата }  
  
equations  
  { уравнение теплопроводности, источников тепла нет }  
  div(k*grad(Tр)) = 0  
  
boundaries  
region 1  
  { температура на левой границе }  
  start (0,L) value(Tр) = T_1  
  { тепловой поток отсутствует на нижней границе }  
  line to (0,0) natural(Tр) = 0  
  { температура на правой границе }  
  line to (L,0) value(Tр) = T_2  
  { тепловой поток отсутствует на верхней границе }  
  line to (L,L) natural(Tр) = 0  
  line to close  
  
plots
```

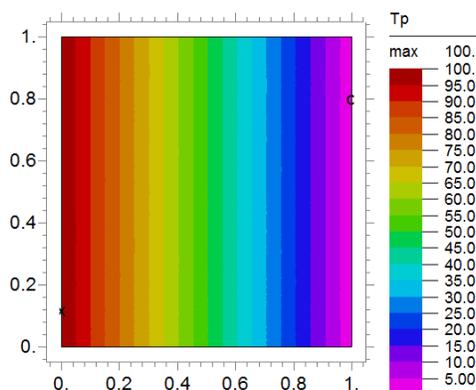
```

grid(x,y) nolines
contour(Tp)
{ график изменения температуры в центре образца,
  от левой границе к правой}
elevation (Tp) from (0,0.5*L) to (L,0.5*L) penwidth =6

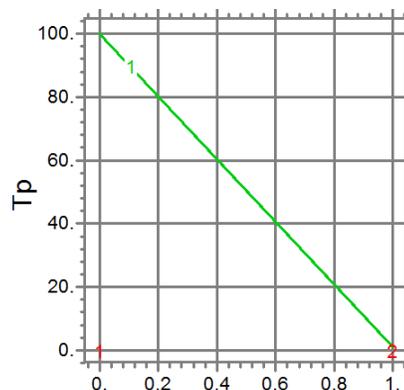
{ окно численных результатов
  для температуры в указанных точках }
summary
  report val (Tp, 0,0) as "Temperature in (0,0)"
  report val (Tp, 0.5*L,0.5*L) as "Temperature in (0.5*L,0.5*L)"
  report val (Tp, L,0.5*L) as "Temperature in (L,0.5*L)"
end

```

Если сравнить численное решение с ранее полученным аналитическим решением (2.6) для задачи о распределении температуры по толщине тонкой однородной пластины (см. рисунок 6), то будет видно, что они качественно совпадают. Для обоих случаев температура изменяется по линейному закону.



а) распределение температуры



б) график температуры

Рис. 14: Результаты к листингу 6.

3.2 Задания к примеру 6

1. Для задачи из листинга 6 задайте равнозначные параметры — геометрические размеры, коэффициент теплопроводности и граничные условия. Сравните графики температур.
2. Проанализируйте как изменится график температуры вдоль линии рав-

Таблица 3: Варианты заданий параметров для задачи 6

№	$T_1, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_2, \text{ }^\circ\text{C}$	$L, \text{ м}$	$k, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	Материал
1	20	50	0.12	209.3	Алюминий
2	5	70	0.015	74.4	Железо
3	0	70	0.005	418.7	Серебро
4	-10	65	0.021	389.6	Медь
5	0	80	0.001	70	Платина
6	20	200	0.001	45.4	Сталь
7	-10	80	0.003	85.5	Латунь
8	-50	70	0.01	312.8	Золото
9	-25	50	0.2	35	Свинец
10	0	45	0.005	58	Бронза

ноудаленной от верхней и нижней горизонтальных граней (условная средняя линия) рассматриваемого образца от изменения:

а) геометрии вертикальных границ

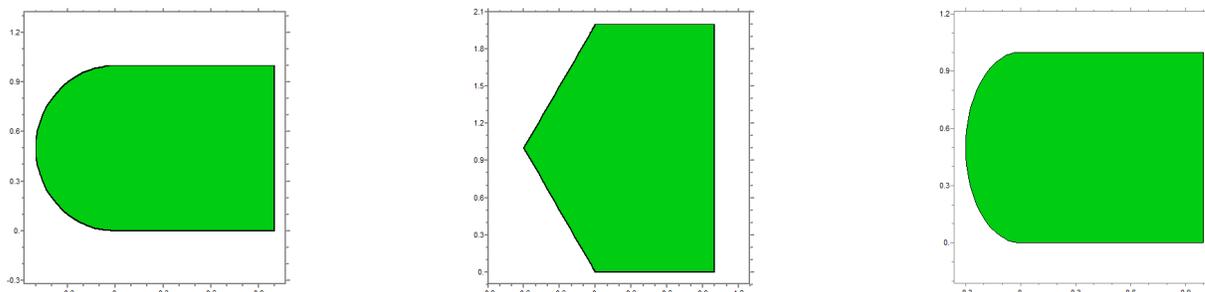


Рис. 15: Примеры вариаций вертикальной границы.

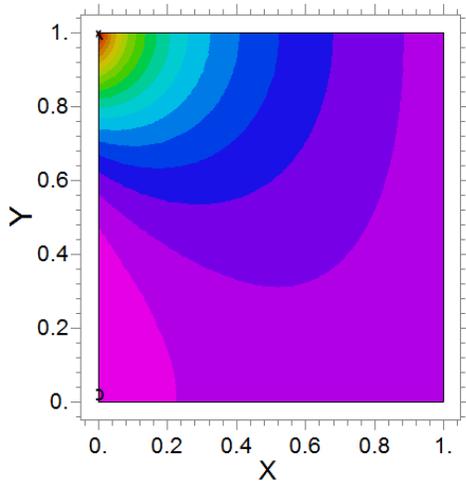
б) граничных условий, например, если на нижней и верхней границах задать нулевую температуру: ... `value(Temp) = 0`

3. Сравните графики изменения температуры вдоль условной средней линии для образцов различной длины. Для этого удобно использовать технологию stage (см. § 5).

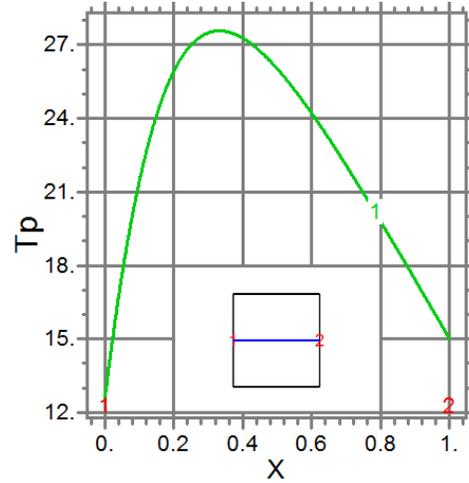
Пример 7. Постановка задачи в этом примере аналогична постановке задачи из примера 6. Разница заключается в другом граничном условии, заданном на левой границе пластины. Это условие так же первого рода — условие Дирихле (1.8), но это не постоянное значение температуры, а ее функция от координаты.

Легко заметить разницу в решениях задач 6 и 7 — график температуры

рис. 16 б), в отличие от рис. 14 б), нелинейный.



а) распределение температуры



б) график температуры

Рис. 16: Результаты к листингу 7.

Листинг 7: Пример стационарной задачи теплопроводности в 2D постановке. Температура — функция координаты на одной из границ области. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_Dirichlet.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . 2D. Dirichlet boundary condition '
```

```
select
```

```
  painted ! закрашенные графики
```

```
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках
```

```
  font=1 ! sans-serif шрифт
```

```
variables Тр {температура}
```

```
definitions
```

```
  k= 0.5 { коэффициент теплопроводности }
```

```
  T_1=200*y^4 { температура на левой границе }
```

```
  T_2=15      { температура на правой границе }
```

```
  L= 1 { сторона квадрата }
```

```
{компоненты вектора теплового потока}
```

```
q_x=-k*dx(Тр)
```

```
q_y=-k*dy(Тр)
```

```
{вектор теплового потока}
```

```
q=vector(q_x, q_y)
```

```
{величина модуля вектора теплового потока}
```

```
qdm=magnitude(q)
```

equations

```
{ уравнение теплопроводности, источников тепла нет }  
div(k*grad(Tp)) = 0
```

boundaries

region 1

```
{ температура на левой границе }  
start (0,L) value(Tp) = T_1  
{ тепловой поток отсутствует на нижней границе }  
line to (0,0) natural(Tp) = 0  
{ температура на правой границе }  
line to (L,0) value(Tp) = T_2  
{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }  
line to (L,L) natural(Tp) = 0  
line to close
```

plots

```
contour(Tp)  
{ график изменения температуры,  
  вдоль условной средней линии }  
elevation (Tp) from (0,0.5*L) to (L,0.5*L) penwidth =6  
{ график изменения модуля вектора потока тепла }  
contour(qdm)
```

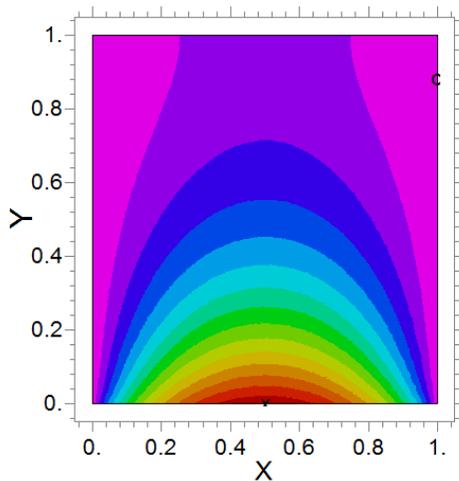
```
{ окно численных результатов  
  для печати значений температуры в указанных точках }
```

summary

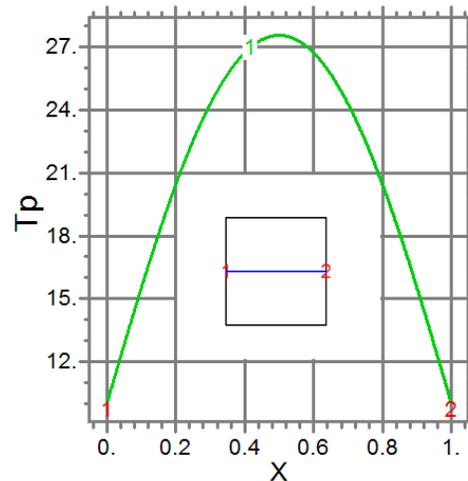
```
report val (Tp, 0,0) as "Temperature in (0,0)"  
report val (Tp, 0.5*L,0.5*L) as "Temperature in (0.5*L,0.5*L)"  
report val (Tp, L,0.5*L) as "Temperature in (L,0.5*L)"
```

end

Пример 8. В этом примере рассмотрим, как изменится график распределения температуры, если тепловой поток на одной из границ (граничное условие второго рода (1.8), условие Неймана) будет отличен от нуля. Для этого в код листинга 6 внесены небольшие изменения в раздел описания границы и граничных условий **boundaries**.



а) распределение температуры по всей области



б) график температуры вдоль условной средней линии

Рис. 17: Графики температуры, соответствующие расчетам листинга 8.

Листинг 8: Фрагмент кода. Задан ненулевой тепловой поток на одной из границ (условие Неймана). Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_Neumann.pde)

boundaries

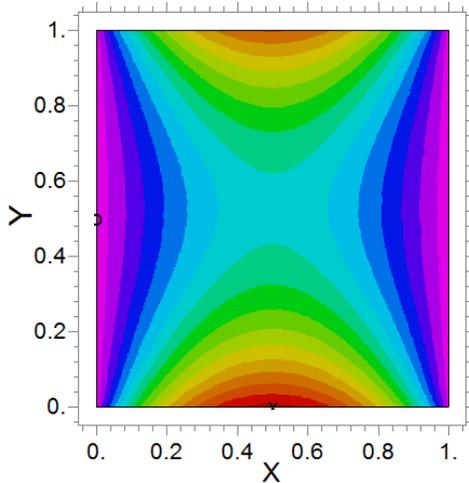
region 1

```

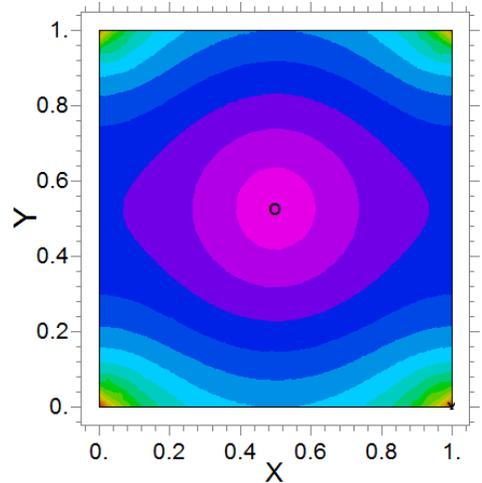
{ граничное условие 1-го рода }
{ температура на левой границе }
{ граничное условие Дирихле }
start (0,L) value(Tp) = T_1
{ граничное условие 2-го рода }
{ тепловой поток на нижней границе }
{ граничное условие Неймана }
line to (0,0) natural(Tp) = 100
{ температура на правой границе }
line to (L,0) value(Tp) = T_2
{ тепловой поток на верхней границе }
line to (L,L) natural(Tp) = 0
line to close

```

Пример 9. Рассмотрим задачу, в которой на левой и правой границах пластины заданы условия первого рода (условия Дирихле (1.8)), на верхней границе — условие второго рода (условие Неймана (1.9)), а на нижней границе пластины задано условие третьего рода — закон Ньютона (1.11). Для этого в код листинга 7 внесем соответствующие дополнения и изменения в разделы **definitions** и **boundaries**.



a) распределение температуры



b) модуль вектора потока тепла

Рис. 18: Результаты к листингу 9.

Листинг 9: Фрагмент кода. Три варианта граничных условий. На нижней границе — конвективный теплообмен. Файл (`listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_Newton.pde`)

definitions

```
{ дополнительные строки в разделе definitions }
  T_s=10 { температура тела }
  T_0=-10 { температура окружающей среды }
  alpha=0.3 { коэффициент поверхностной теплопередачи }
```

boundaries

region 1

```
{ граничное условие 1-го рода }
{ температура на левой границе }
{ граничное условие Дирихле }
start (0,L) value(Tp) = T_1
{ граничное условие 3-го рода }
{ конвективный теплообмен на нижней границе }
{ закон Ньютона }
```

```

line to (0,0) natural(Tp) = alpha*(T_s-T_0)
{ температура на правой границе }
line to (L,0) value(Tp) = T_2
{ граничное условие 2-го рода }
{ тепловой поток на нижней границе }
{ граничное условие Неймана }
line to (L,L) natural(Tp) = 5
line to close

```

3.3 Задания к примерам 7 — 9

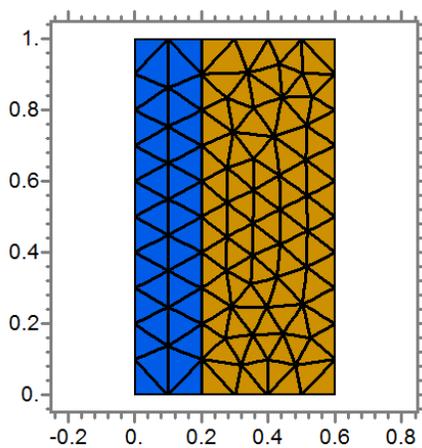
Решите задачу теплопроводности для квадратной области. Варианты граничных условий можно составить по таблице 4. Например, 1А 2В 3С 7В, что означает — на первой границе задано условие первого рода из клетки таблицы 1А, на второй границе задано условие второго рода из клетки таблицы 2В, на третьей — 3С, на четвертой — 7В. Нумерация границ осуществляется по часовой стрелке, начиная с левой грани.

Таблица 4: Для составления вариантов заданий

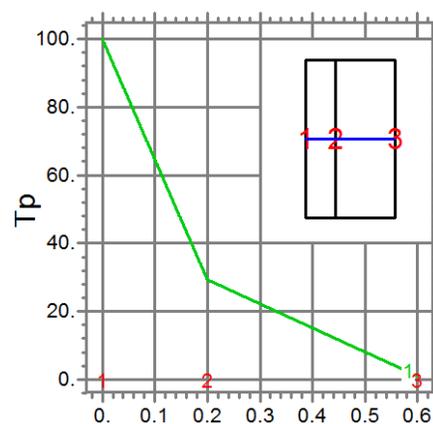
Гр.услов.	А	В	С
№	1-го рода	2-го рода	3-го рода
1	0	5	0.1(10-5)
2	5	10	0.2(10+15)
3	10	15	0.3(15-5)
4	20	20	0.4(20+5)
5	30	25	0.5(20-10)
6	-5	-5	0.6(10-5)
7	-10	-10	0.3(20+10)
8	-20	-15	0.4(30-5)
9	-30	-20	0.6(10-15)
10	100	-25	0.5(5-10)

3.4 Теплопередача через двухслойную область в 2D постановке

Пример 10. Рассматривается задача теплопроводности для плоской области, в качестве которой может выступать срединная плоскость прямоугольной пластины. Область состоит из двух частей, различающихся физическими свойствами. На верхней и нижней гранях находится теплоизоляция — тепловой поток отсутствует. На левой и правой сторонах поддерживаются постоянные значения температуры. Следует заметить, что на границе прилегания частей заданы условия четвертого рода (1.14) — непрерывность теплового потока и температуры. Среда FlexPDE генерирует эти условия в автоматическом режиме, поэтому отдельно такие условия описывать нет необходимости. В листинге 10 приведен код решения этой задачи. Из рисунка 19 видна аналогия с задачей для составного стержня (см. рисунок 9)



а) расчетная сетка



б) график температуры

Рис. 19: Триангулированная расчетная область и график температуры вдоль условной средней линии, соответствующие листингу 10.

Листинг 10: Скрипт для решения задачи теплопроводности двухслойной области. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_two_regions.pde)

```

title 'Stationary heat conductivity . 2D. two regions '
!Теплопередача через двухслойную плоскую область
select
  painted ! закрашенные графики
  textsize=16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт

```

variables T_p {температура}

definitions

k { коэффициент теплопроводности }
 $T_{_1}=100$ { температура на левой границе }
 $T_{_2}=1$ { температура на правой границе }
 $L1= 0.2$ { ширина первой части }
 $L2= 0.4$ { ширина второй части }
 $L=L1+L2$ { общая длина }
 $h=1$ { высота }

{компоненты вектора теплового потока}

$q_x=-k*dx(T_p)$

$q_y=-k*dy(T_p)$

{вектор теплового потока}

$q=vector(q_x, q_y)$

{величина модуля вектора теплового потока}

$qdm=magnitude(q)$

equations { уравнение теплопроводности, источников тепла нет }
 $div(k*grad(T_p)) = 0$

boundaries

region 1

$k = 0.1$ { теплопроводность первой части }

{ старт на границе прилегания частей }

start (L1,0) **line to** (L1,h)

{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }

natural(T_p) = 0 **line to** (0,h)

{ температура на левой границе }

value(T_p) = $T_{_1}$ **line to** (0,0)

{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }

natural(T_p) = 0 **line to close**

region 2

$k = 0.5$ { теплопроводность второй части }

{ старт на границе прилегания частей }

start (L1,0) **line to** (L1,h)

{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }

natural(T_p) = 0 **line to** (L,h)

```

{ температура на правой границе }
value(Tp) = T_2 line to (L,0)
{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }
natural(Tp) = 0 line to close

```

plots

```

grid(x,y) ! nolines
contour(Tp)
{ график изменения температуры вдоль
условной средней линии}
elevation (Tp) from (0,0.5*h) to (L1+L2,0.5*h) penwidth =6

```

```

{ окно численных результатов для вывода значений
температуры в указанных точках }

```

summary

```

report val (Tp, 0,0.5*h) as "Temperature in (0,0.5*h)"
report val (Tp, L1,0.5*h) as "Temperature in (L1,0.5*h)"
report val (Tp, L1+L2,0.5*h) as "Temperature in (L1+L2,0.5*h)"

```

end

3.5 Задания к примеру 10

1. Получите решение для различных вариантов входных данных (см. таблицу 5).

