

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Наседкин

**ТЕОРИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ МКЭ
(курс лекций)**

Ростов-на-Дону
2013

Наседкин А.В. Теория и технология метода конечных элементов: курс лекций. – Ростов-на-Дону, 2013. — 224 с.

Курс лекций "Теория и технология метода конечных элементов" соответствует основным модулям одноименного спецкурса для студентов 4 курса бакалаврской научно-образовательной программы по направлению "Прикладная математика и информатика". Данное пособие может быть также использовано студентами при изучении различных спецкурсов по методу конечных элементов, студентами и аспирантами, специализирующихся в областях математического моделирования, вычислительной математики, механики твердого деформируемого тела и механики жидкости и газа. В курсе лекций рассмотрено применение метода конечных элементов для решения задач теплопроводности и теории упругости, изложены общие вопросы классических конечно-элементных аппроксимаций, базовые типы конечных элементов, описаны особенности реализаций программ метода конечных элементов (МКЭ), основные линейные и нелинейные решатели для стационарных и нестационарных задач МКЭ, рассмотрены вопросы распараллеливания технологий и решателей, предложены задачи для самостоятельной работы.

Первоначальный вариант курса лекций был подготовлен по проекту "Развитие учебно-научно-инновационного комплекса (Департамента) математики, механики и компьютерных наук как центра образования и науки мирового уровня" по программе развития Южного федерального университета в 2008 году. В настоящей редакции пособие существенно переработано и расширено.

Оглавление

Введение	5
1 ОСНОВЫ МКЭ. МКЭ В ЗАДАЧАХ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	15
1.1. Классическая постановка задач теплопроводности	15
1.2. Обобщенная постановка стационарных задач теплопроводности	19
1.3. Некоторые сведения из функционального анализа (абстрактная задача минимизации, лемма Лакса-Мильграма, приближение Ритца)	24
1.4. МКЭ как вариант метода Бубнова-Галеркина	29
1.5. МКЭ в одномерных задачах теплопроводности	37
1.6. МКЭ в двумерных и трехмерных задачах теплопроводности	49
1.7. Формальное описание процедур ансамблирования	55
1.8. Способы учета главных граничных условий	59
Задачи к главе 1	64
2 БАЗОВЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ	70
2.1. Одномерный линейный лагранжев конечный элемент	71
2.2. Одномерные лагранжевы конечные элементы высших порядков	75
2.3. Погрешности конечно-элементных аппроксимаций для одномерных элементов. h - и p -сходимости	81
2.4. Изопараметрические, субпараметрические и суперпараметрические элементы	86
2.5. Двумерные четырехугольные лагранжевы конечные элементы	91
2.5.1. Четырехугольный лагранжев конечный элемент с четырьмя узлами	92
2.5.2. Четырехугольный лагранжев конечный элемент с девятью узлами	100
2.5.3. Четырехугольный серендипов конечный элемент с восемью узлами	104
2.6. Двумерные треугольные лагранжевы конечные элементы	108
2.6.1. Треугольный лагранжев конечный элемент с тремя узлами	109
2.6.2. Треугольный лагранжев конечный элемент с шестью узлами	113
2.7. Вопросы согласованности конечно-элементных разбиений. Элементы с редукцией срединных узлов на сторонах	117
2.8. Основные трехмерные конечные элементы	124
2.8.1. Базовые обозначения. Конечные элементы в форме гексаэдров и тетраэдров	124
2.8.2. Конечные элементы в форме четырехугольных пирамид. Построение элементов в результате коллапса вершин	130

2.8.3. Призмы с треугольными основаниями	134
2.9. Техника вычислений конечно-элементных объектов для изопараметрических элементов	136
2.10. Критерии и оценки сходимости	145
Задачи к главе 2	146
3 МКЭ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	152
3.1. Классическая постановка статических задач теории упругости	152
3.2. Векторно-матричная форма основных уравнений теории упругости	159
3.3. Теоретические основы векторно-матричных форм. Ортогональные преобразования координат	162
3.4. Обобщенная постановка статических задач теории упругости. Вариационная трактовка	166
3.5. Конечно-элементные аппроксимации статических задач теории упругости	170
3.6. Двумерные статические задачи теории упругости и аппроксимации МКЭ	174
Задачи к главе 3	179
4 МКЭ В ДИНАМИЧЕСКИХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ	181
4.1. Постановки динамических задач теории упругости	181
4.2. Обобщенные постановки и системы МКЭ для динамических задач теории упругости	186
4.3. Основные свойства собственных частот и мод колебаний	191
4.4. Метод разложения по модам для задач об установившихся колебаниях и для нестационарных задач	194
4.5. Применение МКЭ в расчетах на сейсмические воздействия	199
4.6. МКЭ в нестационарных задачах теплопроводности	205
Задачи к главе 4	209
5 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕШАТЕЛИ МКЭ	211
5.1. Основные блоки программ МКЭ	211
5.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	211
5.2.1. Разреженный прямой решатель	212
5.2.2. Фронтальный решатель	213
5.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	214
5.3.1. Вводные замечания	214
5.3.2. Предобусловленный метод сопряженных градиентов	218
5.4. Методы решения систем нелинейных уравнений	220
5.4.1. Метод простых итераций и его модификации	222
5.5. Методы решения проблемы собственных значений	223
5.6. Методы прямого интегрирования по времени нестационарных уравнений	223
6 РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МКЭ	224
6.1. Метод суперэлементов	224
6.2. Решатели СЛАУ для распределенных вычислений	224
ЛИТЕРАТУРА	226

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс соответствует основным разделам одноименной специальной дисциплины, читаемой автором для студентов старших курсов специальности "Прикладная математика и информатика" вначале на механико-математическом факультете Ростовского государственного университета, а затем – на факультете математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

Данное пособие посвящено методу конечных элементов (МКЭ) – одному из наиболее эффективных современных численных методов решения задач математической физики, описывающих состояние и изменение разнообразных реальных систем сложной структуры. В настоящее время это наиболее популярный метод численного анализа, успешно реализованный в большом числе коммерческих и научно-исследовательских программных продуктах. Его популярность связана с универсальностью и простотой математической формы для широкого круга задач в сочетании с гибкостью численных алгоритмов, позволяющих учитывать свойства конкретной задачи. Успех метода конечных элементов не в меньшей степени обусловлен развитием мощной вычислительной техники и достижениями математики в областях проекционных методов и аппроксимации функций в сочетании с постоянным изобретательством инженеров в этих направлениях.

В развитии метода конечных элементов принимали участие исследователи в области строительной механики и прикладной математики. В период с 1850 по 1860 гг. была разработана теория кручения и изгиба балок и тем самым заложены основы науки по расчету конструкций. В течение последующих 100 лет расчет конструкций основывался на изучении систем, содержащих одномерные элементы. В середине 1950 г. в авиастроении разработан двумерный элемент. Он был создан для того, чтобы улучшить моделирование всей конструкции путем учета работы мембранных элементов.

В 1960 г. Клафф впервые ввел понятие "конечный элемент" в статье "Использование метода конечных элементов для исследования плоского

напряженного состояния". Метод был распространен на решение задач механики сплошных сред. В 1909 г. Ритц разработал эффективный метод приближенного решения задач механики сплошных сред. Он включает в себя аппроксимацию функционала энергии с помощью известных функций с неизвестными коэффициентами. Минимизация функционала в отношении каждого неизвестного приводит к системе уравнений из которых могут быть определены неизвестные коэффициенты. Одно из основных ограничений метода Ритца состоит в том, что используемые функции должны удовлетворять граничным условиям задачи.

В 1943 г. Курант значительно расширил возможности метода Ритца путем введения специальных линейных функций на треугольных областях и применил метод к решению задач кручения. В качестве неизвестных были выбраны значения функций в узловых точках треугольных областей. Таким образом, основное ограничение, накладываемое на функции Ритца, в отношении удовлетворения граничным условиям было устранено. Метод Ритца с модификацией Куранта аналогичен методу конечных элементов, который независимо предложил Клафф много лет спустя. Основная причина, по которой метод конечных элементов получил огромное распространение в 1960 гг. заключается в том, что присущий данному методу большой объем вычислительных операций может быть выполнен только с помощью ЭВМ, тогда как в 1943 г. Курант не имел такой возможности.

В середине 1960-х гг. исследователи в области механики твердого тела и строительной механики показали, что модифицированный метод Ритца и метод конечных элементов совпадают, и в течение следующего десятилетия развитие и применение метода прогрессировало значительными темпами. Метод конечных элементов применялся для решения пространственных задач, задач с учетом физической и геометрической нелинейности, задач, зависящих от времени, и задач в различных областях, не связанных с расчетом конструкций, таких, как гидродинамика, теплопередача и теория поля.

Связь МКЭ с процедурой минимизации позволила широко использовать его при решении задач в других областях техники. Метод применялся к задачам, описываемым уравнениями Лапласа или Пуассона (например, электромагнитные поля). Решение этих уравнений также связано с минимизацией некоторого функционала. Известны решения с помощью этого метода задач распространения тепла, задач гидромеханики и, в частности задач о течении жидкости в пористой среде.

Область применения МКЭ существенно расширилась, когда в 1968 г. было показано, что уравнения, определяющие элементы в задачах строительной механики, распространения тепла, гидромеханики, могут быть легко получены с помощью таких вариантов метода взвешенных невязок, как метод Галёркина или способ наименьших квадратов. Установление этого факта сыграло важную роль в теоретическом обосновании МКЭ, т.к. позволило применять его при решении многих типов дифференциальных уравнений. Таким образом, метод конечных элементов из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений. Этот прогресс был достигнут за довольно короткий срок, благодаря совершенствованию компьютерной техники.

Успешное решение задач методом конечных элементов зависит от программного обеспечения, разработка которого базируется на трех основных положениях. Во-первых, аппроксимации, используемые для представления свойств различных конечных элементов, основаны на общих принципах механики сплошных сред. Во-вторых, численные методы, выбранные для интегрирования, решения уравнений, решения проблемы собственных значений, точны и эффективны. В-третьих, реализация на ЭВМ используемых вычислительных методов проведена с целью минимизации числа операций и оптимального использования оперативной и внешней памяти.