Таблица 5: Варианты заданий параметров для задачи 10

№	$T_1, ^\circ\text{C}$	$T_2, ^\circ\text{C}$	$L1, \text{ м}$	$L2, \text{ м}$	$k_1, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$k_2, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$
1	-10	50	0.3	0.01	35 (свинец)	312 (золото)
2	-10	53	0.21	0.011	74 (железо)	209 (алюминий)
3	-5	80	0.11	0.012	389 (медь)	209 (алюминий)
4	-18	45	0.013	0.014	418 (серебро)	312 (золото)
5	-10	65	0.014	0.014	418 (серебро)	70 (платина)
6	-25	55	0.012	0.012	45 (сталь)	167 (серебро)
7	-20	65	0.015	0.015	312 (золото)	70 (платина)
8	-25	45	0.031	0.021	45 (сталь)	389 (медь)
9	-5	40	0.11	0.012	74 (железо)	35 (свинец)
10	-18	78	0.34	0.21	35 (свинец)	389 (медь)

2. Установите характер зависимости функции изменения температуры от:
 а) отношения величин k_1 и k_2 ; б) отношения величин $L1$ и $L2$.

3. На основе листинга 10 решите аналогичную задачу для составных областей, состоящих из 3, 4 и более слоев (различных материалов). Для описания слоев используйте `region`.

3.6 Коэффициент теплопроводности зависит от температуры. 2D решение

Пример 11. Рассматривается теплопроводность прямоугольной области, на боковых гранях которой заданы постоянные значения температуры, а верхняя и нижняя грань теплоизолированы. Особенность примера состоит в том, что коэффициент теплопроводности k имеет одно значение при положительной температуре и другое — при отрицательной. Наименьшей теплопроводностью обладает металл висмут, его коэффициент теплопроводности при температуре 26°C равен $7.9 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$. Теплопроводность большинства металлов при нагревании снижается. Их максимальная теплопроводность достигается при низких отрицательных температурах. Теплопроводность чистого серебра равна $416.4 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$ при 100°C [24], а при -100°C — $422.2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$.

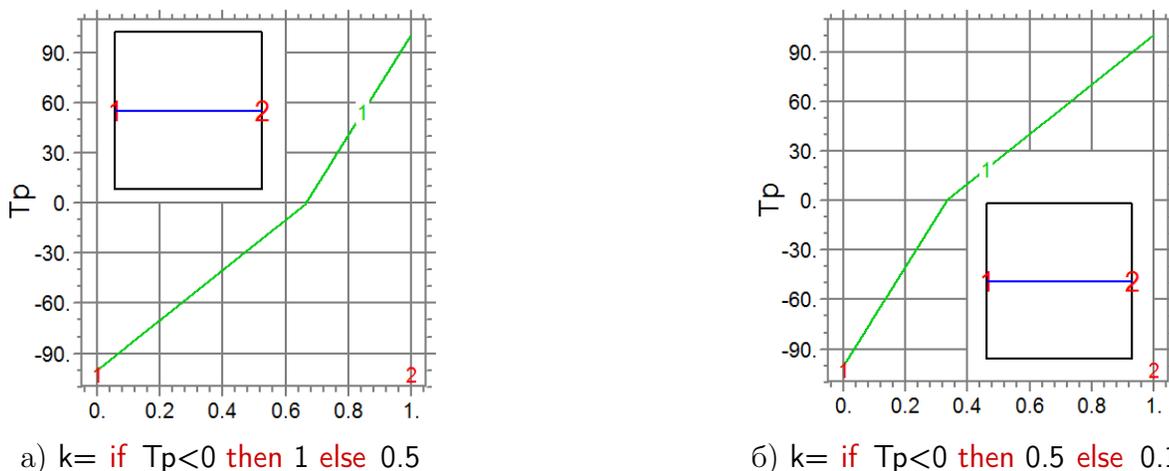


Рис. 20: Графики температуры вдоль условных средних линий, полученные с помощью кода 11.

Для реализации задания нескольких значений коэффициента k от температуры используется условный оператор: $k = \text{if } T_p < 0 \text{ then } 0.5 \text{ else } 0.1$

Листинг 11: Двумерная задача. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры.
Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_T_dependence.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . 2D. dependence on T '  
! Коэффициент теплопроводности  
! зависит от температуры  
select  
  painted ! закрашенные графики  
  textsize=16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  ngrid=8  
  
variables Tр {температура}  
  
definitions  
  k = if Tр<0 then 0.5 else 1 { коэффициент теплопроводности }  
  T_1=-100 { температура на левой границе }  
  T_2=100 { температура на правой границе }  
  L= 1 { сторона квадрата }  
  
equations  
  { уравнение теплопроводности, источников тепла нет }  
  div(k*grad(Tр)) = 0  
  
boundaries  
region 1  
  { температура на левой границе }  
  start (0,L) value(Tр) = T_1  
  { тепловой поток отсутствует на нижней границе }  
  line to (0,0) natural(Tр) = 0  
  { температура на правой границе }  
  line to (L,0) value(Tр) = T_2  
  { тепловой поток отсутствует на верхней границе }  
  line to (L,L) natural(Tр) = 0  
  line to close  
  
plots  
  grid(x,y) nolines  
  contour(Tр)  
  { график изменения температуры  
  вдоль условной средней линии }
```

```
elevation (Tp) from (0,0.5*L) to (L,0.5*L) penwidth ==6
```

```
{ окно численных результатов для вывод значений  
  температуры в трех точках }
```

```
summary
```

```
  report val (Tp, 0,0.5*L) as "Temperature in (0,0.5*L)"
```

```
  report val (Tp, 0.5*L,0.5*L) as "Temperature in (0.5*L,0.5*L)"
```

```
  report val (Tp, L,0.5*L) as "Temperature in (L,0.5*L)"
```

```
end
```

3.7 Задания к примеру 11

Постройте график температуры для условной средней горизонтальной линии квадратной области, если коэффициент теплопроводности k изменяется по следующим законам:

```
1. k= if (Tp>Tp_0) and (Tp<=Tp_1) then k_0 else  
  if (Tp>Tp_1) and (Tp<=Tp_2) then k_1 else k_2
```

```
2. k= if (Tp>Tp_0) and (Tp<=Tp_1) then k_0 else  
  if (Tp>Tp_1) and (Tp<=Tp_2) then k_1 else  
  if (Tp>Tp_2) and (Tp<=Tp_3) then k_2 else k_3
```

```
3. k= if (Tp>Tp_0) and (Tp<=Tp_1) then k_0 else  
  if (Tp>Tp_1) and (Tp<=Tp_2) then k_1 else  
  if (Tp>Tp_2) and (Tp<=Tp_3) then k_2 else  
  if (Tp>Tp_3) and (Tp<=Tp_4) then k_3 else k_4
```

В качестве конкретных материалов при расчетах можно использовать данные, которые представлены в таблице 6.

Таблица 6: Теплопроводность металлов в зависимости от температуры [23], [24]

Железо (99.99%)		Вольфрам (99.99%)		Никель	
$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$
100	87.2	0	162.8	-50	98.9
200	76.8	100	151.2	0	93.0
300	66.3	200	140.7	100	82.6
400	55.8	400	465.2	200	73.3
500	50.0	600	113.9	300	63.9
Золото (99.999%)		Алюминий (99.99%)		Свинец (99.99%)	
$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$
-100	319.8	-100	204.7	-250	48.8
0	312.8	0	209.3	-200	40.7
100	310.5	100	212.8	-100	36.6
200	308.2	200	219.8	0	25.1
300	307.0	300	225.6	50	34.3
400	309.4	400	230.3	100	33.5
500	312.8	500	234.9	300	30.2
Молибден (99.84%)		Медь (99.99%)		Платина (99.99%)	
$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$
-100	141.9	-180	488.5	-100	67.8
0	140.7	0	393.1	0	69.8
100	137.2	100	384.9	100	71.8
200	134.9	200	377.9	200	73.7
400	123.1	300	370.9	400	77.7
600	122.1	400	365.2	600	81.6
800	113.9	500	359.4	800	85.6
1000	104.7	600	353.6	1000	89.6
1600	68.6	800	340.8	1100	101.2
		1000	319.8		
Серебро (99.99%)		Кадмий		Олово	
$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$	$T, ^\circ\text{C}$	$k, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$
-100	419.8	-100	96.5	-150	79.1
0	410.5	0	93.4	0	66.1
100	391.9	50	92.6	50	63.2
200	372.2	100	91.9	100	60.8
300	361.7	200	90.9	150	59.2
500	366.3	300	90.1	200	57.9

3.8 Перенос тепла в составной конструкции. 2D решение

Пример 12 представляет собой задачу [25] в двумерной постановке о переносе тепла в цилиндре из изоляционного материала. Внутри находятся несколько труб с теплоносителями с различными значениями температуры. Внешняя оболочка находится в контакте с окружающей средой, например грунтом, бетоном, штукатуркой и т. п. Для внешней и внутренних труб заданы условия первого рода — постоянные значения температуры.

Подобная задача при некоторых допущениях может быть использована для моделирования процесса распределения температуры внутри теплотрасс бытовых и коммерческих систем кондиционирования или отопления.

Листинг 12: Пример стационарной задачи теплопроводности в 2D постановке. Файл (listings/Heat_flow_2D_insulated_tubes.pde)

```
title 'Insulated tubes'
select
  painted ! закрашенные графики
  fontsize=16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт
  errlim=3e-4 ! точность решения
  ngrid=1 ! размер ячеек триангуляции (максимальный)

variables Тр {температура}

definitions
  R=0.3 ! радиус внешней трубы
  !радиусы остальных трубы
  r0=R/4 r1=R/5 r2=R/5 r3=R/5 r4=R/5
  k=0.1 {коэффициент теплопроводности}
  heat=0 {источник тепла отсутствует}

  {компоненты вектора теплового потока}
  q_x=-k*dx(Тр)
  q_y=-k*dy(Тр)

  {вектор теплового потока}
  q=vector(q_x, q_y)
```

{величина модуля вектора теплового потока}
qdm=magnitude(q)

equations

div(k*grad(Tp))+heat=0

boundaries

region

start 'container' (-R,0) value(Tp)=0 { температура снаружи и на границе }
arc(center=0,0) angle=360

{ трубы с водой }

start 'center tube' (-r0,0) value(Tp)=90 { центральная труба }
arc(center=0,0) angle=360

start 'top left tube' (-R/2-r1,R/2) value(Tp)=10 { левая верхняя }
arc(center=-R/2,R/2) angle=360

start 'top right tube' (R/2-r2,R/2) value(Tp)=15 { правая верхняя }
arc(center=R/2,R/2) angle=360

start 'bottom left tube' (-R/2-r3,-R/2) value(Tp)=30 { нижняя левая }
arc(center=-R/2,-R/2) angle=360

start 'bottom right tube' (R/2-r2,-R/2) value(Tp)=20 { нижняя правая }
arc(center=R/2,-R/2) angle=360

plots

grid(x,y) {сетка}

contour(Tp) {изолинии температуры}

surface(Tp) {трехмерный график распределения температуры}

vector(q) mesh points=30 penwidth=3 {тепловой поток}

contour(q_x) {x-компонента теплового потока}

contour(q_y) {y-компонента теплового потока}

contour(qdm) {величина модуля вектора теплового потока}

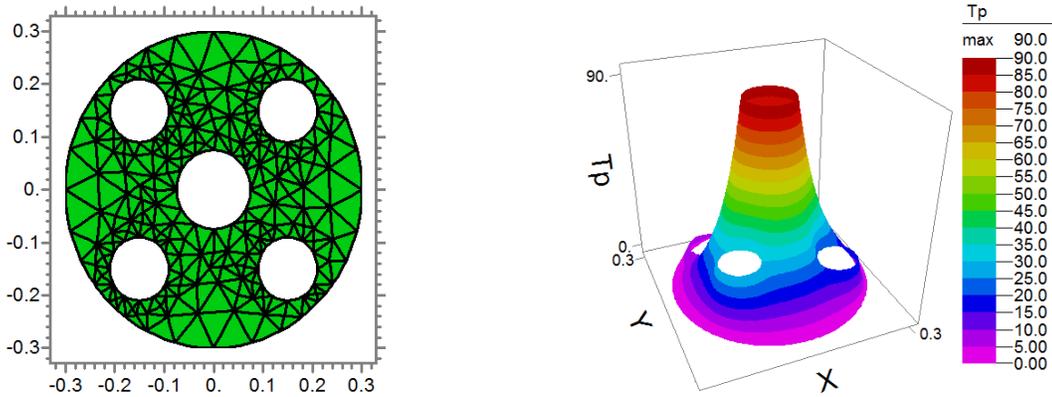
{график проекции теплового потока на нормаль контура outer}

elevation(normal(q)) on 'container'

{график проекции теплового потока на нормаль контура center tube}
elevation(-normal(q)) on 'center tube'

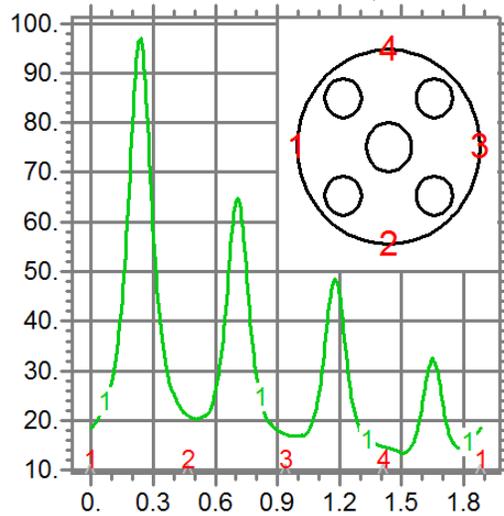
{график проекции теплового потока на нормаль контура top left tube}
elevation(-normal(q)) on 'top left tube'

end



а) Триангулированная расчетная сетка

б) Трехмерный график температуры



е) График амплитуды теплового потока вдоль внешнего контура

Рис. 21: Иллюстрации к листингу 12.

3.8.1 Задания к примеру 12

1. Проведите расчет температуры и вектора теплового потока для составной конструкции (см. рисунок 22), описывающей в некотором приближении теплотрассу прямоугольного сечения. Варианты входных данных для задачи представлены в таблице 7. Здесь T_0 — температура на внешней границе области; T_1, T_2, T_3 — значения температуры в круговых областях, моделирующих трубы, радиусы которых, соответственно равны r_1, r_2, r_3 ; l, b — длина и ширина прямоугольника; расстояние от центральной окружности до боковых — $2r_2$. Данные физических характеристик материалов представлены в таблице 8 из источника [17].

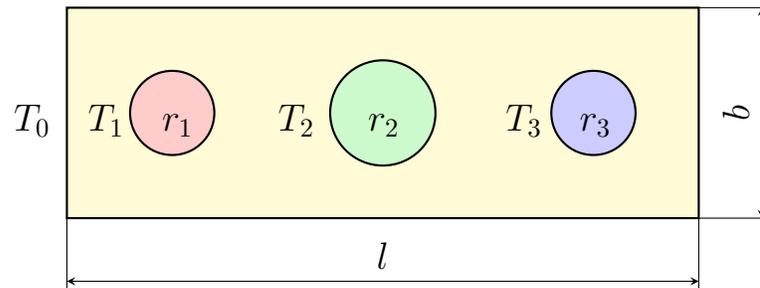


Рис. 22: Схема поперечного сечения теплотрассы.

2. Проведите серию численных решений для различных размеров прямоугольной области. Обратите внимание на значения модуля вектора потока тепла на ее границе. Возможно ли подобрать такие размеры прямоугольника, при которых $|\vec{q}| = 0$ на его границах?

3. Насколько в процентном отношении будут различаться поля значений температуры, полученные для исходной прямоугольной области и квадратной с площадью $S = l \cdot b$?

4. Измените код листинга с помощью технологии stages [9] таким образом, чтобы температура теплоносителя в левой трубе T_1 менялась от $+10^\circ\text{C}$ до $+100^\circ\text{C}$ с шагом 5°C , а температура в правой T_3 — от $+100^\circ\text{C}$ до $+10^\circ\text{C}$ с таким же шагом, температура окружающей среды T_0 менялась бы на каждом шаге от $+10^\circ\text{C}$ до -10°C . Постройте график зависимости интеграла температуры от номера итерации **stage**.

Таблица 7: Варианты заданий параметров

№	T_0	b	l	r_1	r_2	r_3	T_1	T_2	T_3
1	10	0.8	2.3	0.18	0.20	0.16	95	130	115
2	20	1.0	2.7	0.20	0.25	0.16	115	150	130
3	5	1.2	3.3	0.25	0.30	0.20	120	125	115
4	2	1.3	3.7	0.25	0.32	0.30	110	100	105
5	0	1.6	4.5	0.30	0.40	0.32	145	150	135
6	22	2.0	5.4	0.40	0.50	0.32	120	135	110
7	17	2.6	6.8	0.50	0.63	0.40	115	150	115
8	8	3.0	8.2	0.63	0.75	0.50	130	150	125
9	14	3.6	9.9	0.75	0.90	0.63	115	130	120
10	28	4.4	12	0.90	1.10	0.75	105	125	115
11	26	6.2	13.8	1.20	1.40	1.25	25	105	85
12	24	5.1	11.8	1.80	1.35	1.45	155	55	90
13	22	3.8	9.5	2.40	2.65	2.25	95	45	100
14	18	7.1	14.2	1.95	2.25	2.55	65	115	65
15	4	5.6	11	1.65	1.75	1.45	125	45	115

Таблица 8: Плотность ρ , теплоемкость c и коэффициент теплопроводности k некоторых строительных материалов

№	Материал	ρ , кг/м ³	k , Вт/(м·град)	c , Дж/(кг·град)
1	Аглопоритобетон	1000...1800	0.29...0.7	840
2	Бетон на песке	1800...2500	0.7	710
3	Вата минеральная легкая	50	0.045	920
4	Вермикулитобетон	300...800	0.08...0.21	840
5	Газо- и пенозолобетон	800...1200	0.17...0.29	840
6	Пемзобетон	800...1600	0.19...0.52	840
7	Полистиролбетон	200...600	0.065...0.145	1060
8	Раствор известковый	1650	0.85	920
9	Раствор гипсоперлитовый	600	0.14	840
10	Шлакобетон	1120...1500	0.6...0.7	800

5. Решите задачу в предположении, что правая труба будет пустая (температура равна температуре окружающей среды или тепловой поток равен нулю).

6. Постройте графики зависимости величины вектора теплового потока от коэффициента теплопроводности. Используйте технологию `stages` для задания диапазона значений [9].

3.9 Распределение температуры в составной конструкции при наличии источника тепла

Пример 13. Рассмотрим модельную двумерную задачу для исследования распределения температуры внутри фрагмента конструкции электрического теплого пола. Основными элементами при этом являются медные кабели нагревательного мата, уложенные с некоторым шагом, и окружающая их среда, состоящая обычно из бетона (цементно-песчаной стяжки). Решение этой задачи основано на подходе, описанном в [25]. На внешней поверхности пола поддерживается постоянная температура окружающей среды. Для описания свойств материалов значения коэффициента теплопроводности k определяются для бетона и меди при описании соответствующих областей `region`. Нагрев кабеля характеризуется отличной от нуля мощностью источника тепла `heat`. Скрипт для построения численного решения этой задачи представлен в листинге 13.

Листинг 13: Пример стационарной двумерной задачи. Теплый пол. Файл (listings/Heat_flow_2D_warm_floor.pde)

```
title 'Warm floor'
select
errlim =3e-5 {точность расчетов и параметр размера элементов}
ngrid=1

variables Tp

definitions
L=0.25 { длина области }
b=0.1 { высота области }
r=0.02 { радиус нагревательного кабеля}
h=L-2*r { шаг укладки кабеля}
yc=0 { ординаты центра кабелей}
k {коэффициент теплопроводности }
heat {мощность источника тепла }

{компоненты вектора потока тепла}
q_x=-k*dx(Tp)
q_y=-k*dy(Tp)
```

```

{вектор теплового потока}
q=vector( q_x, q_y)
{величина модуля вектора потока тепла}
qdm=magnitude(q)

```

equations

```

{стационарное уравнение теплопроводности}
div(k*grad(Tp))+heat=0

```

boundaries

```

region 'floor '

```

```

{ 1-я область — бетон на песке без источников тепла}
k=0.7
heat=0
start (-L,-b)
{подложка пола теплоизолирована}
natural(Tp)=0 line to (L,-b)
{рассматривается повторяющийся фрагмент
без обмена энергией по правой грани
условие natural(Tp)=0 по умолчанию наследуется}
line to (L,b)
{ температура среды на поверхности пола не изменяется}
value(Tp) =20
line to (-L,b)
{рассматривается повторяющийся фрагмент
без обмена энергией по левой грани}
natural(Tp)=0 line to close

```

```

region 'copper cables '

```

```

{ 2-я область — два поперечных сечения круглых толстых медных кабелей
с заданной мощностью источника тепла}
k=407
heat=1.0e6 { сечения медных кабелей — источники тепла }
{два равномерно распределенных кабеля по длине фрагмента}
repeat xc=-L+h/2+r by h+2*r to -L+2*h +2*r
start 'section ' (xc+r,yc) arc(center=xc,yc) angle=360 close
endrepeat

```

plots

```

grid(x,y) {расчетная область}

```

{увеличенный (zoom) для наглядности контурный график тем—ры}
`contour(Tp) painted zoom(-L,-b,0.25,0.25)`

{трехмерный график тем—ры}
`surface(Tp) as "Plot of temperature "`

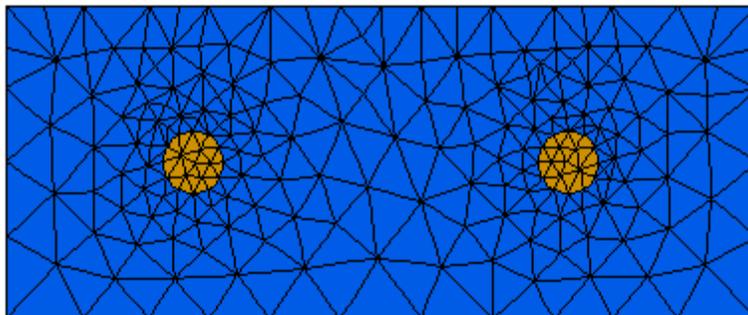
{контурный график тем—ры на сечениях кабелей}
`contour(Tp) painted on 'copper cables'`

{увеличенное для наглядности векторное поле потока тепла
mesh points — определяют сетку и размер ее ячеек, на которой строится график,
norm — все стрелки одинаковой длины,
значения определяются по цветовой шкале }
`vector(q) mesh points=20 norm zoom(-L,-b,0.25,0.25) penwidth=6`

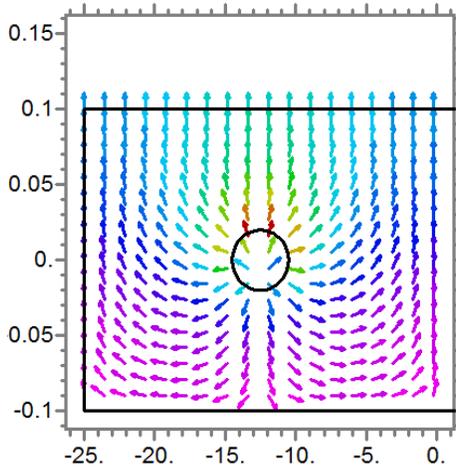
{увеличенный для наглядности контурный график
значения модуля вектора потока тепла }
`contour(qdm) painted zoom(-L,-b,0.25,0.25)`

{контурный график значения модуля вектора потока тепла
на всей области }
`contour(qdm) painted`

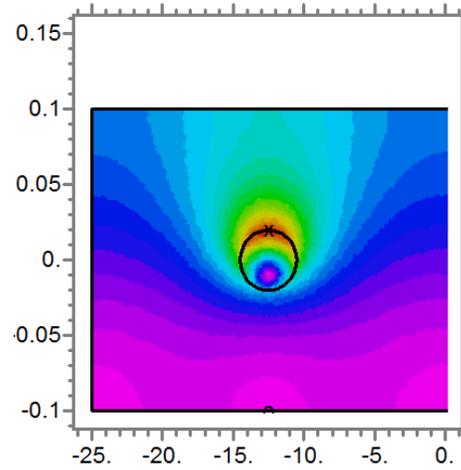
{график проекции вектора потока тепла на нормаль
к контуру сечения кабеля }
`elevation(normal(q)) on 'section'`
`end`



а) Триангулированная область



б) Вектор потока тепла



с) График функции $|\vec{q}|$

Рис. 23: Иллюстрации к листингу 13.

3.9.1 Задания к примеру 13

1. Обратившись к соответствующим разделам, решите эту задачу в трехмерной постановке и сравните с рассмотренным решением.

2. Сравните полученное решение с решением, если условие на верхней границе, когда задана постоянная температура

$$\text{value}(T_p) = T_{p_0},$$

заменить естественным условием (граничным условием третьего рода (1.11))

$$\text{natural}(T_p) = \alpha * (T_p - T_{p_0}).$$

Здесь T_{p_0} — температура внешней среды, α — коэффициент пропорциональности или коэффициент теплоотдачи (теплообмена).

3. Получиться ли построить решение задачи при меньшем значении радиуса кабеля? Как Вы считаете с чем это связано?

4. Для более реалистичного моделирования добавьте описание изоляционной оболочки, которая плотно прилегает к кабелю. В качестве ее материала можно, например, выбрать резину (см. раздел 7.2).

4 Стационарные задачи теплопроводности 3D

В трехмерных стационарных задачах теплопроводности температура T не зависит от времени t и является функцией пространственных координат, например, в декартовой системе координат $T = T(x, y, z)$. Получение аналитических решений таких задач для произвольной конфигурации расчетной области весьма затруднительно, в этом случае на помощь может прийти конечно-элементный метод.

4.1 Стационарная задача теплопроводности для цилиндра в 3D декартовых координатах

Пример 14. Рассмотрим трехмерную задачу теплопроводности для полого кругового цилиндра в декартовой системе координат для исследования распределения температуры в трубе конечных размеров (см. рисунок 12). Торцы теплоизолированы, на внешней боковой и внутренней поверхностях заданы постоянные значения температуры. Соответствующий скрипт для решения задачи представлен в листинге 14.

Листинг 14: Трехмерная задача для полого цилиндра. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Cylinder_3D.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . Cylinder 3D'  
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат  
select  
  textsize=26 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  ngrid=1 ! расчет на крупной сетке  
  
variables Tр {температура}  
  
definitions  
  k= 0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  T_1=100 { температура на внутренней боковой поверхности цилиндра }  
  T_2=1 { температура на внешней боковой поверхности цилиндра }  
  
q=-k*grad(Tр) {трехмерный вектор потока тепла}
```

r1=0.3 { внутренний радиус цилиндра }
r2 = 1 { внешний радиус цилиндра }
h=0.2 { высота цилиндра }
heat = 0 { источник тепла в теле отсутствует }

equations

{ трехмерное уравнение теплопроводности }
div(k*grad(Tp)) + heat = 0

extrusion

surface z = -h { нижняя торцевая поверхность цилиндра }
surface z = h { верхняя торцевая поверхность цилиндра }

boundaries

{ торцы цилиндра теплоизолированы
тепловой поток равен нулю }
surface 1 natural(Tp) = 0
surface 2 natural(Tp) = 0

region 1

{ внутренний круговой контур }
start (r1,0) value(Tp) = T_1 arc(center=0,0) angle=360
{ внешний круговой контур }
start (r2,0) value(Tp) = T_2 arc(center=0,0) angle=360

plots

grid(x,y,z) { трехмерная область решения }
{ контурный график температуры на сечении x=0 }
contour(Tp) on x=0
{ сплошной контурный график температуры на сечении z=0 }
contour(Tp) painted on z=0
{ график температуры на сечении z=0 }
surface(Tp) on z=0
{ распределение вектора потока тепла на сечении x=0
mesh points — параметры расчета и построения графики
penwidth — толщина линий }
vector(q) on x=0 mesh points=16 penwidth = 6
{ распределение вектора потока тепла на сечении z=0 }
vector(q) on z=0 mesh points=16 penwidth = 6

```
{график температуры вдоль линии}
```

```
elevation (Tp) from (r1,0,0) to (r2,0,0) penwidth =6
```

```
{ окно численных результатов
```

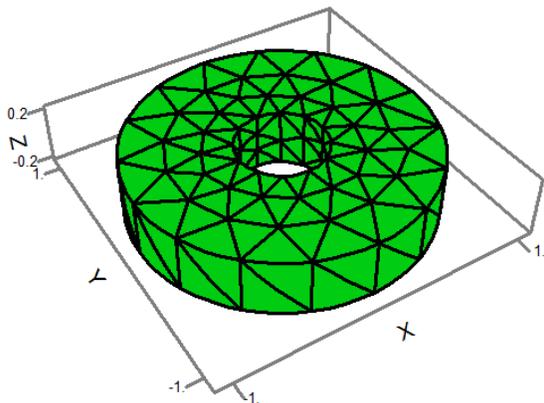
```
для вывода значений температуры в указанных точках }
```

```
summary
```

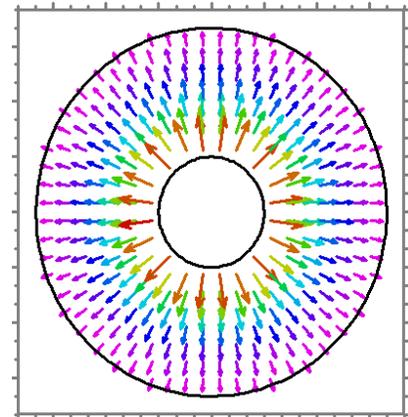
```
report val (Tp, r1,0,0) as "Temperature in (r1,0,0) "
```

```
report val (Tp, r2,0,0) as "Temperature in (r2,0,0) "
```

```
end
```

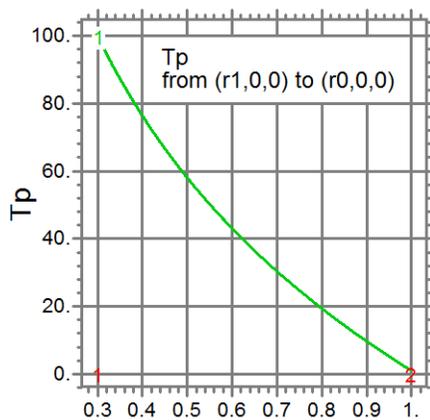


a) Триангулированная область

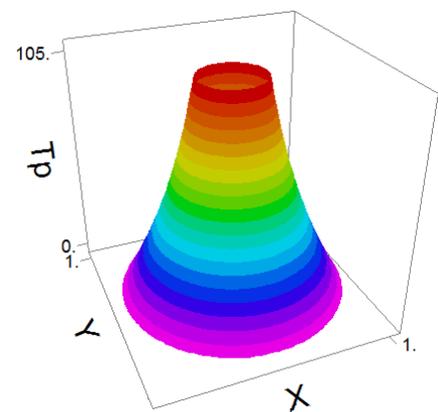


b) Вектор потока тепла на сечении

$z = 0$



c) График температуры по толщине
стенки цилиндра



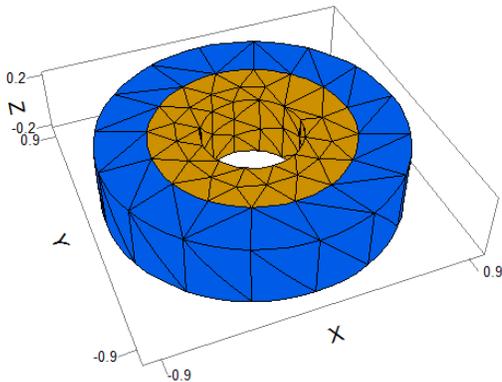
d) Трехмерный график температуры

на сечении $z = 0$

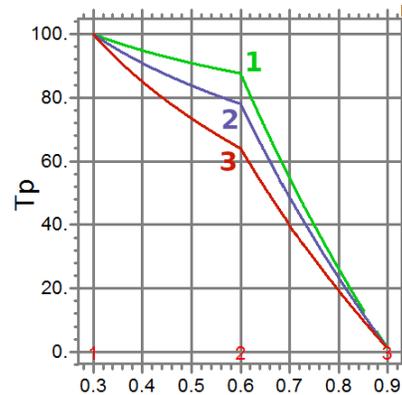
Рис. 24: Иллюстрации к листингу 14.

Из представленного графика температуры (см. рисунок 24 c)) видно, что он качественно соответствует закону распределения температуры в одномерной задаче для цилиндрической стенки (2.14).

Пример 15. Рассмотрим задачу теплопроводности для двухслойного цилиндра, наружный слой которого состоит из изоляционного материала. Торцы цилиндра также теплоизолированы. Такая модельная задача при некоторых допущениях может использоваться для исследования распределения температуры в трубах теплоснабжения покрытых теплоизоляцией. На боковых поверхностях цилиндра заданы постоянные значения температуры. Соответствующий скрипт для решения задачи представлен в листинге 15.



а) Триангулированная область



б) Графики температуры для различных значений k

Рис. 25: Иллюстрации к листингу 15.

Листинг 15: Трёхмерная задача для полого двухслойного цилиндра. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Cylinder_3D_2_regions.pde)

```

title 'Stationary heat conductivity . Cylinder 3D. Two regions'
coordinates cartesian3 ! трёхмерная декартова система координат
select
  textsize =26 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт
  ngrid=1 !расчет на крупной сетке

variables Tр {температура}

definitions
  k { коэффициент теплопроводности }
  T_1=100 { температура на внутренней боковой поверхности цилиндра }
  T_2=1 { температура на внешней боковой поверхности цилиндра }

  q=-k*grad(Tр) {трехмерный вектор потока тепла}

```

r1=0.3 { внутренний радиус цилиндра }
rz=0.6 { радиус границы слоев }
r2 = 0.9 { внешний радиус цилиндра }
h=0.2 { высота цилиндра }
heat = 0 { источник тепла в теле отсутствует }

equations

{трехмерное уравнение теплопроводности}
div(k*grad(Tp)) + heat = 0

extrusion

surface z = -h { нижняя торцевая поверхность цилиндра }
surface z = h { верхняя торцевая поверхность цилиндра }

boundaries

{ торцы цилиндра теплоизолированы
тепловой поток равен нулю }
surface 1 natural(Tp) = 0
surface 2 natural(Tp) = 0

region 1 { область внешнего слоя — теплоизоляция }

k= 0.2 { коэффициент теплопроводности }
{внешний круговой контур }
start (r2,0) value(Tp) = T_2 arc(center=0,0) angle=360
{граница слоев }
start (rz,0) arc(center=0,0) angle=360

region 2 { область внутреннего слоя }

k= 0.6 { коэффициент теплопроводности }
{граница слоев }
start (rz,0) arc(center=0,0) angle=360
{внутренний круговой контур }
start (r1,0) value(Tp) = T_1 arc(center=0,0) angle=360

plots

grid(x,y,z) {трехмерная область решения}
{сплошной контурный график температуры на сечении x=0}
contour(Tp) painted on x=0
{сплошной контурный график температуры на сечении z=0}
contour(Tp) painted on z=0

```

{график температуры на сечении z=0}
surface (Tp) on z=0
{распределение вектора потока тепла на сечении x=0
 mesh points — параметры расчета и построения графики
 penwidth — толщина линий}
vector (q) on x=0 mesh points=16 penwidth = 6
{распределение вектора потока тепла на сечении z=0}
vector (q) on z=0 mesh points=16 penwidth = 6
{график температуры вдоль линии}
elevation (Tp) from (r1 ,0,0) to (r2 ,0,0) penwidth =6

{ окно численных результатов
 для вывода значений температуры в указанных точках }
summary
  report val (Tp, r1 ,0,0) as "Temperature in (r1 ,0,0) "
  report val (Tp, rz ,0,0) as "Temperature in (rz ,0,0) "
  report val (Tp, r2 ,0,0) as "Temperature in (r2 ,0,0) "
end

```

На рисунке 25 (b) отображены графики изменения температуры вдоль оси x (y — равнозначно в силу симметрии) для разных значений коэффициента теплопроводности k для внешнего слоя. Зеленая линия 1 соответствует наименьшему значению — $k = 0.05$, а красная линия 3 — наибольшему — $k = 0.2$. Легко заметить, что чем меньше коэффициент k для теплоизоляции, тем меньше остывает внутренняя часть цилиндра. Аналогичный вывод можно сделать из рассмотрения значений вектора теплового потока на границе слоев.

4.1.1 Задания к примеру 15

1. Постройте графики изменения температуры вдоль горизонтальной оси (x или y) и отобразите в графическом окне распределение вектора потока тепла на сечении цилиндра $x = 0$, когда толщина изоляционного слоя меняется в диапазоне от 0.3 до 1.5 (для преодоления возможного ограничения на количество элементов триангулированной области в Lite версии программы можно уменьшить высоту цилиндра).

2. Постройте графики изменения минимального и максимального значе-

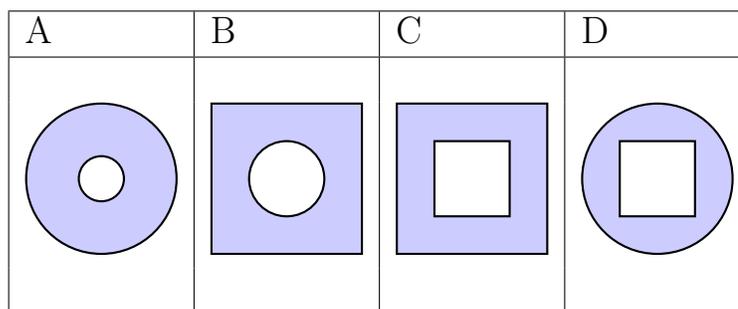
ний модуля вектора потока тепла в зависимости от толщины изоляционного слоя (можно использовать дополнительные программы для выполнения этого задания).