Предваряя непосредственное изложение предмета, приведем комментарии, касающиеся списка литературы для данного курса. Литература по методу конечных элементов настолько обширна, что дать достаточно полную библиографию не представляется возможным. Поэтому в списке литературы приведены только монографии и некоторые источники, отражающие специальные вопросы курса.

Отметим, что монографии по МКЭ существенно отличаются по изложению и тематической направленности.

Математические вопросы МКЭ являются основным предметом рассмотрения в [12, 27, 29, 37, 53, 54, 60]. Автор настоятельно рекомендует классическую книгу К. Стренга и Дж. Фикса [53], где, во-первых, достигнут разумный компромисс между математической строгостью и доступностью изложения, а, во-вторых, содержится обширный материал относительно математических аспектов и оценок погрешностей МКЭ. Это конечно же не умаляет достоинств других источников, которые выигрывают в других вопросах. Так, можно рекомендовать монографии [27, 60], в которых ос-

новые математические аспекты МКЭ отражены также достаточно полно, но и доступно для читателей, не являющихся специалистами в вычислительной математике.

Изложение основ МКЭ, как практического инженерного метода для решения разнообразных задач механики деформируемого твердого тела, содержится в [5, 10, 17, 18, 49, 68, 103] и в других источниках. При этом в [5, 68] большое внимание уделено и технологии МКЭ. Техника программирования для различных этапов МКЭ подробно рассмотрена также в [35, 48].

Конкретным предметным или техническим приложениям посвящены работы [8, 11, 19, 26, 28, 33, 36, 38, 43, 44, 50, 104, 105] и др.

Полезно познакомиться, как МКЭ реализован в реальных коммерческих программных продуктах. Так, реализации МКЭ и технике практической работы в пакете Cosmos Works посвящена работа [1], в пакете MSC.Nastran – [61], а в программном комплексе ANSYS – [3, 4, 21, 34, 31, 59, 65, 66, 67, 84, 85]. Для пакета ANSYS можно выделить книгу [84], где достаточно полно изложены как теоретические вопросы МКЭ, так и приведены многочисленные примеры решения задач в ANSYS, причем с использованием его командного языка APDL. Наконец, полезно посмотреть и изложение теоретических аспектов МКЭ в соответствующей фирменной документации по конечно-элементным пакетам [62, 63, 64, 67] и др.

Основные целостные блоки настоящего курса сгруппированы по главам.

В первой главе изложены основы общей концепции МКЭ на примере стационарной линейной задачи теплопроводности. Вначале дается классическая постановка краевой задачи теплопроводности, причем и для нестационарного случая, включающая дифференциальное уравнение и соответствующие начальные и граничные условия. Постановка стационарной задачи теплопроводности соответствует математической записи задачи в операторном виде $A\theta = f$, где A – дифференциальный оператор задачи, включающей как дифференциальные уравнения, так и граничные условия; θ – неизвестная функция; а правая часть f определяет внешние воздействия. Здесь для стационарной задачи теплопроводности оператор A является положительно определенным оператором второго порядка, что характерно для широкого класса многих практически важных задач.

Следующим важнейшим шагом является переход от классической постановки к обобщенной или слабой постановке задачи. Формально переход от классической постановки к обобщенной заключается в умножении дифференциального уравнения на проекционную функцию η ; интегрировании

по области Ω , занимаемой телом; и использования процедуры интегрирования по частям, что с учетом граничных условий и требований на функцию η приводит к соотношению $a(\eta, \theta) = \tilde{L}(\eta)$. Форма $a(\eta, \theta)$ является симметричной, билинейной и неотрицательно определенной в некотором функциональном пространстве V . Это форма содержит интегралы по области Ω , включающие произведения первых производных по пространственным координатам от η , θ , и, возможно, произведения самих функций η , θ . Правая часть $\tilde{L}(\eta)$ представляет собой линейный непрерывный функционал от η , зависящий от внешних воздействий.

Существенно, что форма $a(\eta, \theta)$ содержит только первые производные от функций η , θ , но уже не содержит вторых производных по θ , которые исчезли после применения операции интегрирования по частям. Таким образом, в соотношении $a(\eta, \theta) = \tilde{L}(\eta)$ понижаются требования на гладкость решения.

Имеющиеся исходные граничные условия по разному входят в полученное соотношение. Часть из граничных условий входят в левую и правую (особенно, в правую) части интегрального соотношения $a(\eta, \theta) = \tilde{L}(\eta)$ в виде некоторых интегральных и внеинтегральных слагаемых. По этой причине такие граничные условия в вычислительной математике принято называть естественными граничными условиями. Между тем, граничные условия, дающие ограничения именно на саму функцию, например, условие Дирихле $\theta = \theta_\Gamma$ на части границы Γ_θ области, дают ограничения как на класс проекционных функций, например, $\eta = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\theta$, так и остаются действовать для неизвестной функции θ , являясь дополнительным условием, помимо соотношения $a(\eta, \theta) = \tilde{L}(\eta)$. В связи с этим граничные условия типа Дирихле, формулируемые, как ограничения на саму функцию, называются главными граничными условиями. Таким образом, получается важная классификация наиболее часто встречающихся основных граничных условий, как главных и естественных граничных условий.

Неоднородность главных граничных условий можно снять, если подобрать некоторую функцию θ_s , принимающую заданные значения θ_Γ на Γ_θ . Считая функцию θ_s известной, можно разыскивать решение в виде $\theta = \theta_0 + \theta_s$, где функция θ_0 будет уже удовлетворять тому же однородному главному граничному условию $\theta_0 = 0$ на Γ_θ .

В итоге для новой неизвестной функции θ_0 можно записать интегральное соотношение слабой постановки задачи в виде $a(\eta, \theta_0) = L(\eta)$, где $L(\eta) = \tilde{L}(\eta) - a(\eta, \theta_s)$. Здесь можно выделить пространство V , которому

должны принадлежать как проекционные функции η , так и само решение θ_0 . Это пространство включает требования гладкости (пониженные по сравнению с требованиями гладкости для классического решения), а также ограничения, связанные с главными граничными условиями (например, $\eta = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\theta$).

Интегральное тождество $a(\eta, \theta_0) = L(\eta)$ позволяет сформулировать понятие слабого или обобщенного решения, как такого решения $\theta_0 \in V$, которое удовлетворяет данному соотношению для любой допустимой функции $\eta \in V$. Существенно, что наличие главного граничного условия позволяет для положительно определенного оператора A задачи доказать и положительную определенность формы $a(\cdot, \cdot)$ в пространстве V .

Важность слабой постановки определяется и тем, что эта постановка связана с энергетическими и вариационными принципами, которые могут рассматриваться как основополагающие принципы при самой формулировке исходной краевой задачи. Как оказывается, для широкого класса задач форма $a(\theta, \theta)$ связана с внутренней энергией, а функционал $L(\theta)$ – с работой внешних воздействий. Если же проекционные функции η считать допустимыми вариациями $\delta\theta$, то соотношение $a(\delta\theta, \theta_0) = L(\delta\theta)$ дает вариационный принцип задачи. Например, для многих задач механики такая формулировка является классическим вариационным принципом возможных перемещений Лагранжа.

Далее в первой главе устанавливается ряд основополагающих теорем, касающихся слабой постановки задачи. Показывается, что в случае положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$ обобщенное или слабое решение существует и единственно, и обобщенное решение совпадает с классическим, если существует последнее. Кроме того, слабая постановка задачи при принятых требованиях эквивалента задаче поиска минимума квадратичного функционала $J(\eta) = a(\eta, \eta) - 2L(\eta)$ в пространстве V . Данное утверждение позволяет при желании использовать для численного решения задачи в слабой постановке методы поиска минимума квадратичного функционала.

Следующие теоремы показывают, что слабое решение θ_0 можно искать, как приближение θ_{0h} в некотором конечномерном пространстве V_h , и при этом приближенное решение θ_{0h} может быть найдено из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}$. При этом матрица системы \mathbf{K} наследует свойства симметричности и положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$. Доказывается также утверждение, что найденная

функция θ_{0h} является наилучшим приближением к точному решению θ_0 в пространстве V_h . Данное утверждение позволяет в дальнейшем получать теоретические оценки погрешности путем сравнения точного решения θ_0 с подходящими полиномиальными функциями-интерполянтами θ_{0I} .

Процедура нахождения приближенных решений из слабых постановок в конечномерных пространствах составляет суть методов Бубнова-Галеркина. Как показано, такая схема эквивалента задаче поиска минимума квадратичного функционала для задач с положительно определенным оператором, т.е. поиску приближения Ритца.

Метод конечных элементов является подклассом методов Бубнова-Галеркина, в котором используется набор специальных базисов и набор соответствующих конечномерных пространств. В первой главе подробно описываются особенности конечномерных базисов МКЭ. Основным моментом является разбиение расчетной области на отдельные конечные элементы Ω^{em} простой геометрической формы, допускающих для канонических форм элементов полиномиальные аппроксимации невысоких порядков. Совокупность таких областей $\Omega_h = \cup_m \Omega^{em}$ представляет собой конечно-элементную сетку $\Omega_h \subset \Omega$, и, таким образом, слабая постановка задачи рассматривается, вообще говоря, не на области Ω , а на ее подобласти Ω_h . Соответственно, граничные условия задачи при неточной аппроксимации границы $\Gamma = \partial\Omega$ границей $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ конечно-элементной сетки Ω_h сносятся на Γ_h .