3. Постройте графики изменения минимального и максимального значений модуля вектора потока тепла в зависимости от значений коэффициента теплопроводности изоляционного цилиндра.

4. Получите решение этой задачи в двумерной постановке и сравните с полученным трехмерным решением.

5. Постройте трехмерный график распределения температуры в полый трубе. Варианты схем поперечных сечений см. в таблице 9). Значения параметров задачи представлены в таблице 10. Здесь T_1 — значение температуры на внутренней поверхности трубы, T_2 — на внешней боковой поверхности; r_1 , r_2 — внешний и внутренний характерные размеры (радиус для круга и $1/2$ стороны для квадрата) трубы; m_1 , m_2 — номера материалов из таблиц 11 и 12 соответственно. Данные для коэффициента теплопроводности выбранного материала можно взять из таблиц 11 и 12 [23]. На торцах цилиндра заданы условия теплоизоляции.

Таблица 9: Схемы поперечных сечений трубы



Для сведения: огнеупорные материалы (огнеупоры) обладают более высокой прочностью при высоких температурах (более 1580°C), а также обычно инертны по отношению к действию активных веществ (например, кислотам, щелочам, растворителям и т. п.). В основном это неметаллические материалы, которые применяются при наличии воздействия на объект высоких температур. В состав таких материалов входят тугоплавкие оксиды, силикаты, карбиды, нитриды и бориды. В качестве примера огнеупора можно привести углерод (кокс, графит). Самое тугоплавкое химическое вещество на сегодняшний

день — карбонитрид гафния (HfC_xN_y), имеет температуру плавления около 4200°C . В 2019 году коллектив исследователей из МИСиС получил разновидность карбонитрида гафния с химической формулой $HfC_{0,5}N_{0,35}$ [26].

Таблица 10: Варианты для задачи 15

№	Сечение	r_2 , м	r_1 , м	T_2 , °C	T_1 , °C	m_1	m_2
1	A	0.9	0.4	20	500	1	1
2	B	1.0	0.5	10	700	2	2
3	C	1.1	0.6	30	800	3	3
4	D	0.8	0.5	5	500	4	4
5	A	1.2	0.6	10	800	5	5
6	B	0.9	0.3	30	400	1	2
7	C	1.0	0.4	20	200	2	3
8	D	0.9	0.5	30	700	3	4
9	A	1.1	0.7	10	900	4	5
10	B	1.2	0.8	30	600	5	1
11	C	0.8	0.6	20	1000	4	2
12	D	0.8	0.4	10	1200	1	4

Таблица 11: Теплопроводность k огнеупорных изделий, их плотность ρ , теплоемкость c , здесь T — температура [23].

№	Материал	ρ , кг/м ³ · 10 ⁻³	k , кДж/(кг·град)	c , Вт/(м·град)
1	Силлиманитовые	2.2–2.4	$1.69 - 2.3 \cdot 10^{-4}T$	$0.8 + 2.5 \cdot 10^{-4}T$
2	Корундовые	2.3–2.6	$2.09 + 1.9 \cdot 10^{-3}T$	$0.8 + 0.4 \cdot 10^{-3}T$
3	Цирконивые	3.3	$1.3 + 6.4 \cdot 10^{-4}$	$0.54 - 1.2 \cdot 10^{-4}T$
4	Карборундовые	2.3–2.6	$21 - 1 \cdot 10^{-2}T$	$0.96 + 1.46 \cdot 10^{-4}T$
5	Угольные	1.35–1.6	$23 + 3.5 \cdot 10^{-2}T$	0.8

Таблица 12: Теплопроводность k , плотность ρ , теплоемкость c материалов [23].

№	Материал	ρ , кг/м ³	k , Дж/(кг·град)	c , Вт/(м·град)
1	Вермикулитобетон	300–800	0.08...0.21	840
2	Вата шлаковая	200	0.05	750
3	Глина огнеупорная	1800	1.04	800
4	Грунт сухой	1500	0.4	850
5	Керамзит	800...1000	0.16...0.2	750

4.2 Использование нескольких слоев и **limited region**

Пример 16. В этом примере показано использование описаний **limited region** и **void** для создания объектов с более сложной областью. Рассматривается задача стационарной теплопроводности для тела в форме цилиндрического стакана (рис. 26 (а)). Заданы граничные условия первого рода — значения температуры на внешней и внутренней границах.

Раздел **boundaries** содержит писания двух областей, которые объявляются с помощью команды **region**. В первой области **region 1** задаются внешние боковые стенки стакана. Вторая область **limited region 2** распространяется только на слой **layer 'walls'**. Использование ключевого слова **void** приводит к тому, что описываемая область «вырезается» (удаляется) из объекта. Отдельное внимание необходимо уделить при описании граничных условий — задать условия на всех частях поверхности стакана. Для этого в разделе **boundaries** сначала задаются условия для нижнего и верхнего торцов стакана:

```
surface 1 value(Tp) = T_2
```

```
surface 3 value(Tp) = T_2
```

Температура на боковых поверхностях стакана задается в разделе описания границ:

```
start (r1,0) value(Tp) = T_1 arc(center=0,0) angle=360
```

```
start (r2,0) value(Tp) = T_2 arc(center=0,0) angle=360
```

Для того, чтобы задать температуру внутри стакана, на его дне, внутри области **limited region 2** в слое **layer 'walls'** записывается команда:

```
surface 2 value(Tp) = T_1
```

Для проверки правильности описания граничных условий рекомендуется проверить значения температуры в нескольких точках на границе тела и график распределения температуры (см. рисунок 26 (b)). В листинге 16 представлен код для решения этой задачи.

Листинг 16: Использование нескольких слоев и **limited region**. Задача для стакана. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Cylinder_3D_like_glass.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . Cylinder 3D. Like glass'
```

```
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат
```

```
select
```

```
textsize =16 ! размер шрифта на графиках
font=1 ! sans-serif шрифт
ngrid=1 !расчет на крупной сетке
```

```
variables Tр {температура}
```

definitions

```
k=0.9 { коэффициент теплопроводности }
T_1=100 { температура на внутренней поверхности стакана}
T_2=1 { температура на внешней поверхности стакана}
```

```
r1=0.5 { внутренний радиус стакана }
r2 = 0.9 { внешний радиус стакана }
h=0.5 { высота стакана }
p=0.4 { высота дна стакана}
heat = 0 { источник тепла отсутствует}
```

```
{ компоненты трехмерного вектора потока тепла}
q_x=-k*dx(Tр)
q_y=-k*dy(Tр)
q_z=-k*dz(Tр)
{вектор потока тепла — задание по компонентам}
q =vector( q_x, q_y, q_z)
{величина модуля вектора потока тепла}
qdm=magnitude(q)
```

equations

```
{трехмерное уравнение теплопроводности}
div(k*grad(Tр)) + heat = 0
```

extrusion

```
{поверхность #1}
surface z = -p {поверхность нижнего торца}
    layer 'bottom'
{поверхность #2}
surface z = 0 {поверхность верхнего торца дна}
    layer 'walls'
{поверхность #3}
surface z = h {поверхность верхнего торца}
```

boundaries

{температура на нижнем торце}

surface 1 value(Tp) = T_2

{температура на верхнем торце}

surface 3 value(Tp) = T_2

region 1

{описание боковой поверхности "стакана"}

start (r2,0) value(Tp) = T_2 arc(center=0,0) angle=360

limited region 2

layer 'walls' void

{температура на дне "стакана"}

surface 2 value(Tp) = T_1

{описание боковой поверхности "стакана"}

start (r1,0) value(Tp) = T_1 arc(center=0,0) angle=360

plots

grid(x,y,z) {трехмерная область решения}

{контурный график температуры на сечении $x=0$ }

contour(Tp) on $x=0$

{сплошной контурный график температуры на сечении $z=-p/2$ }

contour(Tp) painted on $z=-p/2$

{график температуры на сечении $z=-p/2$ }

surface(Tp) on $z=-p/2$

{распределение вектора потока тепла на сечении $z=h/2$

mesh points — параметры расчета и построения графики

penwidth — толщина линий}

vector (q) on $z=h/2$ mesh points=16 penwidth = 6

elevation (Tp) from (r1,0,h/2) to (r2,0,h/2) penwidth =8

{ окно численных результатов

для температуры в указанных точках }

summary

{температуры в точке на внутренней боковой поверхности "стакана"}

report val (Tp, r1,0,h/2) as "Temperature in (r1,0,h/2)"

{температура в точке на внутренней стороне дна "стакана"}

report val (Tp, 0,0,0) as "Temperature in (0,0,0)"

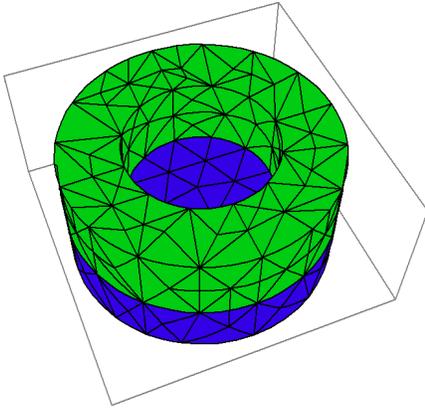
{температура в точке на внешней стороне дна "стакана"}

report val (Tp, 0,0,-p) as "Temperature in (0,0,-p)"

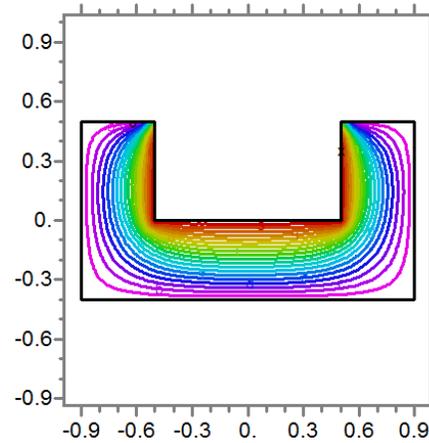
```

{температура в точке на внешней боковой поверхности "стакана"}
report val (Tp, r2,0, h/2) as "Temperature in (r2,0, h/2)"
end

```



а) Триангулированная сетка для «стакана».



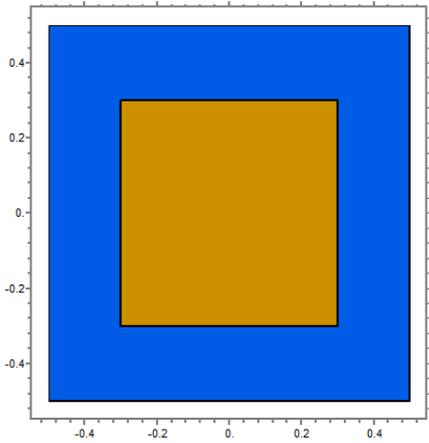
б) Поле температуры на сечении $x = 0$.

Рис. 26: Иллюстрации к листингу 16.

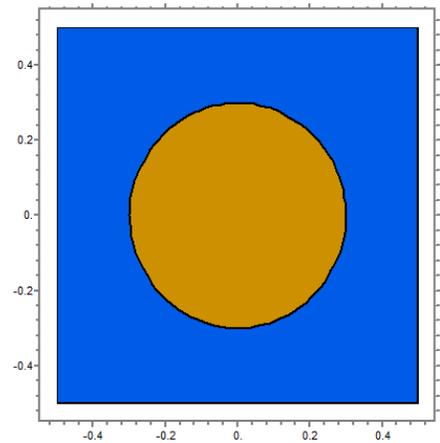
4.3 Источник тепла в ограниченном составном объекте

Пример 17. Рассмотрим куб высотой h , на гранях которого поддерживается постоянная температура. Внутри куба находится сплошной цилиндр, в котором находится источник тепла. Радиус r и высота цилиндра равны друг другу. Куб и цилиндр состоят из различных материалов, поэтому значения коэффициента теплопроводности для них различны. Скрипт для реализации численного решения стационарной задачи теплопроводности для такого объекта представлен в листинге 17.

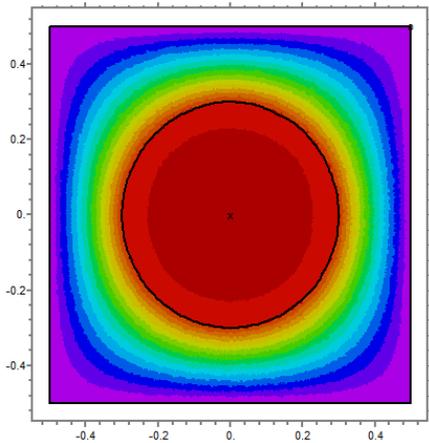
Для задания геометрии внутреннего объекта (цилиндра) и его характеристик использовано описание **limited region**. Также следует обратить внимание на краткую запись задания 4-х плоскостей (поперечных сечений) и их автоматическую (по умолчанию) нумерацию. Аналогично пронумерованы три слоя между этими плоскостями.



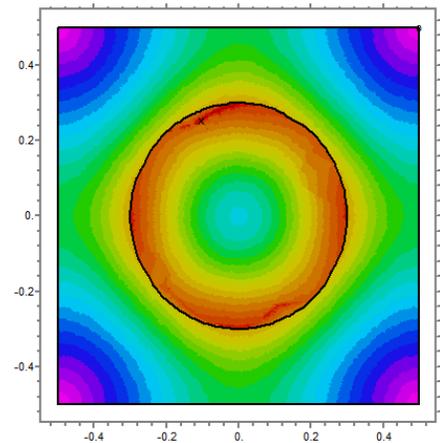
a) Сечение плоскостью $x = 0$



b) Сечение плоскостью $z = m/2$



с) Распределение температуры



d) Величина теплового потока

Рис. 27: Иллюстрации к листингу 17.

Листинг 17: Источник тепла в ограниченном составном объекте. Файл (listings/heat3D_Heat_source_in_a_limited_layer.pde)

```

title '3D heat conduction. Heat source in a limited layer '
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат
select
  painted ! все контурные графики со сплошной заливкой
  fontsize =16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт
  ngrid=1 ! расчет на крупной сетке

variables Tр ! температура

definitions
  k ! коэффициент теплопроводности
  T_0=0 ! температура на внешней границе тела
  {компоненты вектора теплового потока}

```

$h=0.5$! высота (сторона) куба
 $r=0.3$! радиус и высота сплошного цилиндра

heat ! мощность источника тепла в объекта

{ компоненты трехмерного вектора потока тепла}
 $q_x = -k \cdot dx(T_p)$
 $q_y = -k \cdot dy(T_p)$
 $q_z = -k \cdot dz(T_p)$
{вектор потока тепла — задание по компонентам}
 $q = \text{vector}(q_x, q_y, q_z)$
{величина модуля вектора потока тепла}
 $qdm = \text{magnitude}(q)$

equations

{трехмерное уравнение теплопроводности}
 $\text{div}(k \cdot \text{grad}(T_p)) + \text{heat} = 0$

extrusion

{ в краткой записи заданы 4 плоские поверхности
 $z = -h$ (поверхность #1), $z = -r$ (поверхность #2),
 $z = r$ (поверхность #3), $z = h$ (поверхность #4),
и между ними 3 слоя:
слой #1 — слой между 1й и 2й поверхностями,
слой #2 — слой между 2й и 3й поверхностями,
слой #3 — слой между 3й и 4й поверхностями,
нумерация по умолчанию автоматическая}
 $z = -h, -r, r, h$

boundaries

! Температура на поверхности куба постоянная
! температура на нижней грани куба (поверхности #1)
surface 1 value(T_p)= T_0
! температура на верхней грани куба (поверхности #4)
surface 4 value(T_p)= T_0

region 1

$k=0.2$! коэффициент теплопроводности материала куба
! источника тепла в области между кубом и цилиндром нет
heat=0

```

! контур куба в поперечном сечении – квадрат
start (-h,-h)
! Температура на боковой поверхности куба постоянная
value(Tp)=T_0
line to (h,-h) to (h, h) to (-h,h) to close

```

limited region 2

```

! Цилиндр – ограниченный второй объект (слой)
! другие значения для теплопроводности и
! источника тепла
layer 2 ! задание кругового контура цилиндра в слое #2
heat=10
k=0.9
start (-r,0) arc(center=0,0) angle=360 to close

```

plots

```

{область решения на сечении x=0 без линий триангуляции}
grid(y,z) on x=0 nolines
{область решения на сечении z=h/2 без линий триангуляции}
grid(x,y) on z=h/2 nolines
{здесь и далее все контурные графики отображаются сплошными
см. раздел select }
{сплошной контурный график температуры на сечении z=0}
contour(Tp) on z=0
{трехмерный график температуры на сечении z=0}
surface(Tp) on z=0
{распределение вектора потока тепла на сечении z=h/2 }
vector ( q ) on z=h/2
{сплошной контурный график температуры на сечении z=h/2}
contour(qdm) on z=h/2
{увеличенное для наглядности векторное поле потока тепла на сечении y=0}
vector ( q ) on y=0 zoom(0.8*h,0.8*h, 0.08,0.08)
{увеличенный для наглядности сплошной (см. раздел select)
контурный график значения модуля вектора потока тепла на сечении y=0}
contour(qdm) on y=0 zoom(0.8*h,0.8*h, 0.08,0.08)
{график температуры вдоль линии, penwidth – толщина линии графика}
elevation (Tp) from (-r,0) to (r,0) on z=h/2 penwidth =6
end

```

4.3.1 Задания к примерам 16 и 17

Найдите основные характеристики, описывающие процесс теплопроводности для следующих задач:

1. На внешней поверхности стенок стакана поддерживается температура T_2 , для внутренней поверхности стенок стакана и жидкости, наполняющей стакан до краев — температура T_1 .

2. Стакан заполнен жидкостью по слоям. Заданы параметры первого и второго слоев: T_1 и T_2 — значения их температур, k_1 и k_2 — значения коэффициента теплопроводности. На внешней поверхности стенок стакана поддерживается постоянная температура T_0 , k_0 — теплопроводность материала стакана.

3. Решите задачи из пунктов 1-2 для стаканов следующих форм: куб, полусфера, конус, параболоид вращения.

4. Решите задачу 17 для следующих конструкций:

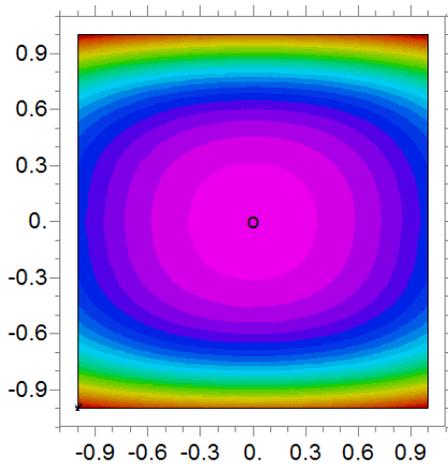
№	Внешний объект	Внутренний объект
1	Цилиндр	Цилиндр
2	Куб	Куб
3	Цилиндр	Куб
4	Шар	Куб
5	Шар	Цилиндр

5. Задайте на верхней грани куба другое граничное условие (например, 2-го или 3-го рода) в задаче 17. Существенно ли изменяться графики температуры и модуля вектора потока тепла?

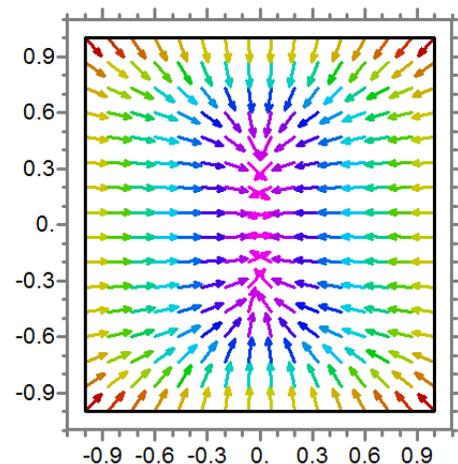
4.4 Задача теплопроводности с учетом анизотропии материала

Как было отмечено ранее, материал является анизотропным по отношению к некоторому свойству, если оно различается в зависимости от выбранного направления. Одним из частных случаев анизотропии является ортотропия, при которой рассматриваемое свойство неодинаково по взаимно перпендикулярным направлениям. В качестве примеров ортотропного материала можно привести дерево и минералы. В частности, коэффициент теплопроводности сосны в направлении волокон равен $0.18 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$, а поперечном направлении — $0.09 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$.

Пример 18. Рассмотрим задачу теплопроводности с учетом ортотропии материала [20]. В этом случае уравнение теплопроводности будет иметь вид (1.22). В качестве объекта выберем для куба со стороной h . На нижней и верхней гранях задана постоянная температура, а на боковых — тепловой поток. Куб изготовлен из ортотропного материала таким образом, что главные оси теплопроводности параллельны ребрам куба. Расположив специальным образом декартову систему координат, обозначим различные по значению главные коэффициенты теплопроводности по трем направлениям вдоль осей x , y , z соответственно k_x , k_y и k_z . На рисунках 28 видно, что поля температуры и вектора потока тепла не симметричны в отличие от аналогичной задачи для изотропного материала, у которого k_x , k_y и k_z одинаковые.



а) Поле температуры на сечении $z = 0$



б) Поле \vec{q} на сечении $z = h/2$

Рис. 28: Иллюстрации к листингу 18.

В листинге 18 представлен скрипт для реализации численного решения стационарной задачи теплопроводности для куба из ортотропного материала.

Листинг 18: Стационарная задача теплопроводности для ортотропного куба. Файл (listings/heat3D_Anizotrop_Cube.pde)

```
title '3D heat conduction in anisotropic cube'
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат
select
  painted ! все контурные графики со сплошной заливкой
  fontsize =16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт
  ngrid=1 ! расчет на крупной сетке

variables Tр ! температура

definitions
  h=1 ! сторона куба
  ! коэффициенты теплопроводности
  k_x=0.09
  k_y=0.01
  k_z=0.09

  heat = 0 { источник тепла отсутствует }
  { значение теплового потока на боковой поверхности куба }
  q_0=10
  { значение температуры на верхней и нижней гранях куба }
  T_0=-40

  { компоненты вектора теплового потока }
  q_x=-k_x*dx(Tр)
  q_y=-k_y*dy(Tр)
  q_z=-k_z*dz(Tр)
  { вектор потока тепла — задание по компонентам }
  q =vector( q_x, q_y, q_z )
  { величина модуля вектора потока тепла }
  qdm=magnitude(q)

equations
  { трехмерное уравнение теплопроводности
  с учетом ортотропности материала }
```

$$dx(k_x * dx(T_p)) + dy(k_y * dy(T_p)) + dz(k_z * dz(T_p)) + \text{heat} = 0$$

{ задание двух плоскостей для верхней и нижней граней куба
в краткой записи, $z = -h$ — поверхность #1, $z = h$ — поверхность #2 }

extrusion

$z = -h, h$

boundaries

! граничные условия на нижней и верхней гранях куба

surface 1 value(Tp)=T_0 ! задана температура

surface 2 value(Tp)=T_0

region 1

{ описание боковой поверхности тела
в виде ее контура на поперечном сечении }

start (-h, -h)

! везде задан одинаковый тепловой поток

natural(Tp)=q_0

line to (h, -h) to (h, h) to (-h, h) to close

plots

grid(x,y,z) {трехмерная область решения}

{здесь и далее все контурные графики отображаются сплошными
см. раздел select }

{график поля температуры на сечении $z=0$ }

contour(Tp) on z=0

{распределение вектора потока тепла на сечении $z=0$

norm — все стрелки одинаковой длины,

значения определяются по цветовой шкале,

mesh points — параметры расчета и построения графики

penwidth — толщина линий }

vector(q) norm mesh points=16 penwidth=6 on z=0

{графики температуры вдоль различных линий}

elevation (Tp) from (-h,0,0) to (h,0,0) penwidth =8

elevation (Tp) from (0,-h,0) to (0,h,0) penwidth =8

{графики полей температуры на соответствующих
сечениях $x=h/2, y=h/2, z=h/2$ }

contour(Tp) on x=h/2

contour(Tp) on y=h/2

surface(Tp) on z=h/2

```

{распределение вектора потока тепла на сечении z=h/2}
vector(q) norm mesh points=16 penwidth=6 on z=h/2
{график модуля вектора потока тепла на сечении z=h/2}
surface(qdm) on z=h/2

{ окно численных результатов
  для вывода значений температуры в указанных точках }
summary
  report val (Tp, 0.5*h,0,0) as "Temperature in (0.5*h,0,0)"
  report val (Tp, 0,0.5*h,0) as "Temperature in (0,0.5*h,0)"
end

```

4.4.1 Задания к примеру 18.

1. Постройте график температуры от точки $(-h, 0, 0)$ к точке $(h, 0, 0)$. Сравните вид аналогичных графиков для сечений $x = 0$ и $z = 0$.

2. Задайте k_y с помощью команды **staged** так, чтобы значение коэффициента менялось от 0.01 до 0.09 с шагом 0.01. Сравните распределение температуры в сечении $z = 0$ для значений k_y равных: 0.01, 0.05, 0.09.

3. Решите аналогичную задачу для:

- шара,
- вертикального кругового цилиндра, высота и радиус которого равны между собой
- горизонтального кругового цилиндра, длина и радиус которого равны между собой.

Сравните полученные решения для температуры в трех точках.

4. Как изменится распределение температуры, если изменить граничное условие на одной из боковых граней путем задания на ней значения температуры?

5 Технология `stage`

в стационарных задачах теплопроводности

В среде FlexPDE можно задавать значения параметра (или параметров) задачи из определенного диапазона, что позволяет исследовать его влияние на решение. Это можно осуществлять с помощью средства `stage`. При его использовании скрипт решения задачи последовательно выполняется для каждого значения параметра из указанного диапазона. На каждом шаге в качестве начального приближения используется решение и триангуляция области, которые были получены на предыдущем шаге. Заметим, что технологию `stage` можно использовать только для стационарных задач.

Кратко опишем синтаксис технологии `stage`. В разделе `select` задается количество шагов изменения параметра (обычно варьируется один параметр), например:

```
select stage=10
```

В этом же разделе можно останавливать решение после каждого шага с помощью команды:

```
autostage=off
```

Таким образом, задается параметр с именем `stage`, который последовательно принимает значения от 1 до указанного значения в разделе `select`. Для непосредственного применения этого параметра в задаче необходимо использовать вспомогательные переменные, определенные в разделе `definitions` с указанием `stage`, например:

```
definitions
```

```
k ! коэффициент теплопроводности
```

```
...
```

```
k=0.1*stage
```

Можно использовать другой синтаксис, задав набор конкретных значений с помощью команды `staged`:

```
k = staged (0.1, 0.5, 1, 2)
```

В этом случае параметр `k` будет принимать значение 0.1 на первом шаге, 0.5 — на втором, и так далее (запятые внутри скобок необязательны).

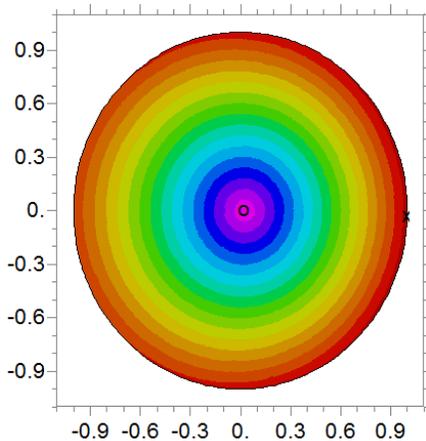
Для еще одного варианта задания набора значений параметра p из конкретного диапазона с определенным шагом можно использовать команду `p=staged(p_0 by step to p_n)`. Причем шаг изменения параметра `step` может принимать не только целые, но и вещественные значения. Параметр p при вещественном шаге `step` не выйдет за пределы конечного значения p_n . Пример использования:

```
k = staged(0.1 by 0.2 to 1.1)
```

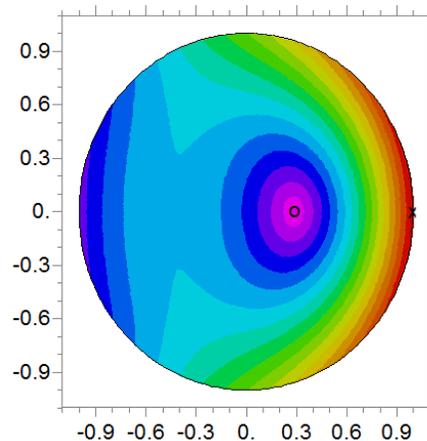
Здесь параметр k будет принимать последовательно значения от 0.1 до 1.1 с шагом 0.2 по аналогии с переменной заданной в цикле.

5.1 Использование `stage` для перемещения источника тепла. 2D задача

Пример 19. Рассмотрим задачу теплопроводности для условно «бесконечно» длинного сплошного кругового цилиндра, т.е. его длина цилиндра l много больше диаметра $2r$ ($l \gg 2r$). В этом случае можно перейти к двумерной постановке задачи на поперечном сечении, которое достаточно удаленно от торцов цилиндра. На всей боковой поверхности задана постоянная температура. Внутри цилиндра присутствует источник тепла. Особенность примера состоит в том, что расчеты необходимо провести для различных положений источника тепла, которые изменяются по закону $10+x*stage$. При этом задано количество шагов изменения `stage=15`.



а) Поле значений $|\vec{q}|$ при `stage=1`



б) Поле значений $|\vec{q}|$ при `stage=15`

Рис. 29: Иллюстрации к листингу 19.

В листинге 19 представлен скрипт для реализации численного решения этой задачи. На рисунке 29 показаны поля температуры при различных значениях параметра `stage`.

Листинг 19: Пример стационарной задачи теплопроводности в 2D постановке. Использование `stage`. Файл (`listings/Stationary_Heat_Conductivity_2D_stage.pde`)

```
title 'Stationary heat conductivity . 2D. stage '  
{ по умолчанию используется двумерная  
декартова система координат}  
select  
  painted ! все контурные графики со сплошной заливкой  
  textsize = 16 ! размер шрифта на графиках  
  font = 1 ! sans-serif шрифт  
  ngrid = 6 ! условный размер элементов на сетке  
  
  stages = 15 { количество шагов изменения параметра }  
{ остановка решения для каждого перебираемого значения параметра }  
  autostage = off  
  
variables Tр { температура }  
  
definitions  
  k = 0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  T_0 = 10 { температура на границе }  
  r = 1 { радиус цилиндра }  
  
  q = -k*grad(Tр) ! вектор потока тепла  
  { величина модуля вектора потока тепла }  
  qdm = magnitude(q)  
  
  heat = 10 + x*stage { источник тепла меняет положение }  
  
equations  
  { двумерное уравнение теплопроводности }  
  div(k*grad(Tр)) + heat = 0  
  
boundaries  
region 1 ! круговая граница области с заданной тем-рой  
  start(-r,0) value(Tр) = T_0 arc(center=0,0) angle=360
```

plots

`grid(x,y) nolines` {область решения без линий триангуляции}
{здесь и далее все контурные графики отображаются сплошными см. раздел `select`}

`contour(Tp)`

{распределение вектора потока

`norm` — все стрелки одинаковой длины

значения определяются по цветовой шкале,

`mesh points` — параметры расчета и построения графики

`penwidth` — толщина линий }

`vector(q) norm mesh points=16 penwidth=6`

{скалярное поле значений модуля вектора потока тепла}

`contour(qdm)`

{графики температуры вдоль различных линий}

`elevation (Tp) from (-r,0) to (r,0) penwidth =6`

`elevation (Tp) from (0,-r) to (0,r) penwidth =6`

{ окно численных результатов

для вывода значений температуры в указанных точках }

summary

`report val (Tp, 0,0) as "Temperature in (0,0)"`

`report val (Tp, 0.5*r,0) as "Temperature in (0.5*r,0)"`

`end`

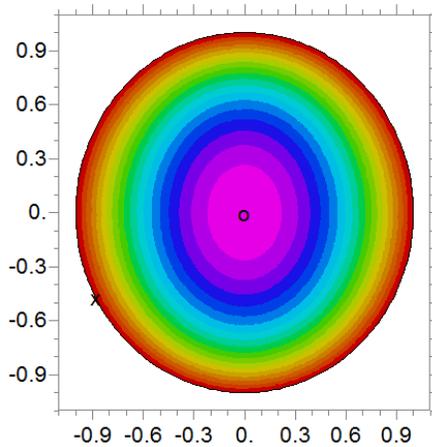
5.2 Использование `staged` для изменения источника тепла. 2D задача

Пример 20. В данном примере задача формулируется по аналогии с примером 19. Разница состоит в том, что источник тепла задан как функция двух координат $-\exp(n*x^2+y^2)$, при этом n принимает последовательно значения 0.05, 1, 5. Для этого достаточно в листинге 19 в разделе `select` удалить запись `stages=15`, а в разделе `definitions` согласно постановке указать фрагмент скрипта из листинга 20. На рисунке 30 представлены поля температуры для первого и третьего значений изменяемого параметра n .

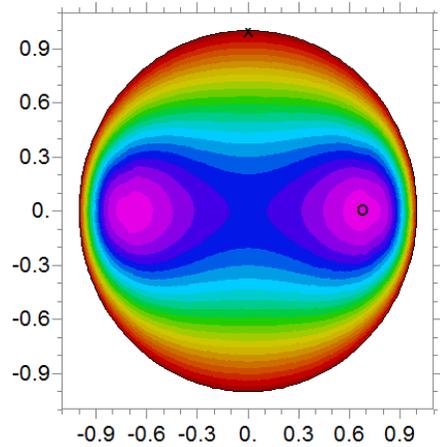
Листинг 20: Фрагмент скрипта. Использование `staged`.

```
n=staged(0.05, 1, 5)
```

```
heat= $-\exp(n*x^2+y^2)$ 
```



а) Поле температуры при `stage=1`



б) Поле температуры при `stage=3`

Рис. 30: Иллюстрации к примеру 20.

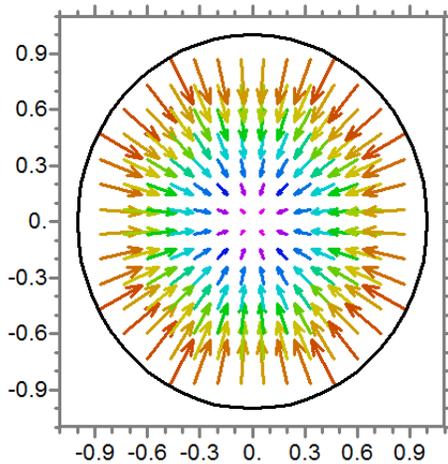
5.3 Использование `staged` для изменения знака у источника тепла. 2D задача

Пример 21. Рассмотрим задачу по аналогии с примером 19. Разница заключается в том, что используется другая запись значений для источника тепла

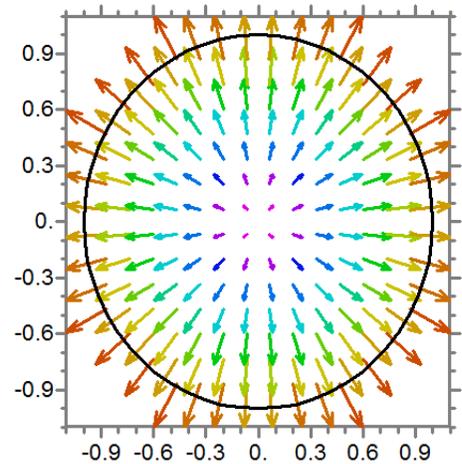
```
heat=staged(-100 by 200 to 100)
```

здесь для `staged=1` источник тепла `heat=-100` и для `staged=2` — `heat=100`.

Для получения решения такой задачи достаточно в листинге 19 в разделе `select` удалить запись `stages=15`, а в разделе `definitions` согласно постановке указать фрагмент скрипта из листинга 21.



а) Вектор потока тепла \vec{q} при `stage=1`



б) Вектор потока тепла \vec{q} при `stage=2`

Рис. 31: Иллюстрации к листингу 21.

На рисунке 31 хорошо видно изменение направления векторов потока тепла при изменении знака у источника тепла `heat`.

Листинг 21: Фрагмент скрипта. Использование `staged` для диапазона значений.