Классические конечно-элементные приближения θ_{0h} , будучи полиномами на каждом конечном элементе (для элементов канонических форм), являются кусочно-полиномиальными аппроксимациями на всей области Ω_h . Замечательные свойства таких аппроксимацией состоят в простоте построения приближенных функций на каждом конечном элементе безотносительно к тому, как ведет себя неизвестная функция решения вне элемента. Действительно, как форма $a(\cdot, \cdot)$, так и функционал $L(\cdot)$, являются аддитивными функциями области (в силу аддитивности интегралов по областям), и возможно рассмотрение слабых постановок для каждого конечного элемента в отдельности. Используя эту идею, можно формировать глобальную матрицу \mathbf{K} и часть вектора правых частей \mathbf{F} СЛАУ МКЭ, из элементных матриц \mathbf{K}^{em} и векторов $\mathbf{F}^{em}(\dots)$ путем замечательной процедуры ансамблирования. Процесс ансамблирования глобальных объектов из элементных является также одним из основополагающих в технологии МКЭ.

Специальные формы конечно-элементных базисов приводят к сильно

разреженным итоговым матрицам, а также к достаточно хорошей обусловленности матриц МКЭ. Разреженность матрицы \mathbf{K} определяется тем обстоятельством, что базисные функции МКЭ, рассматриваемые как базисные функции на всей сетке Ω_h являются функциями с локальными носителями, причем размеры этих носителей много меньше размера всей геометрической области Ω_h .

Таким образом, специальные формы конечно-элементных аппроксимаций определяют хорошие вычислительные свойства СЛАУ МКЭ и позволяют реализовать эффективные технологии формирования конечно-элементных объектов. Все эти моменты подробно проиллюстрированы в первой главе на примере одномерной задачи стационарной теплопроводности, а затем обобщены и для двумерных и трехмерных задач. Также в первой главе описана техника учета главных граничных условий в МКЭ. Оказывается, что процедура нахождения функции $\theta_{sh} \approx \theta_s$, снимающей неоднородность главных граничных условий, может быть осуществлена в рамках общей конечно-элементной техники, т.е. функция θ_{sh} может задаваться также в конечно-элементной форме аналогично функции θ_{0h} . В результате можно вначале построить расширенную СЛАУ МКЭ без учета главных граничных условий, а затем несложным образом модифицировать эту СЛАУ, учтя имеющиеся главные граничные условия.

Итак, первая глава составляет основу МКЭ и показывает, что МКЭ является замечательным вариантом метода Бубнова-Галеркина, допускающим эффективную практическую реализацию важнейших этапов формирования конечно-элементных объектов и приводящим к СЛАУ с хорошими вычислительными свойствами.

Второй модуль курса представлен во главе 2 и содержит описание базовых видов конечных элементов для уравнений второго порядка для одномерных, двумерных и трехмерных областей. Здесь вначале строится семейство лагранжевых одномерных полиномиальных конечных элементов различного порядка и устанавливаются оценки погрешности конечно-элементных аппроксимаций. Для двумерных областей приводятся основные лагранжевы конечные элементы для четырехугольников и треугольников. Дается описание четырехугольного элемента серендипова типа, в котором имеются только узлы на границе элемента. Приводятся также конечные элементы аналогичного вида для трехмерных задач.

Техника построения лагранжевых и серендиповых конечных элементов во второй главе дается в едином стиле, включающем описание полино-

миальных аппроксимаций $\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}$ на канонической фигуре (отрезке, квадрате, прямоугольном треугольнике и т.д.), и задание параметрического отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, связывающего исходный конечный элемент Ω^{em} с соответствующей канонической фигурой. Как показывается, параметрическое отображение может быть представлено в форме $\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}$, аналогичной конечно-элементной аппроксимации неизвестной функции θ . При этом, как в формуле для аппроксимаций на канонической фигуре, так и в формуле для параметрического представления участвуют функции формы $N_j(\boldsymbol{\xi})$, характерные для МКЭ.

В зависимости от того, используются ли одинаковый набор функций формы для аппроксимации полевых функций и для представления параметрического отображения или нет, вводятся понятия изопараметрических, субпараметрических и суперпараметрических элементов. Для таких параметрических конечных элементов показывается, как с использованием техники численного интегрирования можно эффективно вычислять элементные конечно-элементные матрицы \mathbf{K}^{em} и векторы внешних воздействий \mathbf{F}_W^{em} .

Во второй главе анализируются также вопросы согласованности конечно-элементных сеток и допустимость использования в этих сетках элементов различного вида.

Таким образом, вторая глава посвящена единообразному описанию классических конечно-элементных аппроксимаций для одномерных, двумерных и трехмерных задач, а также некоторым другим полиномиальным приближениям.

В третьей главе (третьем модуле курса) рассмотрено применение МКЭ для задач теории упругости, имеющих многочисленные практические приложения для прочностных расчетов. Данные задачи отличаются тем, что в них неизвестная функция перемещений \mathbf{u} является векторной величиной. Приводятся классические и обобщенные постановки задач теории упругости и их конечно-элементные аппроксимации. В главе 3 показывается, что изложенная ранее для скалярных задач технология МКЭ может быть распространена и на задачи с векторными неизвестными, причем основные этапы МКЭ претерпевают лишь незначительные изменения.

Предлагаемый курс лекций снабжен задачами к каждому модулю, предназначенными для самостоятельного решения. Данные задачи могут быть использованы для лучшего усвоения материала курса, промежуточного контроля, а также служить базой для обсуждения установочных лекций

при нестандартном изложении курса.

Следует также отметить, что изложение курса частично ориентировано на дополнение лекционных занятий лабораторными работами по решению ряда учебных задач в конечно-элементном пакете ANSYS [3, 4, 21, 34, 31, 59, 65, 66, 67, 84, 85]. В связи с этим в настоящем курсе по возможности использованы обозначения, близкие к принятым в теоретическом руководстве по ANSYS [62, 67]. Однако, конечно же, излагаемые в курсе основы МКЭ могут быть использованы и при ориентации на другое конечно-элементное программное обеспечение, поскольку в большинстве конечно-элементных программных продуктов для базовых конечных элементов реализованы близкие идеи.

Глава 1

ОСНОВЫ МКЭ. МКЭ В ЗАДАЧАХ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1. Классическая постановка задач теплопроводности

Пусть некоторое тело занимает ограниченную в \mathbb{R}^3 область Ω , отнесенную к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$.

Уравнение теплопроводности, описывающее изменение поля температуры внутри Ω , представим в виде

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla^* \cdot \mathbf{q} = W, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (1.2)$$

где ∇ – векторный дифференциальный набла-оператор (∇ – вектор-столбец, ∇^* – вектор-строка)

$$\nabla = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}; \quad \nabla^* = [\partial_1, \partial_2, \partial_3],$$

\mathbf{k} – положительно определенный симметричный тензор (матрица) коэффициентов теплопроводности

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{sym} & & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ & k_{yy} & k_{yz} \\ \text{sym} & & k_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Замечание. Условие положительной определенности тензора второго ранга состоит в том, что для всех векторов $\mathbf{a} \neq 0$ выполняется неравенство $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} > 0$. Для матриц это условие эквивалентно критерию Сильвестра,

по которому все угловые миноры матрицы \mathbf{k} должны быть положительными. Другое эквивалентное условие положительной определенности матрицы состоит в положительности всех ее собственных значений. Можно также показать, что условие положительной определенности равносильно, на первый взгляд, более сильному условию: $\exists k_0 > 0: \forall \mathbf{a} \neq 0, \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \geq k_0 \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}$.

Остальные величины из (1.1), (1.2) имеют следующий смысл: $\theta = T - T_0$ – прирост температуры T от естественного состояния T_0 , причем ради краткости далее θ будем называть просто температурой; $\rho = \rho(\mathbf{x})$ – плотность, $\rho(\mathbf{x}) \geq \rho_0 > 0$; c – удельная теплоемкость, $c > 0$; W – объемная плотность мощности источников тепла или интенсивность источников тепла. Через t здесь и далее, как обычно, обозначено время.

Заметим, что формула (1.2) отражает закон Фурье, описывающий тепловые потоки, направленные от более нагретых участков тела к менее нагретым.

Тензор коэффициентов теплопроводности в большинстве реальных случаев можно считать диагональным

$$\mathbf{k} = k_{ii} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad (1.4)$$

где \mathbf{e}_i – орты декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$; причем в наиболее важном случае изотропной однородной среды

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k = \text{const}. \quad (1.5)$$

В этих случаях уравнение теплопроводности существенно упрощается. Так, для диагонального тензора \mathbf{k} в форме (1.4) из (1.1), (1.2) можно получить уравнение вида

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = W, \quad (1.6)$$

а в случае изотропной однородной среды (1.4), (1.5) имеем классическое уравнение теплопроводности [55]

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = W, \quad (1.7)$$

где Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Постановки начально-краевых задач помимо дифференциальных уравнений в частных производных должны включать граничные и начальные условия.

Для уравнения теплопроводности обычно рассматриваются граничные условия трех основных типов. Для формулировки этих граничных условий предположим, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω разбита на три части: Γ_θ , Γ_q и Γ_c ; $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$.

Будем считать, что на Γ_θ поддерживается заданная температура $\theta_\Gamma(\mathbf{x}, t)$:

$$\theta = \theta_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) называется *главным граничным условием, граничным условием первого рода* или *граничным условием Дирихле*.

На участке Γ_q зададим тепловой поток или поверхностную плотность мощности источников теплоты $q_\Gamma(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -q_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (1.9)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к поверхности Γ .

Условие (1.9) называется *естественным граничным условием, граничным условием второго рода* или *граничным условием Неймана*.

Заметим, что в (1.9) принято правило знаков, которое не является общепринятым. По (1.9) тепловой поток q_Γ считается положительным, если тепло приобретает телом Ω . Действительно, рассмотрим для простоты случай изотропной однородной среды. Тогда, согласно (1.2), (1.4), (1.5), $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -k\partial\theta/\partial n$, и следовательно, условие (1.5) можно записать в виде: $k\partial\theta/\partial n = q_\Gamma$; $\mathbf{x} \in \Gamma_q$.