```
heat=staged(-100 by 200 to 100)
```

5.3.1 Задания к примерам 19 — 21.

1. Решите задачи для следующих представлений функции источника тепла `heat`:

- a) $-\exp(n \cdot x^2 + n^2 \cdot y^2)$, n от 1 до 10;
- b) $\ln(n \cdot x^2 + n^2 \cdot y^2)$, n от 1 до 10;
- c) $n \cdot \sin(y/\pi)^2 + \cos(x/\pi)^2/n$, n от 1 до 20;
- d) $n \cdot \sinh(x)$, n от 1 до 30;
- e) $\pi \cdot n \cdot \sin(x + \pi/2)$, n от 1 до 16;
- f) $n \cdot \cos(y + \pi)$, n от 1 до 12;
- g) $(-1)^n \cdot \cos(y + \pi/2)$, n от 1 до 4;
- h) $(-1)^n \cdot \cos(n \cdot x \cdot y)$, n от 1 до 14;
- i) $(-1)^n \cdot \sin(n \cdot x \cdot y)$, n от 1 до 10;
- j) $(-1)^n \cdot \tan(x^2 \cdot y)$, n от 1 до 6;
- k) $(-1)^n \cdot \sin(n \cdot x^2 \cdot y^2)$, n от 1 до 16;
- l) $(-1)^n \cdot \cos(n \cdot x^2)$, n от 1 до 18;
- m) $(-1)^n \cdot \sin(n \cdot x^2)$, n от 1 до 24.

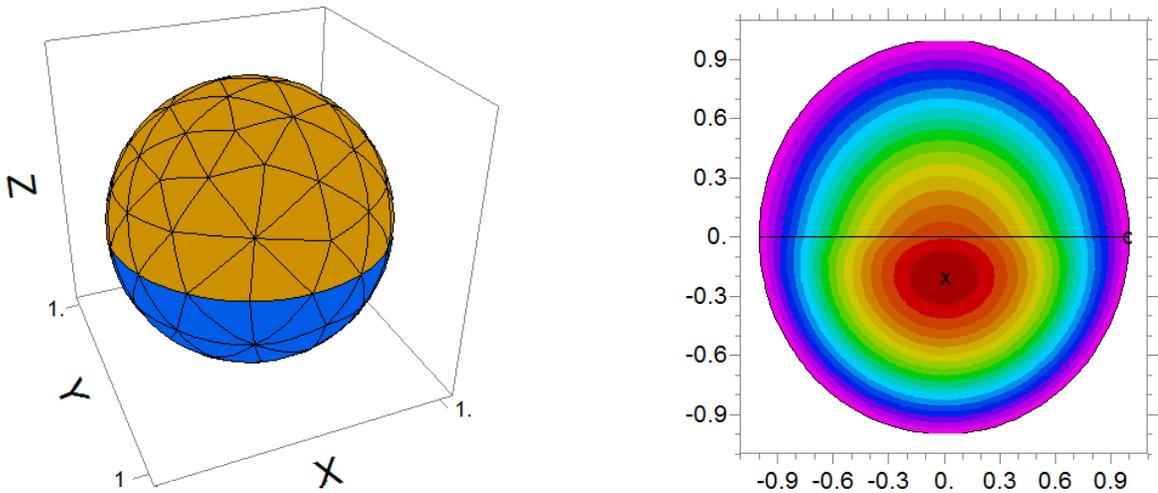
Шаг изменения параметра n можно задавать равным 1, 2 или 3.

2. Решите задачи из предыдущего пункта для квадрата, когда температура на вертикальных сторонах в два раза меньше температуры на горизонтальных сторонах.

3. Решите задачи из предыдущего пункта, когда на вертикальных гранях граничное условие соответствует условию термоизоляции.

5.4 Использование stages в 3D задаче для изменения коэффициента теплопроводности

Пример 22. В данном примере в качестве объекта рассматривается сфера, которая состоит из двух полусфер с разными коэффициентами теплопроводности. На всей поверхности сферы поддерживается постоянная температура. В скрипте предусмотрено автоматическое изменение коэффициента теплопроводности k в верхней полусфере (верхнем слое). Таким образом, в одной программе можно смоделировать и получить результаты для нескольких наборов параметров задачи или рассмотреть более сложные изменения коэффициента теплопроводности.



а) Триангулированная расчетная область — составная сфера б) Поле температуры на сечении $x = 0$ при `stage=2`

Рис. 32: Иллюстрации к листингу 22.

В листинге 22 представлен скрипт для реализации численного решения этой задачи. На рисунке 32 показана трехмерная расчетная область и поле температуры, которое было получено на втором шаге показаны поля и построено для сечения $x = 0$.

Листинг 22: Пример стационарной задачи теплопроводности в 3D постановке. Использование stages. Файл (`listings/Stationary_Heat_Conductivity_Using_Stages.pde`)

```
title 'Stationary heat conductivity . Using stages '  
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат  
  
select
```

painted !все контурные графики со сплошной заливкой
stages=20 { двадцать шагов изменения параметра }
{остановка решения для каждого перебираемого значения параметра}
autostage=off

variables T_p { температура }

definitions

k { коэффициент теплопроводности }
 $r = 1$ { радиус шара }
 $h_0 = 100$ { параметр теплоты }
 $heat = h_0 * \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ { источник тепла в сфере }

equations

{трехмерное уравнение теплопроводности}
 $\text{div}(k * \text{grad}(T_p)) + heat = 0$

extrusion

{ поверхность нижней полусферы – поверхность #1 }
surface $z = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$
{ плоскость границы полусфер – поверхность #2 }
surface $z = 0$
{ поверхность верхней полусферы – поверхность #3 }
surface $z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$
{ между ними 2 слоя:
слой #1 – слой между 1й и 2й поверхностями,
слой #2 – слой между 2й и 3й поверхностями,
нумерация по умолчанию автоматическая }

boundaries

{ граничные условия на поверхностях полусфер
нулевая температура }
surface 1 **value**(T_p) = 0
surface 3 **value**(T_p) = 0

region 1

{ коэффициент теплопроводности в 1–м слое,
т.е. в нижней полусфере }
layer 1 $k = 0.1$
{ переменный коэффициент теплопроводности в 2–м слое,

```

т.е. в верхней полусфере}
  layer 2 k=0.1*stage
{ температура на круговом контуре}
  start (r,0) value(Tp) = 0 arc(center=0,0) angle=360

plots
  grid(x,y,z) {трехмерная область решения}
  {поле температуры на сечении x=0}
  contour(Tp) on x=0

{ окно численных результатов
  для вывода значений температуры в указанных точках }
summary
  report val (Tp, 0,0,0) as "Temperature in (0,0,0) "
  report val (Tp, 0.5*r,0,0) as "Temperature in (0.5*r,0,0) "
end

```

5.5 Использование **staged** в 3D задаче для изменения коэффициента теплопроводности

Пример 23. Рассматривается теплопроводность однородного шара с постоянной температурой на поверхности и источником тепла в его центре. Решение задачи строится для четырех значений коэффициента теплопроводности $k = 0.1, 0.5, 1, 2$. Для получения результатов расчетов в одном скрипте используется технология **stage**. В листинге 23 представлен соответствующий код.

Листинг 23: Пример стационарной задачи теплопроводности для шара в 3D постановке. Использование **staged**. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Using_Staged.pde)

```

title 'Stationary heat conductivity of sphere. Using staged'
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат

select
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках
  font=1 ! sans-serif шрифт
  {остановка решения для каждого перебираемого значения параметра}
  autostage=off

```

variables Temp {температура}

definitions

{ коэффициент теплопроводности }

k= staged (0.1, 0.5, 1, 2)

r = 1 { радиус шара }

h0 = 50 { параметр теплоты }

heat = h0*exp (- (x^2+y^2+z^2)){ источник тепла в шаре }

equations

{ трехмерное уравнение теплопроводности }

div(k*grad(Temp)) + heat = 0

extrusion

{ поверхность нижней полусферы – поверхность #1 }

surface z = -sqrt(r^2 - (x^2+y^2))

{ поверхность верхней полусферы – поверхность #2 }

surface z = sqrt(r^2 - (x^2+y^2))

boundaries

{ граничные условия на поверхностях полусфер
нулевая температура }

surface 1 value(Temp) = 0

surface 2 value(Temp) = 0

region 1

{ температура на круговом контуре }

start (r,0) value(Temp) = 0 arc(center=0,0) angle=360

plots

grid(x,y,z) { трехмерная область решения }

{ поле температуры на сечении x=0 }

contour(Temp) painted on x=0

end

5.6 Использование **staged** в 3D задаче для изменения граничных условий

Пример 24. Рассмотрим задачу теплопроводности для однородного шара, в центре которого находится источник тепла. На поверхностях верхней и нижней полусферах заданы значения температуры T_1 и T_2 соответственно. В примере продемонстрировано — как можно использовать технологию **staged** для получения результатов расчета в одном скрипте для нескольких значений двух изменяемых параметров T_1 и T_2 из заданных диапазонов и с определенными шагами. В листинге 24 представлен соответствующий код для решения описанной задачи.

Листинг 24: Пример стационарной задачи теплопроводности в 3D постановке. Использование **staged** с шагом для двух параметров. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Using_Staged_Increment.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . Using staged . lcrement'  
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат  
select  
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  {остановка решения для каждых значений параметров}  
  autostage=off  
  
variables Tр {температура}  
  
definitions  
  k=0.5 { коэффициент теплопроводности }  
  { диапазоны изменения температур на границах области }  
  T1=staged( 0 by 1 to 10)  
  T2=staged( 10 by -1 to 0)  
  
  q=-k*grad(Tр) !вектор потока тепла  
  r = 1 { радиус шара }  
  h0 = 20 { параметр теплоты }  
  heat =h0*exp(-x^2-y^2-z^2) { источник тепла в теле }  
  
equations  
  {трехмерное уравнение теплопроводности}
```

$$\text{div}(k*\text{grad}(T_p)) + \text{heat} = 0$$

extrusion

```
{ поверхность нижней полусферы — поверхность #1 }  
surface z = -sqrt(r^2 - (x^2+y^2))  
{ поверхность верхней полусферы — поверхность #2 }  
surface z = sqrt(r^2 - (x^2+y^2))
```

boundaries

```
{ граничные условия на поверхностях полусфер }  
surface 1 value(Tp) = T1  
surface 2 value(Tp) = T2
```

region 1

```
{ температура на круговом контуре }  
start (r,0) value(Tp) = T1 arc(center=0,0) angle=360
```

plots

```
grid(x,y,z) {трехмерная область решения}  
{контурный график поля температуры с заливкой на сечении x=0}  
contour(Tp) painted on x=0  
{распределение вектора потока на сечении x=0  
norm — все стрелки одинаковой длины  
значения определяются по цветовой шкале,  
mesh points — параметры расчета и построения графики  
penwidth — толщина линий }  
vector(q) norm mesh points=16 penwidth=6 on x=0
```

end

5.6.1 Задания к примерам 22 — 24

1. Используя код из листинга 22, постройте распределение вектора теплового потока для среза $x = 0$. Сравните максимальные значения температуры T_{max} для первого и третьего шага `stage`. Постройте график зависимости максимальной температуры T_{max} от параметра `stage` (см. раздел 5.7).

2. Используйте код из листинга 23. В строке `k= staged (0.1, 0.5, 1, 2)` введите коэффициенты для следующих материалов: алюминия, резины, гранита, глины, золота, камня, дерева, керамзита, кирпича, кремния, льда, мела,

мрамора, нейлона (см. данные в источнике [17]). Сравните максимальные значения модуля вектора потока тепла и распределение температуры для этих материалов.

3. В коде из листинга 24 задайте $T_1=10$ и $T_2=10$, а радиус шара определите следующим образом $r = \text{staged}(1 \text{ by } 1 \text{ to } 5)$. Сравните максимальные значения модуля вектора потока тепла и распределение температуры для всех значений радиуса шара.

4. В коде из листинга 24 установите $T_1=10$ и $T_2=10$ и задайте параметр теплоты по правилу $h_0 = \text{staged}(10 \text{ by } 10 \text{ to } 50)$. Сравните максимальные значения модуля вектора потока тепла и распределение температуры для всех значений параметра теплоты h_0 .

5. Решите задачи 23—24 для: а) куба, б) вертикального кругового цилиндра с) горизонтального кругового цилиндра. Сравните полученные решения для температуры.

5.7 Раздел **histories**

При использовании в скрипте технологии **stage** с помощью раздела **histories** и команды **history** можно достаточно просто строить графики значений скалярных величин в зависимости от номера итерации **stage**. **history**.

Пример 25. Рассматривается задача теплопроводности для двухслойного сплошного цилиндра, на всей поверхности которого поддерживается постоянная температура, внутри цилиндра есть источник тепла. Необходимо определить зависимость интегральных характеристик для температуры и вектора потока тепла от изменения значений коэффициента теплопроводности верхней части цилиндра. В листинге 25 представлен код, с помощью которого строится решение описанной задачи. В частности, выполняется построение графиков функций значений интегралов по объему от температуры, вычисленных для всего цилиндра и его отдельных частей, и поверхностных интегралов для проекции на нормаль вектора теплового потока в зависимости от номера итерации **stage**. При этом на каждом шаге меняется значение k для материала, из которого состоит верхняя часть цилиндра.

Листинг 25: Пример стационарной задачи теплопроводности в 3D постановке. Использование stages и histories. Файл (listings/Stationary_Heat_Conductivity_Using_Stages_History.pde)

```
title 'Stationary heat conductivity . Using stages and history '  
coordinates cartesian3 ! трехмерная декартова система координат  
  
select  
  textsize =16 ! размер шрифта на графиках  
  font=1 ! sans-serif шрифт  
  stages=20 { двадцать шагов изменения параметра }  
  {остановка решения для каждого перебираемого значения параметра}  
  autostage=off  
  
variables Tр { температура }  
  
definitions  
  k { коэффициент теплопроводности }  
  q=-k*grad(Tр) !вектор потока тепла  
  r = 1 { радиус цилиндра равен высоте}  
  h0 = 100 { параметр теплоты }  
  heat =h0*exp(-x^2-y^2-z^2) { источник тепла в цилиндре }  
  
equations  
  {трехмерное уравнение теплопроводности}  
  div(k*grad(Tр)) + heat = 0  
  
extrusion  
  surface 'first' z = -r/2 { нижняя поверхность }  
  layer 'bottom' { нижний слой }  
  surface 'second' z=0 { срединная плоскость }  
  layer 'top' { верхний слой }  
  surface 'third' z = r/2 { верхняя поверхность }  
  
boundaries  
  ! на всей поверхности цилиндра задана нулевая тем-ра  
  surface 'first' value(Tр) = 0  
  surface 'third' value(Tр) = 0  
  
region 1  
  layer 'bottom' k=0.1 { коэф. теплопроводности в 1-м слое }
```

```

    layer 'top' k=0.1*stage { коэф. теплопроводности во 2-м слое }
!значение тем-ры на круговом конутуре
    start (r,0) value(Tp) = 0 arc(center=0,0) angle=360

```

plots

```

    grid(x,y,z){трехмерная область решения}
{сплошной график поля температуры на сечении x=0 }
    contour(Tp) painted on x=0

```

histories

{графики значений объемных интегралов по различным областям от температуры в зависимости от номера шага изменения stage
penwidth – толщина линии графика}

```

history (VOL_INTEGRAL(Tp))
    as "Vol_Integral of Temp in whole body" penwidth=5
history (Vol_Integral(Tp,'bottom'))
    as "Vol_Integral of Temp in bottom layer" penwidth=5
history (VOL_INTEGRAL(Tp,'top'))
    as "Vol_Integral of Temp in top layer" penwidth=5

```

{графики значений поверхностных интегралов по различным областям от проекции на нормаль вектора потока тепла
в зависимости от номера шага изменения stage }

```

history (Surf_Integral(NORMAL(q)))
    as "Surf_Integral of Heat flow on whole body" penwidth=5
history (Surf_Integral(NORMAL(q),'first'))
    as "Surf_Integral of Heat flow on bottom surface" penwidth=5
history (Surf_Integral(NORMAL(q),'third'))
    as "Surf_Integral of Heat flow on top surface" penwidth=5

```

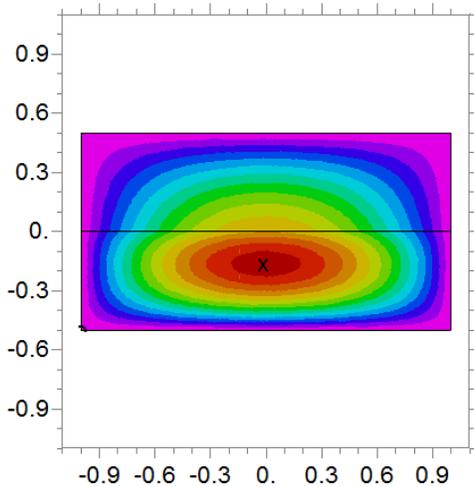
end

Если с помощью **staged** определен набор значений, то задание **stages** в разделе **select** является необязательным, в этом случае количество элементов этого набора будет использоваться как количество итераций. Дополнительную информацию по **stages**, **staged** и **history** можно посмотреть в примерах из справки Help:

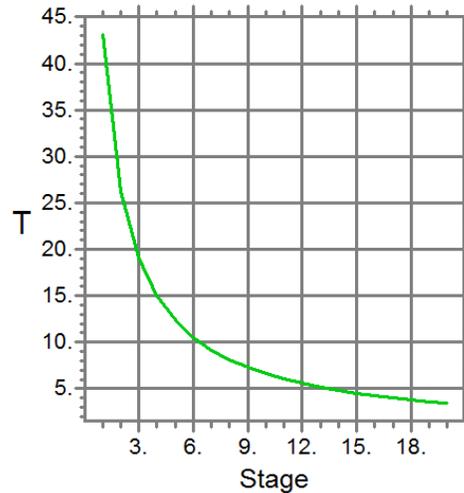
Samples | Usage | Staged_Geometry.pde

Samples | Usage | Stages.pde.

Samples | Usage | Two_Histories.pde.



а) Поле температуры на сечении $x = 0$
при **stage=4**



б) График изменения значений
объемного интеграла от T , вычисленный
для верхней части цилиндра для
каждого шага **stage**

Рис. 33: Иллюстрации к листингу 25.

5.7.1 Задания к примеру 25

1. Постройте графики интегральных характеристик для температуры и проекции на нормаль вектора потока тепла, когда высота верхнего слоя цилиндра меняется линейно вместе со **stages**.

2. Постройте графики интегральных характеристик для температуры и проекции на нормаль вектора потока тепла, когда температура на боковой или торцевых поверхностях цилиндра меняется линейно вместе со **stages**.

3. Решите задачу для шара и прямоугольного параллелепипеда. Выберите геометрические размеры так, чтобы все рассматриваемые тела были сопоставимого объема.

4. Используйте технологию **history** и построьте графики изменения температуры в точках $(0, 0, 0)$, $(r/2, 0, 0)$, $(r/2, r/4, r/4)$, $(r/2, r/4, -r/4)$ с помощью инструкций

```
history (Tp) at (x1,y1,z1) as "Tp" penwidth=5
```

```
history (Tp) at (x1,y1,z1) (x2,y2,z2), (x3,y3,z3) as "Tp" penwidth=5
```

5. Постройте графики изменения компонент вектора потока тепла в точках $(r/2, 0, 0)$, $(r/2, r/4, r/4)$ в разных графических окнах с помощью инструкции **history** (q) at (x1,y1,z1) as "q" penwidth=5

6 Нестационарные задачи теплопроводности

Нестационарные режимы теплообмена наряду со стационарными также довольно часто встречаются в различных технических задачах производства и эксплуатации изделий, находящихся под действием температурных воздействий. При решении таких задач можно находить ответы на интересующие исследователя вопросы, например, определение поля температуры объекта в определенный момент времени или за какой период вся область достигнет заданной температуры (полный прогрев или охлаждение). Такие аспекты важны при проведении серии автоматизированных технологических операций для того, чтобы не допускать таких пагубных явлений как появление трещин или остаточных напряжений при резком изменении температурных режимов. Другим важным параметром является количество теплоты, которое получает или отдает объект, для более точного учета выделяемой или поглощаемой энергии.

Таким образом, в общем случае при решении нестационарной задачи теплопроводности необходимо найти поле температуры, которая изменяется по времени и пространственным координатам. Напомним, что в качестве уравнения теплопроводности рассматривается дифференциальное уравнение в частных уравнений (1.2).

В настоящем разделе будут рассмотрены одномерные, двумерные и трехмерные задачи нестационарной теплопроводности для различных объектов.