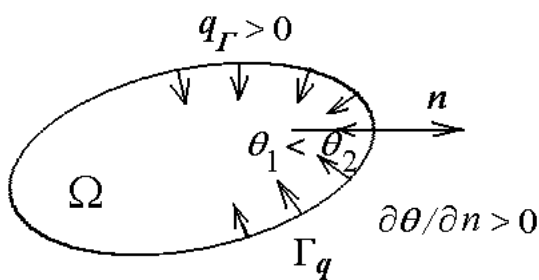


Рис. 1.1, а.

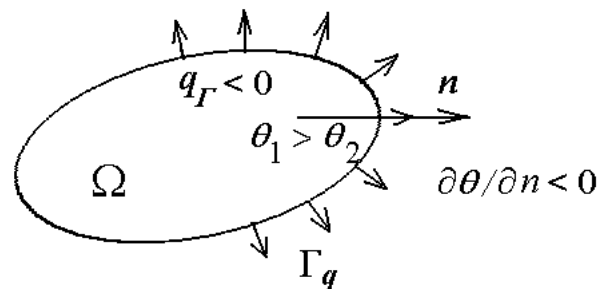


Рис. 1.1, б.

Поэтому при $q_\Gamma > 0$ на Γ_q выполняется неравенство $\partial\theta/\partial n > 0$, и температура θ вдоль направления внешней нормали возрастает, что естественно при поступлении тепла в Ω извне (рис. 1.1, а). Наоборот, при $q_\Gamma < 0$ на Γ_q получается, что $\partial\theta/\partial n < 0$, и температура θ вдоль направления внешней нормали убывает, что имеет место при отдаче тепла из тела Ω во внешнюю среду (рис. 1.1, б).

Наконец, будем считать, что на участке Γ_c может осуществляться конвективный теплообмен с внешней средой заданной температуры θ_b . Конвективный теплообмен описывается законом Ньютона-Рихмана, согласно которому количество тепла dQ , протекающего в единицу времени через площадку $d\Gamma$ поверхности тела в окружающую среду, равно

$$dQ = -h_f(\theta_b - \theta)d\Gamma. \quad (1.10)$$

Здесь θ_b – температура окружающей среды, а h_f – коэффициент теплообмена или коэффициент теплоотдачи на границе, причем $h_f > 0$.

С другой стороны, по закону Фурье количество теплоты dQ , передающееся вследствие теплопроводности через площадку $d\Gamma$ в направлении нормали \mathbf{n} в единицу времени, равно

$$dQ = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma. \quad (1.11)$$

Сравнивая (1.10) и (1.11), получаем *граничное условие конвективного теплообмена*

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -h_f(\theta_b - \theta); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c. \quad (1.12)$$

Условие (1.12) именуется *граничным условием третьего рода*.

Граничные условия (1.8), (1.9) и (1.12) являются основными в задачах теплопроводности. Кроме них возможны и другие граничные условия, например, условие лучистого теплообмена по закону Стефана-Больцмана и др. Наиболее часто, однако, встречаются именно условия (1.8), (1.9), (1.12), которыми здесь и будем ограничиваться.

В случаях неустановившихся процессов, когда поле температур θ зависит от времени, помимо граничных условий необходимы еще и начальные условия:

$$\theta = \theta_*(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad t = +0. \quad (1.13)$$

Итак, классические постановки нестационарных задач теплопроводности состоят в определении неизвестной функции $\theta(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1.1), (1.2), граничным условиям (1.8), (1.9), (1.12) и начальному условию (1.13). Такую функцию $\theta(\mathbf{x}, t)$ будем называть *классическим решением нестационарной задачи теплопроводности*.

В статических задачах все входные параметры и само решение не зависят от времени. В этом случае в постановку задачи входит стационарное уравнение теплопроводности

$$\nabla^* \cdot \mathbf{q} = W \quad (1.14)$$

вместе с законом Фурье (1.2), а также граничные условия (1.8), (1.9) и (1.12). Такая постановка состоит в нахождении температурного поля $\theta(\mathbf{x})$, определяющего *классическое решение стационарной задачи теплопроводности*.

1.2. Обобщенная постановка стационарных задач теплопроводности

Рассмотрим задачу теплопроводности (1.14), (1.2), (1.8), (1.9), (1.12) в стационарном случае. Перейдем от классической к обобщенной или слабой постановке задачи. Для этого умножим уравнение (1.14) на пока произвольную, но достаточно гладкую функцию $\eta(\mathbf{x})$ и проинтегрируем полученное соотношение по области Ω .

Используя формулу интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} \eta \nabla^* \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Gamma} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{q} d\Omega,$$

получаем

$$- \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} \eta W d\Omega - \int_{\Gamma} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma. \quad (1.15)$$

С учетом (1.2) левую часть равенства (1.15) можно записать следующим образом

$$a_{\Omega}(\eta, \theta) = - \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta d\Omega. \quad (1.16)$$

Интеграл по границе области Γ из правой части (1.15) можно преобразовать с учетом граничных условий (1.9), (1.12):

$$- \int_{\Gamma} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \eta q_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b d\Gamma - \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta d\Gamma - \int_{\Gamma_{\theta}} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma. \quad (1.17)$$

В правой части (1.17) первые два интеграла не зависят от θ и являются только функционалами от η (как и объемный интеграл по Ω в (1.15)). Третий интеграл в (1.17) зависит от η и θ и может быть перенесен в левую часть (1.15). Наконец, последний интеграл из правой части (1.17) зависит как от η , так и от нормальной компоненты вектора потока тепла \mathbf{q} на границе Γ_{θ} , где он неизвестен. Чтобы избавиться от этого интеграла, потребуем, чтобы функция η обращалась в нуль на Γ_{θ} :

$$\eta = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta}. \quad (1.18)$$

Таким образом, функция η должна удовлетворять однородному главному граничному условию задачи.

С учетом (1.16)–(1.18) соотношение (1.15) можно записать в виде

$$a(\eta, \theta) = \tilde{L}(\eta), \quad (1.19)$$

где

$$a(\eta, \theta) = a_\Omega(\eta, \theta) + \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta d\Gamma, \quad (1.20)$$

$$\tilde{L}(\eta) = \int_{\Omega} \eta W d\Omega + \int_{\Gamma_q} \eta q_\Gamma d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b d\Gamma. \quad (1.21)$$

Соотношение (1.19) позволяет ввести понятие обобщенного или слабого решения.

Определение. Функцию $\theta = \theta(\mathbf{x})$ назовем *обобщенным* или *слабым решением стационарной задачи теплопроводности*, если для этой функции выполняется интегральное равенство (1.19) для любой достаточно гладкой функции η , удовлетворяющей однородному условию (1.18), и функция θ удовлетворяет неоднородному главному граничному условию (1.8).

Очевидно, что, если θ является классическим решением стационарной задачи теплопроводности, то выполняется интегральное соотношение (1.19) для любой достаточно гладкой функции η , удовлетворяющей (1.18). Таким образом, если существует классическое решение, то оно является и обобщенным решением.

Обратное утверждение, вообще говоря, может не выполняться, т.е. обобщенное решение может существовать, но классического решения может не быть. Для обобщенного решения в результате интегрирования по частям в (1.15), по сравнению с классическим решением, понижены требования на гладкость. Действительно, для существования интегралов в (1.20), (1.21) достаточно, чтобы $\theta \in W_2^1(\Omega)$, тогда как классическое решение должно быть дважды дифференцируемо.

Функция η также должна принадлежать пространству Соболева W_2^1 , и более того, эта функция должна удовлетворять однородному условию (1.18), т.е. $\eta \in V$, где $V = \{\eta \in W_2^1(\Omega); \eta = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\theta\}$. К сожалению, функции, удовлетворяющие неоднородному условию (1.8) при $\theta_\Gamma \neq 0$, не образуют аналогичного пространства. Однако, если найти какую-нибудь

функцию $\theta_s = \theta_s(\mathbf{x})$; $\theta_s \in W_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет неоднородному главному граничному условию

$$\theta_s = \theta_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta, \quad (1.22)$$

то с ее помощью можно "снять" неоднородность условия (1.8), положив

$$\theta = \theta_0 + \theta_s. \quad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в (1.19), получаем

$$a(\eta, \theta_0) = L(\eta), \quad (1.24)$$

где

$$L(\eta) = \tilde{L}(\eta) - a(\eta, \theta_s), \quad (1.25)$$

и $\theta_0 \in V$, так как в силу (1.22) для θ_0 выполняется уже однородное главное граничное условие вида (1.18)

$$\theta_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta. \quad (1.26)$$

В результате можно более строго переформулировать определение обобщенного или слабого решения.

Определение. Функция $\theta = \theta_0 + \theta_s$, где θ_s – известная функция, удовлетворяющая (1.22), $\theta_0 \in V$, называется *обобщенным* или *слабым* решением, если выполняется интегральное соотношение (1.24) для $\forall \eta \in V$.

Отметим, что поскольку θ_s считается известной (специальным образом подобранной) функцией, то неизвестной составляющей решения является лишь функция $\theta_0 \in V$, которую и можно считать обобщенным решением.

Для задачи (1.24) имеется ряд математических утверждений о существовании и единственности решения θ_0 , а следовательно, и о существовании единственного обобщенного решения θ . Данные вопросы будут более подробно рассмотрены в следующем разделе. Здесь же отметим лишь ряд общих свойств без подробных доказательств.

Форма $a(\cdot, \cdot)$ из (1.24), (1.20) является симметричной и билинейной:

$$a(\eta, \theta) = a(\theta, \eta); \quad a(\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2, \theta) = \lambda_1 a(\eta_1, \theta) + \lambda_2 a(\eta_2, \theta),$$

т.е. η и θ входят в форму a симметрично, и форма $a(\cdot, \cdot)$ линейна как по первому, так и по второму аргументу.

В силу положительной определенности тензора \mathbf{k} форма $a(\eta, \eta)$ принимает всегда неотрицательные значения: $a(\eta, \eta) \geq 0$.