6.1 Одномерная задача для стержня

Пример 26. Получим решение нестационарной одномерной задачи для стержня, на концах которого заданы значения температуры (см. рисунок 5). Отличие от примера 2 состоит в том, рассматривается процесс изменения температуры во времени. Материал стержня однородный, источника тепла отсутствует. В начальный момент температура равна нулю, $T_0 = 0$. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \\ T(0, t) = T_1, \quad t \in (0, t_{\max}], \\ T(l, t) = T_2, \quad t \in (0, t_{\max}], \\ T(x, 0) = T_0, \quad x \in [0, l]. \end{cases} \quad (6.1)$$

Здесь уравнение теплопроводности записано на основе (1.25) и представления оператора Лапласа в декартовой системе координат. Следуя методам курса уравнения математической физики [21], получим решение этой задачи в аналитическом виде. Учитывая линейность задачи по отношению к искомой функции перейдем к представлению

$$T(x, t) = V(x) + W(x, t), \quad (6.2)$$

тогда для функции $V(x)$ имеем задачу

$$\begin{cases} 0 = a \frac{d^2 V}{dx^2} \text{ или } V'' = 0, \\ V(0) = T_1, \\ V(l) = T_2, \end{cases} \quad (6.3)$$

решение которой описывает стационарный процесс теплопроводности в стержне (см. вывод формулы (2.4))

$$V(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1. \quad (6.4)$$

Перейдем к задаче для функции $W(x, t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \\ W(0, t) = 0, \quad t \in (0, t_{\max}], \\ W(l, t) = 0, \quad t \in (0, t_{\max}], \\ W(x, 0) = T_0 - V(x), \quad x \in [0, l]. \end{cases} \quad (6.5)$$

Используя метод разделения переменных, представим искомую функцию

$W(x, t)$ в виде

$$W(x, t) = X(x)Y(t), \quad (6.6)$$

тогда получим

$$X(x)Y'(t) = aX''(x)Y(t) \quad \text{или} \quad \frac{Y'(t)}{aY(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \eta, \quad (6.7)$$

где $\eta = \text{const}$. Рассмотрим варианты значений константы η .

1) Если $\eta = 0$, тогда задачу для функции $X(x)$ можно записать в виде

$$\begin{cases} X''(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Ее решение имеет вид линейной функции $X(x) = C_1x + C_2$, где константы интегрирования определяются из граничных условий:

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(l) = C_1l = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad (6.9)$$

т. е. имеем нулевое решение $X(x) = 0$.

2) Если $\eta = \alpha^2 > 0$, тогда имеем задачу для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Ее решение выражается через экспоненциальные функции и имеет вид $X(x) = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{-\alpha x}$, где константы C_1, C_2 определяются из граничных условий

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1e^{\alpha l} + C_2e^{-\alpha l} = 0, \end{cases} \Rightarrow C_1 = -C_2 = 0, \quad (6.11)$$

т. е. также имеем нулевое решение $X(x) = 0$.

2) Если $\eta = -\alpha^2 < 0$, тогда имеем следующую задачу для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Ее решение выражается через тригонометрические функции и имеет вид $X(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$, где константы C_1, C_2 также определяются из условий на концах стержня

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin \alpha l = 0, \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in N, \quad (6.13)$$

т. е. при выборе специальных значений параметра $\alpha = \alpha_n$ имеем набор решений $X_n(x) = C_1 \sin \alpha_n x$.

Далее найдем соответствующее решение для функции $Y(t)$ из дифференциального уравнения:

$$Y'(t) + a\alpha_n^2 Y(t) = 0 \Rightarrow Y_n(t) = B_n e^{-a\alpha_n^2 t}, \quad n \in N, \quad (6.14)$$

тогда решение для функции $W(x, t)$ можно записать в виде

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a\alpha_n^2 t} \sin \alpha_n x, \quad (6.15)$$

где константы $A_n = C_1 B_n$ определяются из удовлетворения начальному условию $W(x, 0) = T_0 - V(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x = T_0 - V(x). \quad (6.16)$$

Откуда, используя свойство ортогональности системы функций $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, имеем

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l (T_0 - V(x)) \sin \alpha_n x dx = \\
&= \frac{2}{l} \int_0^l \left(T_0 - \frac{T_2 - T_1}{l} x - T_1 \right) \sin \alpha_n x dx = \\
&= \frac{2(T_0 - T_1)}{l} \int_0^l \sin \alpha_n x dx - \frac{2(T_2 - T_1)}{l^2} \int_0^l x \sin \alpha_n x dx.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Отдельно рассмотрим первый и второй интегралы в полученном выражении.

$$\begin{aligned}
\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \int_0^l \sin \alpha_n x dx &= -\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \Big|_0^l = \\
&= -\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} (\cos \alpha_n l - 1) = -\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} (\cos \pi n - 1) = \\
&= -\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} ((-1)^n - 1).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Второй интеграл упростим используя формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
&-\frac{2(T_2 - T_1)}{l^2} \int_0^l x \sin \alpha_n x dx = \\
&-\frac{2(T_2 - T_1)}{l^2} \left(-x \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \alpha_n x dx \right) = \\
&= -\frac{2(T_2 - T_1)}{l^2} \left(-l \frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n l - \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n x \Big|_0^l \right) = \\
&= \frac{2(T_2 - T_1)}{l^2} l \frac{1}{\alpha_n} (-1)^n = \frac{2(T_2 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} (-1)^n.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Т. о. имеем представление для A_n :

$$\begin{aligned}
A_n &= -\frac{2(T_0 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} ((-1)^n - 1) + \frac{2(T_2 - T_1)}{l} \frac{1}{\alpha_n} (-1)^n = \\
&= \frac{2}{\alpha_n l} (-(T_0 - T_1)((-1)^n - 1) + (T_2 - T_1)(-1)^n).
\end{aligned}
\tag{6.20}$$

Код скрипта, с помощью которого можно получить численное решение рассмотренной задачи, представлен в листинге 26. Здесь в отличие от стационарной задачи для стержня внесен ряд изменений. Уравнение теплопроводности задано в виде 1.25 с учетом отсутствия источника тепла

$$a \cdot \text{div}(\text{grad}(T_p)) = dt(T_p)$$

Начальное условие соответствует нулевой температуре в стержне $T_0 = 0$

$$\text{initial values } T_p = 0$$

Перед разделами, с помощью которых строятся промежуточные (раздел **monitors**) и итоговые (раздел **plots**) графики задан цикл по времени с указанием шага и временного отрезка $[0, t_{\max}]$, на котором строится численное решение:

$$\text{time } 0 \text{ to } t_{\max} \text{ by } t_{\text{step}}$$

После названия разделов необходимо указать временной диапазон для которого следует вывести результаты расчетов, например:

$$\text{for } t = 0 \text{ by } t_{\text{step}} \text{ to } t_{\max}$$

В разделе **histories** с помощью команды **history** можно вывести значения величин в указанных точках объекта на всем временном промежутке решения задачи, например:

histories

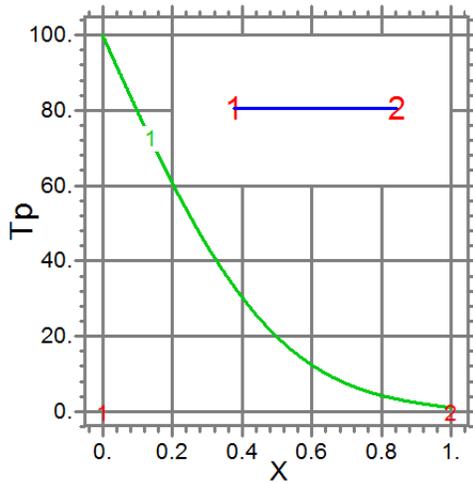
$$\text{history } (T_p) \text{ at } (0.25 \cdot L) (0.5 \cdot L) (0.75 \cdot L)$$

На рисунке 34 а) приведен график изменения температуры по длине стержня для момента времени в начале процесса, $t = 0.1 t_{\max}$ с. Когда процесс теплопередачи выйдет на стационарный режим, то график станет линейным и примет вид, как на рисунке 7 а).

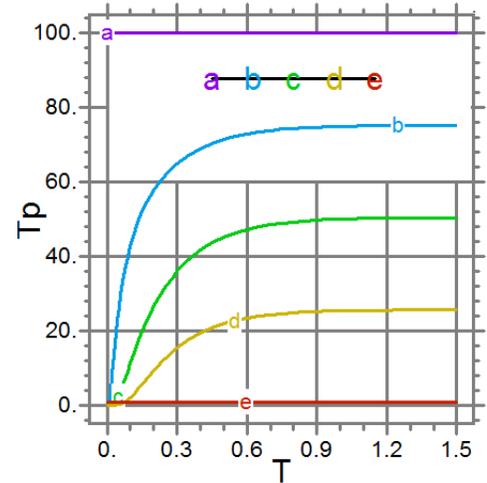
На рисунке 34 б) каждая из линий соответствует изменению температуры от времени в четырех точках, расположенных по длине стержня. Точки а и с соответствуют концам стержня с постоянной температурой — прямые линии. Для остальных трех линий видно, что примерно при времени $t = 0.6$ с процесс

переходит в стационарный режим — линии становятся прямыми.

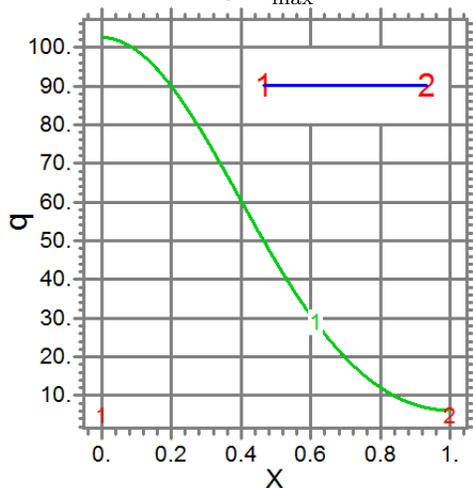
На рисунке 34 с) представлен график функции изменения потока тепла по длине стержня в момент времени $t = 0.1t_{\max}$. На рисунок 34 d) с помощью раздела `histories` получены графики значений функции $q(x_i, t)$ в трех различных точках $x_1 = 0.25l$, $x_2 = 0.5l$, $x_3 = 0.75l$.



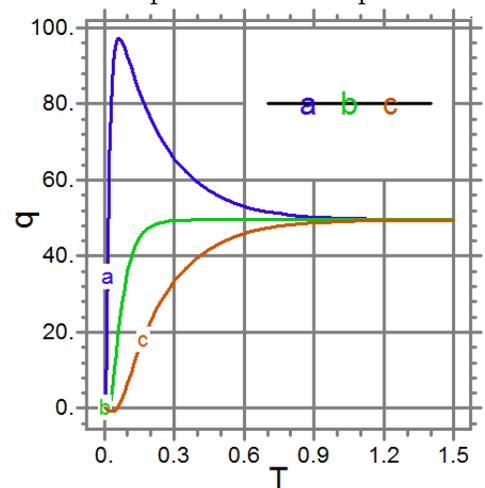
а) График температуры $T(x, t)$ при $t = 0.1t_{\max}$



б) Графики температуры $T(x, t)$ в четырех точках стержня



с) График функции потока тепла при $t = 0.1t_{\max}$



д) Графики температуры $q(x, t)$ в трех точках стержня

Рис. 34: Иллюстрации к листингу 26.

Листинг 26: Пример нестационарной задачи теплопроводности в 1D постановке. Файл (listings/Time_Heat_Conductivity_1D_Bar.pde)

`title 'Stationary heat conductivity . 1D. T dependence'`

`coordinates cartesian1 ! одномерная декартова система координат`

`select`

textsize =16 ! размер шрифта на графиках
font=1 ! sans-serif шрифт

variables

T_p (threshold=100) ! threshold – пороговое значение температуры

definitions

$k=5$ { коэффициент теплопроводности }
 $a=0.5$ { коэффициент температуропроводности }
 $T_1=100$ { значение температуры на левом конце }
 $T_2=1$ { значение температуры на правом конце }
 $T_0=0$ { начальная температура стержня }
 $L=1$ { длина стержня }
 $q=-k*dx(T_p)$ { функция изменения вектора потока тепла }

{ построение аналитического решения }

$M=5$ { число слагаемых в сумме ряда }

{ заполнение массивов }

$\alpha_ar = \text{array for } n(1 \text{ by } 1 \text{ to } M) : \pi*n/L$

$A_ar = \text{array for } n(1 \text{ by } 1 \text{ to } M) :$

$2/(\alpha_ar[n]*L) * (- (T_0-T_1) * ((-1)^{n-1}) + (T_2-T_1) * (-1)^n)$

$V=(T_2-T_1)/L*x+T_1$! решение стационарной задачи

$W=\text{sum}(n,1,M,$

$A_ar[n] * \exp(-a * (\alpha_ar[n])^2 * t) * \sin(\alpha_ar[n]* x))$

$T_an=V+W$

$tmax = 1.5$! время наблюдения за процессом

$tstep = 0.05$! шаг по времени

initial values $T_p = T_0$! начальное значение температуры

equations

!одномерное уравнение нестационарной теплопроводности

$a*\text{div}(\text{grad}(T_p)) = dt(T_p)$!или $a*dxx(T_p)=dt(T_p)$

boundaries

region 1

start (0)

{ значение температуры на левом конце }

```

point value(Tp) = T_1
line to (L)
{ значение температуры на правом конце }
point value(Tp) = T_2

{ цикл по времени }
time 0 to tmax by tstep
monitors {промежуточные результаты}
  for t = 0 by tstep to 0.1*tmax {до момента времени 0.1*tmax}
  !графики функции изменения тем—ры
  elevation (Tp) from (0) to (L) as "Tp from (0) to (L)"
  elevation (q) from (0) to (L) as "q from (0) to (L)"

plots { окончательные результаты }
  for t = 0 by tstep to tmax
  !график функции изменения тем—ры
  elevation (Tp) from (0) to (L) as "Tp from (0) to (L)"
  !графики численного и аналитического решений
  elevation (Tp,T_an) from (0) to (L) as "Tp from (0) to (L)"
  !график функции изменения вектора потока тепла
  elevation (q) from (0) to (L) as "q from (0) to (L)"

histories
{ графики изменения температуры в указанных точках
для всего промежутка времени }
  history (Tp) at (0) (0.25*L) (0.5*L) (0.75*L) (L)
  history (q) at (0.25*L) (0.5*L) (0.75*L)
end

```

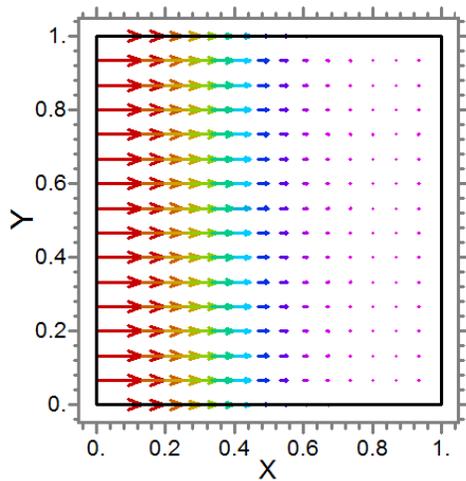
6.1.1 Задания к примеру 26

1. Как изменится решение, если задать начальную температуру стержня отличной от нуля?
2. Как влияет число удерживаемых слагаемых в (6.15) на близость аналитического и численного решений при различных моментах времени?
3. Как изменяется график функции вектора потока тепла с выходом на стационарный процесс?
4. Проведите расчеты для задачи с другими видами граничных условий

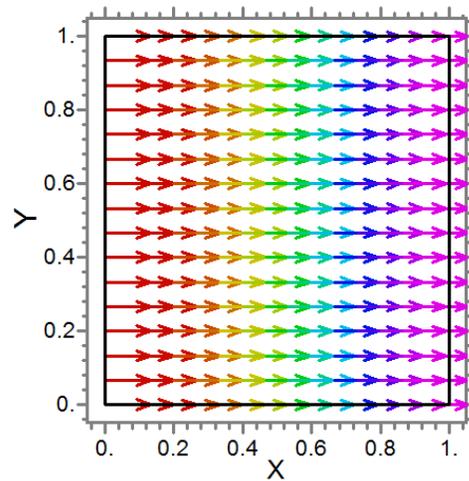
на концах стержня. На сколько существенно изменится решение при малых и больших временах рассмотрения?

6.2 Двумерная задача для пластины

Пример 27. По аналогии с задачей 3.1 рассмотрим двумерную нестационарную задачу для квадратной области. На левой и правой сторонах заданы значения температур, на верхней и нижней заданы условия теплоизоляции. В начальный момент времени на всей области задана нулевая температура. В листинге 27 приведен код скрипта для решения этой задачи. Здесь начальное условие $T(x, y, 0) = T_0 = 0$ задано по умолчанию, поэтому отсутствует строка `initial values Tr = 0`. Следует отметить, что также как и для одномерной задачи с течением времени процесс выходит на стационарный режим. На рисунке в качестве примеров результатов расчетов показаны графики распределения вектора потока тепла для значений времени $t = 0.05t_{\max}$ и $t = 0.5t_{\max}$.



а) Вектор потока тепла в начале процесса, $t = 0.05t_{\max}$



б) Вектор потока тепла в середине процесса, $t = 0.5t_{\max}$

Рис. 35: Иллюстрации к листингу 27.

Листинг 27: Пример нестационарной задачи теплопроводности в 2D постановке. Файл (listings/Time_Heat_Conductivity_2D.pde)

```
title 'Time heat conductivity . 2D '
coordinates cartesian2 !двумерная декартова система координат
select
```

painted ! все контурные графики со сплошной заливкой
textsize =16 ! размер шрифта на графиках
font=1 ! sans-serif шрифт

variables

$T_p(\text{threshold}=100)$! threshold – пороговое значение температуры

definitions

$k=5$ { коэффициент теплопроводности }
 $a=0.5$ { коэффициент температуропроводности }
 $T_1=100$ { температура на левой границе }
 $T_2=1$ { температура на правой границе }
 $L=1$ { сторона квадрата }

{компоненты вектора потока тепла}

$q_x = -k \cdot dx(T_p)$

$q_y = -k \cdot dy(T_p)$

{определение вектора потока тепла через его компоненты}

$q = \text{vector}(q_x, q_y)$

{величина модуля вектора потока тепла}

$qdm = \text{magnitude}(q)$

$tmax = 1.0$! время наблюдения за процессом

$tstep = 0.05$! шаг по времени

equations ! уравнение нестационарной теплопроводности

$a \cdot \text{div}(\text{grad}(T_p)) = dt(T_p)$

! или через оператор Лапласа $a \cdot \text{del}^2(T_p) = dt(T_p)$

boundaries

region 1

{ температура на левой границе }

start (0,L) value(T_p) = T_1

{ тепловой поток отсутствует на нижней границе }

line to (0,0) natural(T_p) = 0

{ температура на правой границе }

line to (L,0) value(T_p) = T_2

{ тепловой поток отсутствует на верхней границе }

line to (L,L) natural(T_p) = 0

line to close

```

{ цикл по времени }
time 0 to tmax by tstep
monitors {промежуточные результаты}
  for t = 0 by tstep to 0.05*tmax {до момента времени 0.05*tmax}
    !графики функции изменения тем—ры и вектора потока тепла
    elevation (Tp) from (0,L/2) to (L,L/2) as "Tp from (0,L/2) to (L,L/2)"
    elevation (q) from (0,L/2) to (L,L/2) as "V from (0,L/2) to (L,L/2)"
    {распределение вектора потока тепла
    mesh points — параметры расчета и построения графики
    penwidth — толщина линий }
    vector(q) mesh points=16 penwidth = 6
  for t = 0 by tstep to 0.5*tmax {до момента времени 0.5*tmax}
    vector(q) mesh points=16 penwidth = 6

plots { окончательные результаты }
  for t = 0 by tstep to tmax
    {трехмерный график температуры}
    surface(Tp)
    {контурный график поля температуры}
    contour(Tp)
    {распределение вектора потока тепла}
    vector(q) mesh points=16 penwidth = 6
    {контурный график модуля вектора потока тепла}
    contour(qdm)
    {графики изменения тем—ры, вектора потока тепла
    и его модуля вдоль линии}
    elevation (Tp) from (0,L/2) to (L,L/2) as "Tp from (0,L/2) to (L,L/2)"
    elevation (q) from (0,L/2) to (L,L/2) as "V from (0,L/2) to (L,L/2)"
    elevation (qdm) from (0,L/2) to (L,L/2) as "qdm from (0,L/2) to (L,L/2)"

histories
{ графики изменения температуры, q и |q| в указанных точках
для всего промежутка времени }
  history (Tp) at (0,L/2) (0.25*L,L/2) (0.5*L,L/2) (0.75*L,L/2) (L,L/2)
  history (q) at (0.25*L,L/2) (0.5*L,L/2) (0.75*L,L/2)
  history (qdm) at (0.25*L,L/2) (0.5*L,L/2) (0.75*L,L/2)
end

```

6.2.1 Задания к примеру 27

1. Существенно ли изменится решение, если задать начальную температуру области отличной от нуля?
2. Постройте графики изменения температуры с течением времени вдоль трех вертикальных линий равноотстоящих друг от друга.
3. Как изменяется график функции вектора потока тепла с выходом на стационарный процесс?
4. Проведите расчеты для задачи при заданных значениях вектора потока тепла на левой и правой стороне квадратной области. На сколько существенно изменится решение при малых и больших временах рассмотрения?

6.3 Теплообмен шара с окружающей средой

Пример 28. Рассмотрим нестационарный процесс изменения температуры шара при взаимодействии с окружающей средой. На всей поверхности шара задано значение температуры окружающей среды 100°C (граничное условие первого рода). Источники тепла отсутствуют. Начальная температура внутри шара $T(x, y, z, 0) = 1^\circ\text{C}$. Необходимо определить время, достаточное для того, чтобы температура в центре шара достигла одной четвертой от значения температуры окружающей среды. В листинге 28 представлен код для нахождения решения этой задачи.

Листинг 28: Пример нестационарной задачи теплопроводности в 3D постановке. Файл (listings/heat3D_Time_Sphere.pde)

```
title 'time-dependent 3D heat conduction in the sphere'  
coordinates  
  cartesian3 ! 3D декартовы координаты  
  
select  
  regrid=off ! отключить перестроение сетки  
  ngrid=5 ! параметр, определяющий размер ячеек триангуляции  
  
variables  
  Tp(threshold=0) ! threshold=0 — пороговое значение температуры
```

definitions

```
!#include "sphereDef.pde"  
k=5 { коэффициент теплопроводности }  
a=0.1 ! коэффициент температуропроводности  
r=1 ! радиус шара  
  
! Температура окружающей среды  
T1=100 ! температура на поверхности нижней полусферы  
T2=100 ! температура на поверхности верхней полусферы  
  
tmax = 0.9 ! время наблюдения за процессом  
tstep =0.01 ! шаг по времени  
  
heat =0 ! источник тепла отсутствует
```

initial values

```
! Температура внутри шара в начальный момент времени  
Tp = 1 ! начальное значение температуры
```

equations ! трехмерное уравнение нестационарной теплопроводности
 $a \cdot \text{div}(\text{grad}(T_p)) + \text{heat} = dt(T_p)$

! задание нижней и верхней поверхностей полусфер

extrusion !автоматическая нумерация поверхностей #1–2
 $z = -\sqrt{r^2-x^2-y^2}, \sqrt{r^2-x^2-y^2}$

boundaries

```
! Температура окружающей среды  
! граничное условие на нижней и верхней полусферах  
surface 1 value(Tp)=T1  
surface 2 value(Tp)=T2
```

region 1

```
{описание контура боковой поверхности тела  
с учетом алгоритма построения трехмерной модели}  
start (-r,0)  
! Температура окружающей среды  
value(Tp) = T1  
arc(center=0,0) angle =360
```

```

{интервал расчетов по времени }
time 0 to tmax by tstep
  monitors #include "sphereMonitors.pde"
  plots #include "spherePlots.pde"
  histories #include "sphereHist.pde"
end

```

В данном примере использована команда `#include` для подключения файлов. Она используется, когда код программы достаточно объемный, тогда разделы скрипта можно разместить в отдельные описательные файлы с расширением `pde`. Кроме того, размещение частей кода в отдельные файлы и их подключение к основной программе с помощью команды `#include` удобно, когда эти части (например, разделы `equations`, `plots`, ...) повторяются для ряда схожих задач. Для этого примера содержание подключаемых файлов приведены в листингах 29 – 31.

Листинг 29: Файл (listings/SphereMonitors.pde)

```

for cycle=1
! изолинии температуры при z=0
contour(Tp) on z=0 as "XY Temp" range=(0,tmax)
! график изменения температуры от центра шара (точка (0,0,0))
! до точки на границе шара (r,0,0) во всем временном интервале
elevation (Tp) from (0,0,0) to (r,0,0) as "X-Axis Temp" range=(0,tmax)

```

Листинг 30: Файл (listings/SpherePlots.pde)

```

for t = endtime
! изолинии температуры при z=0 для конечного момента времени
contour(Tp) on z=0 as "XY Temp" range=(0,tmax)

```

Листинг 31: Файл (listings/SphereHist.pde)

```

! график изменения температуры в указанных точках
! на всем промежутке изменения времени
history (Tp) at
(0.5*r,0.5*r,0.5*r) ! точка А
(0.25*r,0.25*r,0.25*r) ! точка В
(0,0,0) ! точка С — центр шара
range=(0,tmax)

```

6.3.1 Задания к примеру 28

1. При каком времени значение температуры в центре шара достигнет 50°C ?
2. Определите время, при котором процесс выйдет на стационарный режим.
3. Поменяются ли изолинии температуры, если температура для поверхности верхней полусферы увеличится в два раза? Измените код программы для демонстрации влияния такой корректировке.
4. Задайте в программе правило, по которому температура окружающей среды изменяется по времени согласно: а) линейному закону б) квадратичному закону с) экспоненциальному закону.
5. Какие строки кода следует добавить в программу, если нижняя и верхняя полусфера будут изготовлены из разных материалов?
6. Какие строки кода необходимо добавить в программу, если правая и левая часть шара будут из разных материалов?
7. Задайте источник тепла $\text{heat} = \exp(x^2 + y^2)$ и определите время, при котором решение выйдет на стационарный процесс.
8. Что быстрее остынет — шар или куб одинакового объема? Объем шара — $0.75\pi r^3$.
9. Что быстрее нагреется — шар или круговой цилиндр одинакового радиуса и одинакового объема? Объем цилиндра — $\pi r^2 h$.
10. Что быстрее остынет — шар или куб одинаковой площади поверхности? Площадь поверхности шара — $3\pi r^2$.
11. Что быстрее нагреется — шар или круговой цилиндр одинакового радиуса и одинаковой площади поверхности? Площадь поверхности цилиндра — $2\pi r h$.
12. Что быстрее остынет — круговой цилиндр или конус с одинаковым основанием и одинаковым объемом? Объем конуса — $\pi r^2 h / 3$.
13. Что быстрее нагреется — шар или конус с одинаковым радиусом и одинаковой площадью поверхности? Площадь поверхности конуса — $\pi r(r + h)$.
14. Что быстрее остынет — куб или конус с одинаковым объемом? Объем

конуса — $\pi r^2 h/3$.

15. Что быстрее нагреется — сфера или полусфера с одинаковой площадью поверхности?

16. Решите задачу для шара (куба, цилиндра, конуса, пирамиды), когда коэффициенты теплопроводности k_x , k_y , k_z различны по направлениям осей декартовой системы координат. В этом случае необходимо отредактировать раздел **equations** — уравнение теплопроводности будет иметь вид (1.22). В таблице ниже приведены коэффициенты теплопроводности [27] для некоторых материалов.

№	Порода	k_x	k_y	k_a
1	Песчаник кварцевый	5.7	5.5	1.04
2	Песчаник кварцитовидный	5,76	5,49	1,05
3	Песчаник слюдистый	2.93	2.01	1.46
4	Гнейс	3.10	2.20	1.41
5	Гранито-гнейс	3.10	2.14	1.45
6	Мрамор	3.08	3.02	1.02
7	Известняк	3.40	2.60	1.30
8	Известняк органогенный	3.43	2.56	1.34
9	Сланец глинистый	2.80	1.61	1.73

В таблице использованы следующие обозначения: для коэффициента теплопроводности ($[Вт/(м \cdot К)]$ — единица измерения) k_x — вдоль слоистости, k_y — перпендикулярно слоистости; k_a — коэффициент анизотропии, равный отношению коэффициентов теплопроводности вдоль и перпендикулярно волокон.

17. Проведите качественные и количественные сравнения для полученных решений.

7 Приложения

7.1 Приложение 1. Выражения для набла-оператора и оператора Лапласа для трех систем координат

Набла-оператор Гамильтона в трехмерной ортогональной криволинейной системе координат (q_1, q_2, q_3) называется символический вектор, определяемый по правилу [11, 12]:

$$\nabla = \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (7.1)$$

или, используя правило суммирования по повторяющемуся индексу, можно записать кратко

$$\nabla = \vec{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad (7.2)$$

где вектора $\{\vec{e}_k\}$ образуют ортогональный нормированный базис, H_k — коэффициенты Ламе, соответствующие выбранной системе координат.

Для непрерывной скалярной функции $F(q_1, q_2, q_3)$, используя представление (7.1), можно определить ее градиент $\text{grad } F$, обозначаемый также как ∇F :

$$\text{grad } F = \nabla F = \frac{1}{H_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (7.3)$$

Далее приведены представления выражения (7.3) для основных систем координат.

Декартова система координат $(q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z)$ (см. рисунок 36, а):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_3. \quad (7.4)$$

Цилиндрическая система координат $(q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z)$ (см. рисунок 36, б):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (7.5)$$

Сферическая система координат ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \vartheta$):

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (7.6)$$

В уравнении теплопроводности для однородных материалов присутствует оператор Лапласа, определяемый по правилу

$$\Delta = \text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2, \quad (7.7)$$

где $\text{div} = \nabla \cdot$ — оператор дивергенции [11, 12]. Для дважды непрерывно дифференцируемой скалярной функции $\Psi(q_1, q_2, q_3)$ общее представление выражения оператора Δ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(q_1, q_2, q_3) &= \text{div grad } \Psi(q_1, q_2, q_3) = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ниже формула (7.8) выписана для трех систем координат.

Декартова система координат ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$) (см. рисунок 36, а):

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2}. \quad (7.9)$$

Цилиндрическая система координат ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$) (см. рисунок 36, б):

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (7.10)$$

Сферическая система координат ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \vartheta$):

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}. \quad (7.11)$$

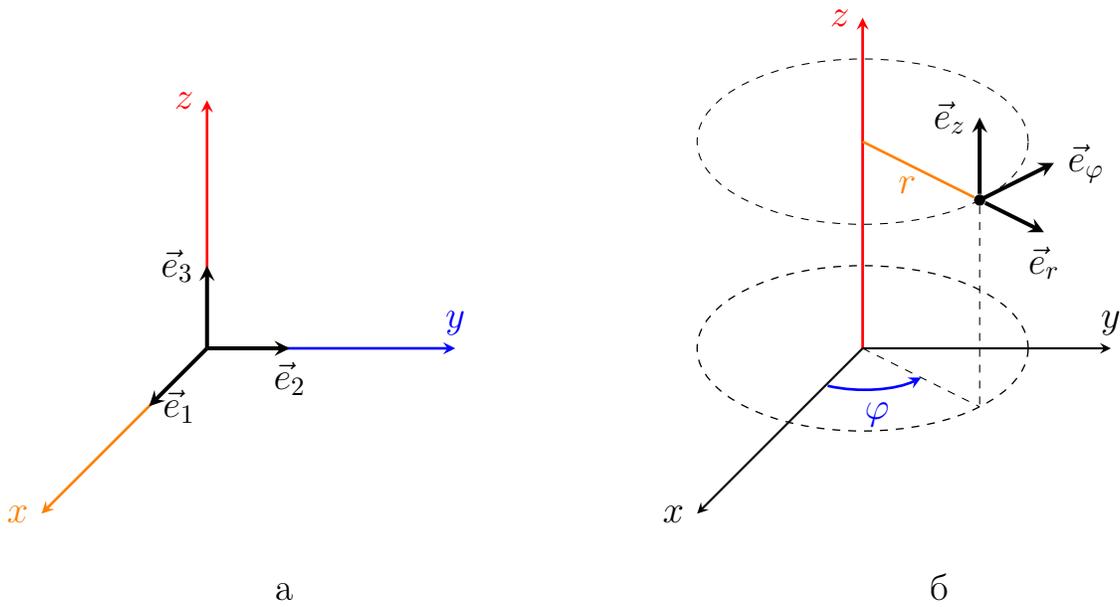


Рис. 36: Декартова (а) и цилиндрическая (б) системы координат.

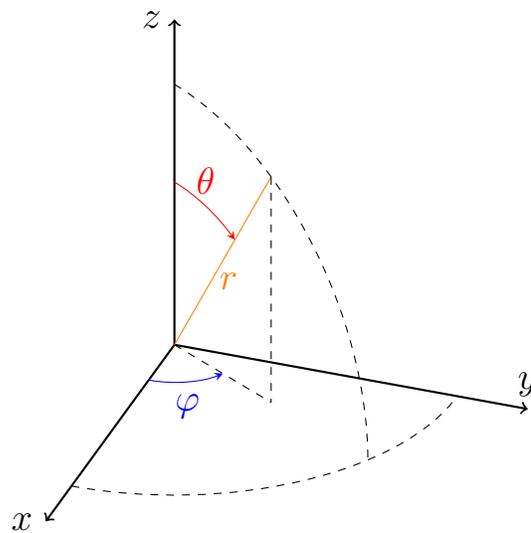


Рис. 37: Сферическая система координат

7.2 Приложение 2. Плотность, теплопроводность и теплоемкость некоторых материалов

Данные в таблице предоставлены из источника [17].

Материал	Плотность ρ , кг/м ³	Теплопроводность k , Вт/(м·град)	Теплоемкость c , Дж/(кг·град)
АБС пластик	1030...1060	0.13...0.22	1300...2300
Алюминий (ГОСТ 22233-83)	2600	221	840
Бетон на песке	1800...2500	0.7	710
Бронза	7500...9300	22...105	400
Глина огнеупорная	1800	1.04	800
Дуб вдоль волокон	700	0.23	2300
Дуб поперек волокон (ГОСТ 9462-71, ГОСТ 2695-83)	700	0.1	2300
Дюралюминий	2700...2800	120...170	920
Железо	7870	70...80	450
Железобетон	2500	1.7	840
Золото	19320	318	129
Каучук натуральный	910	0.18	1400
Кирпич красный плотный	1700...2100	0.67	840...880
Латунь	8100...8850	70...120	400
Медь (ГОСТ 859-78)	8500	407	420
Пенополиуретан (ТУ В-56-70, ТУ 67-98-75, ТУ 67-87-75)	40...80	0.029...0.041	1470
Полиэтилен высокой плотности	955	0.35...0.48	1900...2300
Резина твердая обыкновенная	900...1200	0.16...0.23	1350...1400
Резина пористая	160...580	0.05...0.17	2050
Серебро	10500	429	235
Сосна и ель вдоль волокон	500	0.18	2300
Сосна и ель поперек волокон (ГОСТ 8486-66, ГОСТ 9463-72)	500	0.09	2300
Чугун	7220	40...60	500
Шлакопемзобетон (термозитобе- тон)	1000...1800	0.23...0.52	840
Эбонит	1200	0.16...0.17	1430
Эковата	35...60	0.032...0.041	2300

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. / Под ред. А. А. Померанцев. — М. : Физматлит, 2014. — 543 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / Под ред. А. А. Померанцев. — М. : Наука, 1964. — 488 с.
3. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 172 с.
4. Деклу Ж. Метод конечных элементов / Под ред. Н.Н. Яненко. — М. : Мир, 1976. — 95 с.
5. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
6. Секулович М. Метод конечных элементов / Под ред. В.Ш. Барбакадзе. — М. : Стройиздат, 1993. — 664 с.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. — М. : Наука, 1981. — 688 с.
8. FlexPDE. FlexPDE Help. — 2023. — Режим доступа: <https://pdesolutions.com/help/index.html> (дата обращения: 01.07.2023).
9. Пустовалова О.Г., Дударев В.В. Основы работы в конечно-элементном пакете FlexPDE [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М. : Высшая школа, 1967. — 599 с.
11. Зубов Л.М., Карякин М.И. Тензорное исчисление. Основы теории. — М. : Вузовская книга, 2005. — 117 с.
12. Лурье А. И. Теория упругости. — М. : Наука, 1970. — 939 с.
13. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. Учебник для вузов. — М. : Энергия, 1975. — 488 с.
14. Теория тепло массообмена : учебник для вузов / С.И. Исаев, И.А. Кожинов, В.И. Кофанов и др. ; Под ред. А.И. Леонтьева. — М. : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. — 495 с.

15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
16. Мейз Д.Э. Теория и задачи механики сплошных сред / Под ред. М.Э. Эглит. — М. : Мир, 1974. — 318 с.
17. Thermalinfo.ru. Теплопроводность строительных материалов, их плотность и теплоемкость. — 2023. — Режим доступа: <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/strojmaterialy/teploprovodnost-stroitelnyh-materialov-ih-plotnost-i-teploemkost> (дата обращения: 01.07.2023).
18. Резников А.Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов. — М. : Машиностроение, 1981. — 279 с.
19. Резников А.Н., Резников Л.А. Тепловые процессы в технологических системах : учебник. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 288 с.
20. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М. : Высш. шк., 2001. — 550 с.
21. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
22. Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Шукин В.К. Термодинамика и теплопередача. — М. : Высш. шк., 1975. — 495 с.
23. Казанцев Е.И. Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования. — М. : Metallurgia, 1975. — 370 с.
24. Thermalinfo.ru. Теплопроводность чистых металлов. — 2023. — Режим доступа: <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/metally-i-splavy/teploprovodnost-chistyh-metallov> (дата обращения: 01.07.2023).
25. Backstrom G. Fields of Physics by Finite Element Analysis. Electricity, Magnetism, and Heat in 1D, 2D, and 3D. — Malmo, Sweden : GB Publishing, 2005. — 279 p.
26. Fabrication of ultra-high-temperature nonstoichiometric hafnium carbonitride via combustion synthesis and spark plasma sintering / V.S. Buinevich, A.A. Neparushev, D.O. Moskovskikh et al. // Ceramics International. — 2020. — Vol. 46, no. 10, Part B. — P. 16068–16073.
27. Теплоёмкость и теплопроводность пород и флюидов баженовской свиты — исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки / В.А. Юдин, А.В. Королёв, И.В. Афанаскин, С.Г. Вольпин ; Под ред. В.А. Галкин, П.В. Крыганов. — М. : ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. — 225 с.

Учебное издание

Пустовалова Ольга Геннадиевна
Дударев Владимир Владимирович

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПАКЕТЕ
FLEXPDE**

Электронное издание

Подписано к использованию 07.11.2023. Заказ № 9225. Тираж 10 экз.
Издательство Южного федерального университета.
Отдел полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр-т Стачки, 200/1, тел. (863) 243-41-66.