Для проблем существования и единственности, однако, существенным оказывается более сильное свойство положительной определенности (V -эллиптичности или коэрцитивности)

$$\exists C_1 > 0 : \quad a(\eta, \eta) \geq C_1 \|\eta\|_V^2, \quad \forall \eta \in V, \quad (1.27)$$

и условие ограниченности

$$\exists C_2 > 0 : \quad |a(\eta, \theta)| \leq C_2 \|\eta\|_V \|\theta\|_V, \quad \forall \eta, \theta \in V, \quad (1.28)$$

где для рассматриваемого пространства V

$$\|\eta\|_V^2 = \|\eta\|_{W_2^1}^2 = \int_{\Omega} (\eta^2 + \nabla \eta^* \cdot \nabla \eta) d\Omega. \quad (1.29)$$

Это условие выполнено в рассматриваемой стационарной задаче теплопроводности при соответствующих требованиях на область Ω и ее границу $\Gamma = \partial\Omega$.

Для V -эллиптической симметричной билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ можно считать $a(\eta, \eta)$ скалярным произведением и определить индуцируемую этим скалярным произведением норму

$$\|\eta\|_a^2 = a(\eta, \eta),$$

которая в силу (1.27), (1.28) оказывается эквивалентной норме $\|\eta\|_V$.

Здесь можно продемонстрировать важность граничного условия (1.26). Пусть для простоты граница Γ_c отсутствует: $\Gamma_c = \emptyset$. Если при этом и граница Γ_θ отсутствует ($\Gamma_\theta = \emptyset$), то произвольная постоянная функция $\theta_0 = \theta_c = \text{const}$ принадлежит пространству V , которое теперь совпадает с W_2^1 . Но для постоянной функции θ_c очевидно, что $\nabla \theta_c \equiv 0$, и следовательно, при $\Gamma_\theta = \emptyset$, $\Gamma_c = \emptyset$ имеем $a(\theta_c, \theta_c) = 0$, тогда как $\|\theta_c\|_V^2 = (\text{const})^2 \int_{\Omega} d\Omega$, и если $\text{const} \neq 0$, то условие (1.27) не выполнено. Таким образом, в отсутствие главных граничных условий $\Gamma_\theta = \emptyset$ и при $\Gamma_c = \emptyset$ форма $a(\cdot, \cdot)$ не является положительно определенной. Это является причиной неединственности решения задачи (1.24) в пространстве V при $\Gamma_\theta = \emptyset$, $\Gamma_c = \emptyset$, когда к решению θ_0 можно добавить любую постоянную функцию, и снова получить решение: $\theta_0 + \theta_c$.

Если же граница Γ_θ имеется, то $\theta_c = \text{const}$ принадлежит пространству V только при условии выполнения равенства (1.26), поэтому $\theta_c \equiv 0$, что и обеспечивает единственность слабого решения.

Отметим разграничение граничных условий. Однородное главное граничное условие ($\theta_0 = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\theta$) вошло в характеристику пространства V , в котором ищется обобщенное решение θ_0 задачи (1.24). Именно поэтому это условие, как и его неоднородная форма (1.8), называется главным граничным условием. Естественное граничное условие (1.9) участвует лишь в формировании функционала $\tilde{L}(\eta)$ в (1.21), а условие третьего рода (1.12) входит в функционал $\tilde{L}(\eta)$ и в форму $a(\cdot, \cdot)$ в (1.20).

Итак, введение понятия обобщенного или слабого решения позволяет рассматривать задачу теплопроводности в форме интегрального соотношения (1.24), удовлетворяющегося для решения $\theta_0 \in V \subset W_2^1$. По сравнению с классическим решением здесь понижены (ослаблены) требования гладкости, что и объясняет название этого решения как слабого.

При этом, если существует классическое решение, то оно является и слабым. Но, как отмечалось выше, возможны ситуации, когда слабое решение существует, а классического решения нет. Например, это имеет место в задаче теплопроводности для составной области Ω (Рис. 1.2), когда Ω состоит из двух изотропных однородных тел $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ с различными коэффициентами теплопроводности: $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$; $\mathbf{k}^{(j)} = k^{(j)}\mathbf{I}$; $j = 1, 2$; $k^{(j)} = \text{const}_j$; $k^{(1)} \neq k^{(2)}$. (Здесь и далее \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга или единичная матрица.) Для сплошного соединения двух подтел на их общей границе $\Gamma^{(12)}$ должны выполняться условия непрерывности полей температуры и траекторий вектора потока тепла:

$$\theta^{(1)} = \theta^{(2)}; \quad \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q}^{(2)}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(12)}. \quad (1.30)$$

Второе условие с учетом (1.2) приводит к равенству

$$k^{(1)} \partial \theta^{(1)} / \partial n = k^{(2)} \partial \theta^{(2)} / \partial n,$$

и, следовательно, $\partial \theta^{(1)} / \partial n \neq \partial \theta^{(2)} / \partial n$ при $\mathbf{x} \in \Gamma^{(12)}$.

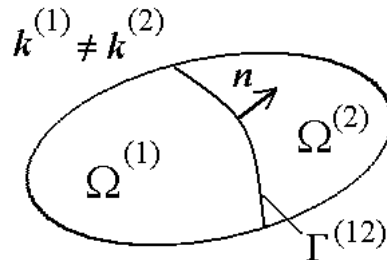


Рис. 1.2.

Как видно, производные по нормали у функций θ и θ_0 терпят разрывы при переходе через границу раздела двух сред. В связи с этим, во всей составной области Ω поле температур θ_0 не может иметь даже непрерывной первой производной, и тем более, не может иметь второй производной. Таким образом, единого классического решения стационарная задача теплопроводности в составной области не имеет. Поэтому классическую постановку задачи надо видоизменить, рассматривая отдельно задачи теплопроводности в областях $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ с использованием условий "склейки" (1.30) решений $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ на границе раздела $\Gamma^{(12)}$.

В то же время, для рассматриваемого примера $\theta_0 \in W_2^1(\Omega)$, так как у функции θ_0 существуют первые производные в обобщенном смысле, и можно вычислить норму (1.29), разделяя область интегрирования на подобласти $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$. Таким образом, для слабой постановки задачи здесь нет нужды разделять задачу по подобластям, и случаи составных областей могут рассматриваться в рамках единого подхода (1.24). Можно сказать, что слабое решение обобщает единообразное понятие решения на области с кусочно-непрерывными материальными свойствами. Эта ремарка и объясняет второе название слабого решения как обобщенного.

1.3. Некоторые сведения из функционального анализа (абстрактная задача минимизации, лемма Лакса-Мильграма, приближение Ритца)

Пусть V – банахово пространство, т.е. линейное нормированное полное пространство; $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная билинейная форма; $L(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный линейный функционал; U – непустое подмножество пространства V .

Абстрактная задача минимизации формулируется следующим образом. Найти такой элемент $u \in U$, что

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v), \quad (1.31)$$

где функционал $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ определен формулой

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \quad v \in V. \quad (1.32)$$

Теорема 1.1. Пусть U – замкнутое выпуклое подмножество из банахова пространства V , а билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ симметрична, положительно определена (V -эллиптически или коэрцитивна) и ограничена

на V , т.е. выполнены условия (1.27), (1.28). Тогда абстрактная задача минимизации (1.31) имеет единственное решение.

◀ В силу свойств билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в V , и связанная с ней норма $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ по (1.27), (1.28) эквивалентна норме $\|\cdot\|_V$. Таким образом, V – гильбертово пространство.

По теореме Рисса из функционального анализа [9, 45] существует элемент $\varphi \in V$, такой что $L(v) = a(v, \varphi)$ для $\forall v \in V$. Тогда, так как $a(\cdot, \cdot)$ – симметричная форма, то справедлива следующая цепочка равенств

$$2J(v) = a(v, v) - 2L(v) = a(v, v) - 2a(v, \varphi) = a(v - \varphi, v - \varphi) - a(\varphi, \varphi).$$

Таким образом, абстрактная задача минимизации эквивалентна задаче минимизации расстояния между элементом $\varphi \in V$ и множеством U относительно нормы $\|\cdot\|_a$. Поэтому решение задачи минимизации есть проекция φ на множество U относительно скалярного произведения $a(\cdot, \cdot)$. По теореме о проекции такой элемент существует и единственен, так как U – замкнутое выпуклое множество из V . Итак, теорема 1.1 доказана. ►

Теорема 1.2. (Лемма Лакса-Мильграма) Пусть дополнительно к требованиям теоремы 1.1 множество U является замкнутым подпространством. Элемент $u \in U$ является решением абстрактной задачи минимизации тогда и только тогда, когда

$$a(v, u) = L(v), \quad \forall v \in U. \quad (1.33)$$

◀ В обозначениях, взятых из доказательства теоремы 1.1, элемент φ по теореме о проекции можно представить в виде: $\varphi = u + h$, где u – проекция φ на U , и $a(v, h) = 0$ для $\forall v \in U$. Тогда $a(v, \varphi - u) = 0$ для $\forall v \in U$, и следовательно,

$$a(v, \varphi) = a(v, u).$$

А так как элемент φ удовлетворял равенству $a(v, \varphi) = L(v)$ для $\forall v \in V$, и тем более для $\forall v \in U \subset V$, то имеем

$$a(v, u) = L(v), \quad \forall v \in U.$$

Таким образом, показано, что если u является решением абстрактной задачи минимизации, то u является и решением задачи (1.33). Обратное утверждение следует из обратного хода доказательств теорем 1.1 и 1.2. ►

Замечание. Лемма Лакса-Мильграма справедлива также и для несимметричной формы $a(\cdot, \cdot)$, когда абстрактная задача минимизации может быть и неразрешимой [54].

Теорема 1.3. Пусть $U_h = U_{hn}$ – конечномерное (n -мерное) замкнутое подпространство в V ; $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ – базис в U_h . Тогда система уравнений

$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) c_i = L(\varphi_j); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.34)$$

имеет в U_h единственное решение $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, и элемент

$$u_h = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \quad (1.35)$$

является решением задачи минимизации в U_h .

◀ По теоремам 1.1 и 1.2 существует и единственно решение задачи (1.33) в пространстве U_h . Пусть это решение есть $u_h = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$.

Так как u_h является решением задачи (1.33), то (1.33) удовлетворяется для u_h и для $v = \varphi_j$. Подставляя в (1.33) u_h в виде (1.35) и $v = \varphi_j$, получаем при $j = 1, 2, \dots, n$ систему (1.34), которая имеет решение c_1, c_2, \dots, c_n . Остается показать, что это решение единственно.

Пусть существует еще одно решение $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ системы (1.34). Тогда

$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) \tilde{c}_i = L(\varphi_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.36)$$

Обозначив $\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \varphi_i$, равенство (1.36) запишем в виде:

$$a(\varphi_j, \tilde{u}_h) = L(\varphi_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

Для $\forall v \in U_h$, раскладывая v по базису пространства U_h

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j,$$

с учетом (1.37) запишем следующую цепочку равенств

$$a(v, \tilde{u}_h) = a\left(\sum_{j=1}^n v_j \varphi_j, \tilde{u}_h\right) = \sum_{j=1}^n v_j a(\varphi_j, \tilde{u}_h) =$$

$$= \sum_{j=1}^n v_j L(\varphi_j) = L\left(\sum_{j=1}^n v_j \varphi_j\right) = L(v).$$

Видим, что \tilde{u}_h является решением задачи (1.33) в пространстве U_h . Но в силу единственности решения задачи (1.33) $\tilde{u}_h = u_h$, а следовательно, $\tilde{c}_i = c_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Итак, теорема 1.3 доказана. ►

Следствие. Определитель Грамма матрицы $a(\varphi_j, \varphi_i)$ системы (1.34) отличен от нуля.

Замечание. Другое обычное доказательство теоремы 1.3 опирается на теорему 1.1 и теорему о минимуме квадратного функционала $J(v_1, v_2, \dots, v_n)$, получающегося после подстановки в $J(v)$ разложения $v = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j$ (задача 1.3).

Теорема 1.4. Пусть U_1 – замкнутое подпространство замкнутого подпространства U ($U_1 \subset U$); u_1, u – решения задач минимизации в U_1 и в U , соответственно. Тогда

$$\|u_1 - u\|_a = \inf_{v \in U_1} \|v - u\|_a, \quad (1.38)$$

т.е.

$$\forall v \in U_1, \quad \|u_1 - u\|_a \leq \|v - u\|_a. \quad (1.39)$$

◀ Для доказательства теоремы получим более удобные неравенства, эквивалентные (1.39).

Возводя обе части неравенства (1.39) в квадрат и используя определение нормы $\|\cdot\|_a^2 = a(\cdot, \cdot)$, имеем

$$\forall v \in U_1, \quad a(u_1 - u, u_1 - u) \leq a(v - u, v - u),$$

что эквивалентно неравенству

$$\forall v \in U_1, \quad a(u_1, u_1) - 2a(u_1, u) \leq a(v, v) - 2a(u, v). \quad (1.40)$$

Поскольку u есть решение задачи минимизации в U , то

$$\forall v \in U, \quad a(v, u) = L(v),$$

и следовательно, так как $U_1 \subset U$, то

$$\forall v \in U_1, \quad a(v, u) = L(v). \quad (1.41)$$

Элемент u_1 является решением задачи минимизации в U_1 , т.е.

$$\forall v \in U_1, a(v, u_1) = L(v). \quad (1.42)$$

Подставляя $v = u_1$ в (1.41) и (1.42), имеем

$$a(u_1, u) = a(u_1, u_1) = L(u_1).$$

Таким образом, неравенство (1.40) эквивалентно следующему

$$\forall v \in U_1, \quad a(u_1, u_1) - 2L(u_1) \leq a(v, v) - 2L(v). \quad (1.43)$$

Но $a(u_1, u_1) - 2L(u_1) = 2J(u_1)$, а $a(v, v) - 2L(v) = 2J(v)$. А так как

$$\forall v \in U_1, \quad J(u_1) = \min_{v \in U_1} J(v) \leq J(v),$$

то неравенство (1.43) выполняется. Поскольку это неравенство эквивалентно (1.39), то теорема доказана. ►

Теоремы 1.1 и 1.2 устанавливают при сделанных предположениях эквивалентность абстрактной задачи минимизации (1.31), (1.32) и задачи (1.33). Задача минимизации (1.31), (1.32) обычно является энергетической или вариационной постановкой некоторой исходной краевой задачи, а задача (1.33) является слабой или обобщенной постановкой и также отражает некоторый вариационный принцип.

Заметим, что для задачи стационарной теплопроводности из п.1.2 обобщенная постановка (1.24) как раз и имеет форму (1.33).

Теоремы 1.3 и 1.4 используются для обоснования сходимости приближенных методов.

Определение. Подпространство $U_h = U_{hn}$ размерности n называется *подпространством пробных функций* или *пробным подпространством*, а всякий элемент из U_h – *пробной функцией*. Для заданного элемента $u \in V$ элемент $u_h \in U_h$, ближайший к u по норме $\|\cdot\|_a$, называется *приближением Ритца* к u в U_h .

Теоремы 1.3 и 1.4 показывают, что приближение Ритца можно определить из решения системы (1.34) линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка n .

Тогда классическая схема алгоритмов нахождения приближенных решений задач минимизации по методу Ритца состоит в следующем. В пространстве V выбирается система базисных функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots, \quad (1.44)$$

являющаяся линейно-независимой и полной в V .

Для получения приближенного решения рассматривается подпространство $U_h = \mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, где $\mathcal{L}\{\dots\}$ – линейная оболочка, натянутая на соответствующие элементы. В U_h находится приближение Ритца u_h из решения СЛАУ (1.34) порядка n .

В силу свойств системы (1.44) $\|u_h - u\|_a \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. ритцевы приближения сходятся к точному решению с ростом числа базисных функций.

Замечание. Изложенный способ применительно к приближенному решению задачи (1.33) в слабой постановке называется *методом Бубнова-Галеркина*. При наложенных ограничениях на форму $a(\cdot, \cdot)$ и функционал $L(\cdot)$ слабая постановка и задача минимизации оказались эквивалентными, и следовательно, метод Бубнова-Галеркина здесь совпадает с методом Ритца. Однако, как уже отмечалось ранее, слабая постановка является более общей, чем задача минимизации, и таким образом, метод Бубнова-Галеркина является более общим, чем метод Ритца.

1.4. МКЭ как вариант метода Бубнова-Галеркина

Обычные схемы метода Бубнова-Галеркина или метода Ритца для определения приближенного решения (п. 1.3), используют систему базисных функций (1.44) и конечномерные пространства $U_h = U_{hn} = \mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Приближенное решение u_h в конечномерном пространстве U_h есть решение СЛАУ (1.34), которой можно придать вид

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{F}, \quad (1.45)$$

где

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad F_j = L(\varphi_j). \quad (1.46)$$

Для получения более лучшего приближения к точному решению u в обычных схемах метода Бубнова-Галеркина достаточно взять аппроксимирующее пространство U_{hm} большей размерности ($m > n$). Действительно, поскольку $U_{hn} \subset U_{hm}$, то по теореме 1.4 $\|u - u_{hm}\| \leq \|u - u_{hn}\|$, где u_{hn} , u_{hm} – приближения Ритца в пространствах U_{hn} и U_{hm} , соответственно. Таким образом, решение $u_{hm} \in U_{hm}$ СЛАУ (1.45) лучше приближает точное решение u , чем u_{hn} .

Теоретически метод Бубнова-Галеркина сходится к точному решению, причем матрица \mathbf{K} в (1.45), (1.46) симметрична и положительно определена (задача 1.1).

Между тем, обычная схема метода Бубнова-Галеркина на практике не лишена ряда недостатков. Основными из них являются следующие.

Для единого набора базисных функций (1.44) с ростом порядкового номера j наблюдается, как правило, ухудшение поведения функций φ_j . Например, для полиномиальных функций на $[0, 1]$ при больших j функции x^{j-1} становятся все более близкими к нулю почти на всем отрезке, кроме малой окрестности точки $x = 1$, где функции резко возрастают до 1. Другим примером является базис из тригонометрических функций $\sin(\pi j x)$, $\cos(\pi j x)$. У этих функций с ростом номера j увеличивается частота осцилляций (смены знаков) на $[-1, 1]$.

Усложнение вида базисных функций определяет и то, что с ростом порядка СЛАУ вычисления с требуемой точностью коэффициентов K_{ij} при больших i, j становятся все более дорогостоящими.

Наконец, из-за ухудшения поведения базисных функций с ростом n увеличивается и число обусловленности матрицы \mathbf{K} .

Все эти недостатки на практике зачастую довольно жестко ограничивают порядки СЛАУ (1.45). При превышении предельных размерностей СЛАУ катастрофически возрастает вычислительная погрешность, и естественно, вычисляемое приближенное решение перестает приближаться к неизвестному точному решению. Для МКЭ данные недостатки проявляются в значительно меньшей степени.

Сформулируем кратко особенности базисов МКЭ, позволяющие обеспечивать хорошие вычислительные свойства разрешающих СЛАУ. В основе концепции МКЭ лежит отказ от выбора единого базиса для аппроксимирующих пространств и простота базисных функций.

МКЭ является модификацией обычной схемы метода Бубнова-Галеркина, когда вместо единого базиса (1.44) пространства V используется последовательность конечных наборов координатных функций

$$\begin{aligned}
 &\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n_1}, \\
 &\varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2n_2}, \\
 &\quad \dots, \\
 &\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kn_k}, \\
 &\quad \dots,
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

обладающих следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{ij} \in V$ для $\forall i, j$;
- 2) $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kn_k}$ — линейно независимы для $\forall k$;
- 3) $\forall u \in V, \forall \varepsilon > 0 \exists M(u, \varepsilon) \mid \forall k \geq M$
 $\exists \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_{n_k}^{(k)} : \left\| u - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} \varphi_{kj} \right\|_a \leq \varepsilon.$

Каждая k -ая строка из последовательности функций (1.45) порождает конечномерное пространство $U_{hn_k} = \mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset V$. Свойство 3 последовательности (1.47) является аналогом свойства полноты бесконечномерного базиса (1.44). По этому свойству любую функцию u из V можно приблизить с любой степенью точности ε функциями из подходящих пространств $U_{hn_k}, k \geq M(u, \varepsilon)$.

Теперь приближенные решения u_{hn_k} можно находить из решения СЛАУ (1.45) при $K_{ij} = a(\varphi_{ki}, \varphi_{kj}), F_j = L(\varphi_{kj})$. В силу теоремы 1.4 и свойства 3 приближения Ритца u_{hn_k} сходятся при $k \rightarrow \infty$ к точному решению u по норме $\| \cdot \|_a$, и, следовательно, по эквивалентной норме пространства V .

Для классических схем МКЭ характерны еще следующие свойства базисных функций (1.47).

4) Базисные функции МКЭ являются функциями с локальными носителями, причем носители различных функций φ_{kj} при фиксированном k имеют не слишком много перекрытий, а размер носителей много меньше размера геометрической области Ω задачи. (Напомним, что носителем функции φ_{kj} называется геометрическое множество, являющееся замыканием множества точек $\mathbf{x} \in \Omega$, для которых $\varphi_{kj}(\mathbf{x}) \neq 0$).

5) На каждом носителе базисные функции φ_{kj} для большинства конечных элементов имеют вид кусочных полиномов не слишком высокого порядка. Линейные комбинации этих базисных функций обеспечивают точное представление полиномиальных функций соответствующих степеней. (В более сложных случаях параметрических элементов задаются полиномиальные отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ канонических фигур в области, занимаемые конечными элементами, а базисные функции являются полиномами от канонических переменных $\boldsymbol{\xi}$.)

Перечисленные в 1–5 особенности базисных функций МКЭ определяют на практике достаточно хорошие вычислительные свойства СЛАУ МКЭ.

Именно, по свойству 5 коэффициенты K_{ij} матрицы СЛАУ вычисляют-

ся единообразно и достаточно просто, независимо от значений i, j .

Матрица \mathbf{K} СЛАУ МКЭ при сохранении свойств симметрии и положительной определенности является по свойству 4 еще и сильно разреженной. Эти обстоятельства позволяют применять при решении СЛАУ МКЭ эффективные алгоритмы решения систем для больших разреженных положительно определенных матриц. При этом сами матрицы могут храниться не в форме двумерных массивов, а по специальным экономичным схемам хранения разреженных матриц [14, 42].

Как правило, матрицы МКЭ хорошо обусловлены, и число обусловленности не слишком возрастает при увеличении порядка СЛАУ.

Таким образом, СЛАУ МКЭ обладают хорошими вычислительными характеристиками. Эти характеристики определяются в первую очередь отмеченными выше свойствами базисных функций МКЭ и формы $a(\cdot, \cdot)$.

Отметим, что в отличие от обычных схем метода Бубнова-Галеркина, в МКЭ при переходе от пространств U_{hn_k} к пространству U_{hn_m} большей размерности ($m > k$) базисные функции φ_{kj} , как правило, не входят в набор базисных функций φ_{mj} пространства U_{hn_m} .

Поясним этот факт на простейшем примере функций-крышек φ_{kj} , заданных на конечно-элементной сетке $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots < x_{n_k} = 1$ отрезка $[0, 1]$. (Значение $x = 0$ здесь не включено в число узлов, что моделирует случай наличия главного граничного условия в этой точке.) Функции-крышки φ_{kj} при $j < n_k$ определяются следующим образом:

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}); & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ (x_{j+1} - x)/(x_{j+1} - x_j); & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0; & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases} \quad (1.48)$$

Крайняя функция-крышка φ_{kn_k} не имеет правой "крышки":

$$\varphi_{kn_k} = \begin{cases} (x - x_{n_k-1})/(x_{n_k} - x_{n_k-1}); & x \in [x_{n_k-1}, x_{n_k}], \\ 0; & x \leq x_{n_k-1}. \end{cases}$$

График типичной функции φ_{kj} (1.48) при $j < n_k$ показан на рис. 1.3.

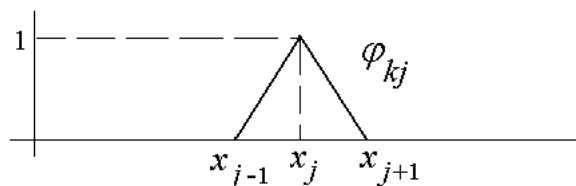


Рис. 1.3.

Функция φ_{kj} линейна на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и линейна, но с другим поведением, на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$. Вне этих отрезков она равна нулю. Таким образом, функция φ_{kj} является кусочно-линейной, а носителем этой функции является отрезок $[x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Сравним наборы таких базисных функций при двух и при четырех базисных функциях при сохранении общих узлов конечно-элементных сеток. Примеры таких наборов приведены на рис. 1.4. Как видно из этого рисунка, ни одна из функций первого набора (Рис. 1.4, а) не повторяется во втором наборе (Рис. 1.4, б).

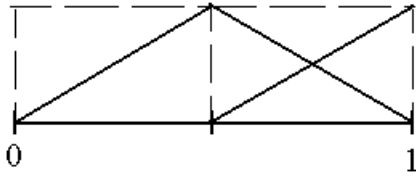


Рис. 1.4, а.

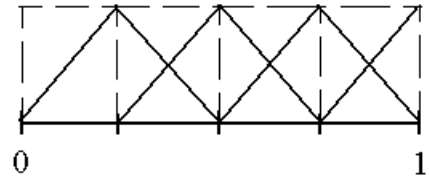


Рис. 1.4, б.

Для равномерных разбиений отрезка $[0, 1]$ при увеличении числа базисных функций φ_{kj} будут лишь сужаться носители функций, но сами функции будут оставаться кусочно-линейными и описываться простейшими формулами (1.48).

Для функций φ_{kj} (1.48) ясна и причина разреженности матриц МКЭ. Например, в задачах теплопроводности при отсутствии условий конвективного теплообмена в одномерном случае $\Omega = [0, 1]$ согласно (1.20) имеем:

$$a(\varphi_{ki}, \varphi_{kj}) = \int_0^1 k(x) \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial x} dx. \quad (1.49)$$

(Здесь $k(x)$ – функция теплопроводности, а нижний индекс "k" – номер строки из наборов (1.47) базисных функций МКЭ.)

Из (1.48) очевидно, что при $i < j - 1$ и при $i > j + 1$, как произведение базисных функций $\varphi_{ki}\varphi_{kj}$ является тождественным нулем, так и произведение производных $\varphi'_{ki}\varphi'_{kj}$ обращается в нуль во всех точках из $[0, 1]$, где определены производные φ'_{ki} и φ'_{kj} . Тогда по (1.49) $K_{ij} = a(\varphi_{ki}, \varphi_{kj}) \equiv 0$ при $i < j - 1$ и при $i > j + 1$. Следовательно, при фиксированном i элемент K_{ij} матрицы \mathbf{K} может быть отличным от нуля лишь при $i = j$, $i = j - 1$ и $i = j + 1$, т.е. матрица \mathbf{K} в рассматриваемом примере является трехдиагональной. Такая матрица, естественно, при больших n_k является сильно разреженной.

Отметим еще одно достоинство МКЭ, проявляющееся при классических лагранжевых элементах. Для таких конечных элементов базисные функции φ_{kj} равны 1 в узле $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$, и нулю – в остальных узлах конечно-элементной сетки, т.е.

$$\varphi_{kj}(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}, \quad (1.50)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Функции-крышки (1.48) очевидно обладают свойством (1.50).

Посмотрим более подробно на структуру приближенного решения u_{hn_k} , построенного по МКЭ. Разложение по базисным функциям в соответствии с (1.35) можно представить в виде

$$u_{hn_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_k} c_j \varphi_{kj}(\mathbf{x}), \quad (1.51)$$

где c_j – константы аппроксимации.

В силу свойства (1.50) из (1.51) имеем

$$u_{hn_k}(\mathbf{x}_i) = c_i. \quad (1.52)$$

По (1.52) константы аппроксимации c_i из (1.51) имеют ясный физический смысл. Они равны значениям аппроксимирующей функции в узле с соответствующим номером. Например, если u_{hn_k} есть функция температуры из задачи теплопроводности, то c_i равна температуре в узле \mathbf{x}_i , а если u_{hn_k} – функция перемещений, то c_i есть перемещение в узле \mathbf{x}_i и т.д. В МКЭ в соответствующих задачах постоянные аппроксимации c_i называются просто узловыми температурами, узловыми перемещениями и т.п.

Отметим также, что если базисные функции МКЭ являются кусочно-полиномиальными, то и их линейная комбинация (1.51) будет являться кусочным полиномом. Например, функции-крышки (1.48) кусочно-линейны, и поэтому для них приближение МКЭ $u_{hn_k}(x)$ будет непрерывной кусочно-линейной функцией. В узлах конечно-элементной сетки эта функция имеет, вообще говоря, разрывы в первых производных:

$$u'_{hn_k}|_{x=x_{j-0}} \neq u'_{hn_k}|_{x=x_{j+0}},$$

и следовательно, не принадлежит пространству дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций.

На указанное обстоятельство следует обратить особое внимание. Для приложений обычно наибольший интерес представляют не сами полевые

функции, а комбинации их производных (тепловые потоки, механические деформации, напряжения и т.п.). В схемах МКЭ с лагранжевыми конечными элементами производные разрывны в узлах конечно-элементной сетки, а поэтому для их нахождения при постпроцессорной обработке требуются дополнительные процедуры сглаживания.

По теореме 1.4 конечно-элементная аппроксимация u_{hn_k} является наилучшим приближением к точному решению u в пространстве U_{hn_k} . Для случая пространства U_{hn_k} , натянутого на базисные функции-крышки (1.48), элементы $v \in U_{hn_k}$ являются кусочно-линейными функциями. Рассмотрим линейный интерполянт u_I , построенный по значениям точного решения u в узлах x_i :

$$u_I(x_i) = u(x_i).$$

В силу теоремы 1.4

$$\|u_{hn_k} - u\|_a \leq \|u_I - u\|_a, \quad (1.53)$$

т.е. конечно-элементное решение $u_{hn_k}(x)$, для которого значения в узлах x_i , вообще говоря, отличны от точных значений

$$u_{hn_k}(x_i) = c_i \neq u(x_i),$$

тем не менее лучше приближает точное решение, чем его линейный интерполянт.

Данное, быть может, несколько неожиданное обстоятельство иллюстрирует рис. 1.5, на котором приведен пример точного решения u , его линейного интерполянта u_I и конечно-элементной аппроксимации $u_h = u_{hn_k}$ для некоторой сетки.

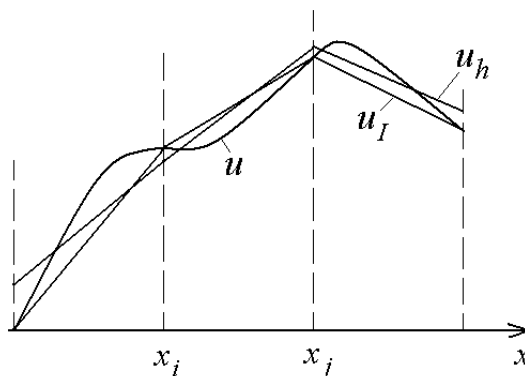


Рис. 1.5.

Норма $\|\cdot\|_a$ обычно является интегральной характеристикой, и поэтому, несмотря на то, что u_I в точках x_i ближе к u , чем $u_h = u_{hn_k}$ ($u_I = u$ при $x = x_i$), на всем отрезке Ω по интегральной норме u_h оказывается, наоборот, ближе к u , чем u_I к u .

Неравенства типа (1.53) лежат в основе техники получения погрешности конечно-элементных аппроксимаций. Предполагая, что точное решение имеет требуемую степень гладкости, можно установить оценку нормы разности u и его интерполянта u_I (не обязательно линейного). Тогда по (1.53) будет получена и оценка близости аппроксимации u_h к точному решению. Более подробно эти вопросы будут отражены далее в соответствующих разделах.

Описание особенностей МКЭ в данном пункте было далеко не полным, ибо остались вне внимания еще такие важные понятия МКЭ, как конечные элементы, их топология и аппроксимационные свойства, локальные или элементные матрицы и векторы, процедуры ансамблирования, учета главных граничных условий и т.д. Элементный подход и ансамблирование являются сердцевинной специальной технологии МКЭ, которая будет рассмотрена ниже.

Далее в МКЭ будем использовать ряд новых обозначений. Пространство U_{hn_k} аппроксимирующих конечно-элементных функций будем обозначать через V_h ($V_h \subset V$), а конечно-элементное решение u_{hn_k} – через u_h . Базисные функции в V_h будем обозначать через $N_j(\mathbf{x})$, т.е. $N_j(\mathbf{x}) = \varphi_{kj}(\mathbf{x})$, где первый индекс "k" опущен. Базисные функции $N_j(\mathbf{x})$ в механических приложениях МКЭ принято называть также функциями формы. Наконец, константы аппроксимации c_j для функции u_h будем обозначать через U_j . Таким образом, в новых обозначениях представление (1.49) примет вид:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})U_j, \quad (1.54)$$

где $n = n_k$ – размерность пространства V_h .

Впрочем, неизвестная полевая функция u в различных задачах будет обозначаться по-разному. Так для задачи теплопроводности вместо u для температуры уже использовалось обозначение θ , в задачах электростатики неизвестной является функция электрического потенциала φ и т.д. Соответственно, конечно-элементные аппроксимации для этих функций будем помечать нижним индексом "h" (θ_h, φ_h и т.п.), а узловые величины будем обозначать соответствующими заглавными буквами (T_j, Φ_j и т.п.). Таким

образом, вместо (1.54) в различных задачах будем использовать обозначения

$$\theta_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})T_j, \quad \varphi_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})\Phi_j, \quad (1.55)$$

и т.д.

1.5. МКЭ в одномерных задачах теплопроводности

Возвратимся к рассмотрению задач теплопроводности пп.1.1, 1.2, ограничившись здесь одномерными по пространственным переменным задачами. Предварительно опишем два варианта постановок одномерных задач.

В первом случае область Ω является слоем конечной толщины по x_1 ($x_1 \in [a, b]$) и бесконечно протяженным по осям x_2 и x_3 . Предположим, что все материальные свойства тела, тепловые источники и внешние воздействия заданы, как функции от x_1 , и не зависят от x_2 и x_3 , т.е. являются одинаковыми по x_2, x_3 в плоскостях $x_1 = \text{const}$. Тогда можно считать, что и поле температур не будет зависеть от координат x_2, x_3 , т.е. $\theta = \theta(x_1, t)$. Для кратности переменную x_1 обозначим через x , и тогда $\theta = \theta(x, t)$. Примем также, что среди коэффициентов теплопроводности k_{ij} из (1.3) по крайней мере k_{12} и k_{13} равны нулю, т.е. матрица \mathbf{k} в (1.3) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} = k & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

При сделанных предположениях вектор потока тепла \mathbf{q} из (1.2) имеет лишь одну ненулевую компоненту: $\mathbf{q} = \{q_1, 0, 0\}$; $q_1 = q = -k\theta'$; $\theta' = \partial\theta/\partial x$, и уравнение (1.1) принимает вид ($\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$):

$$\rho c \dot{\theta} - (k\theta')' = W; \quad x \in [a, b]. \quad (1.57)$$

Одномерная по x постановка задачи теплопроводности может использоваться также для анализа процессов распространения тепла в дисках или в стержнях. Если боковые поверхности такого тела теплоизолированы, а на торцах $x_1 = a$ и $x_1 = b$ заданы равномерные по x_2 и x_3 тепловые воздействия, то поле температур будет зависеть только от $x = x_1$ и t и удовлетворять уравнению (1.57).

Вторым случаем, когда возможен одномерный по $x = x_1$ процесс теплопроводности, является случай стержня с конвективным теплообменом через боковую поверхность. Рассмотрим стержень $x = x_1 \in [a, b]$ постоянного поперечного сечения A (Рис. 1.6).



Рис. 1.6.

Заметим, что боковая поверхность стержня $\Gamma_{ab} = [a, b] \times \Gamma_A$; $\Gamma_A = \partial A$, имеет вектор нормали \mathbf{n} , перпендикулярный орту \mathbf{e}_1 : $\mathbf{n} = \{0, n_2, n_3\}$, и поэтому $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = n_2 q_2 + n_3 q_3$ на Γ_{ab} .

Пусть всюду на боковой поверхности Γ_{ab} задано условие конвективного теплообмена (1.12), причем θ_b и h_f не зависят от x_2, x_3 и t . Примем также, что возможные источники тепла W , граничные условия при $x_1 = a$ и $x_1 = b$, плотность ρ , удельная теплоемкость c и коэффициенты теплопроводности k_{ij} не зависят от x_2 и x_3 , причем матрица \mathbf{k} имеет структуру (1.56). Тогда снова можно считать, что $\theta = \theta(x, t)$; $x = x_1$.

Проинтегрируем уравнение теплопроводности (1.1) с учетом (1.2) по поперечному сечению стержня:

$$\int_A \rho c \dot{\theta} dA + \int_A \nabla^* \cdot \mathbf{q} dA = \int_A W dA. \quad (1.58)$$

Учтя, что $\nabla^* \cdot \mathbf{q} = q_{1,1} + q_{2,2} + q_{3,3}$, преобразуем интеграл с $\nabla^* \cdot \mathbf{q}$:

$$\int_A \nabla^* \cdot \mathbf{q} dA = \int_A q_{1,1} dA + \int_{\Gamma_A} \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} d\Gamma.$$

Используя последнюю формулу и условие конвективного теплообмена (1.12) на Γ_A , из (1.58) получаем ($q_1 = -k\theta'$):

$$\rho c A \dot{\theta} - (k A \theta')' - h_f \Gamma_A (\theta_b - \theta) = A W, \quad (1.59)$$

где Γ_A – длина границы ∂A .

В случае $h_f = 0$ имеем случай теплоизолированной границы, и уравнение (1.59) сводится к уравнению (1.57), умноженному на площадь поперечного сечения A :

$$\rho c A \dot{\theta} - (k A \theta')' = A W. \quad (1.60)$$

Далее будем рассматривать именно уравнение (1.60), которое является одномерным вариантом общего уравнения (1.1), (1.2). В случае стационарного температурного поля $\theta = \theta(x)$ это уравнение еще более упрощается и принимает вид:

$$-(kA\theta)' = AW; \quad x \in [a, b]. \quad (1.61)$$

В качестве граничных условий для уравнения (1.61) примем главное граничное условие (1.8) при $x = a$

$$\theta = \theta_\Gamma; \quad x = a \quad (1.62)$$

и условие конвективного теплообмена (1.12) при $x = b$

$$k\theta' = h_f(\theta_b - \theta); \quad x = b. \quad (1.63)$$

Двухточечная граничная задача (1.61)–(1.63) для конкретного вида коэффициента теплопроводности $k(x)$ может быть решена в аналитическом виде. Здесь, однако, нас интересует МКЭ и его применение к задачам теплопроводности различной размерности.

Аналогично п. 1.2 слабая постановка задачи (1.61)–(1.63) определяется формулами:

$$\begin{aligned} a(\eta, \theta_0) &= L(\eta); \quad \forall \eta \in V, & (1.64) \\ L(\eta) &= \tilde{L}(\eta) - a(\eta, \theta_s); \quad \theta = \theta_0 + \theta_s, \quad \theta_0 \in V \\ \theta_0 &= 0; \quad x = a, \\ \theta_s &= \theta_\Gamma; \quad x = a, \\ a(\eta, \theta) &= \int_a^b kA\eta'\theta' dx + (h_f A\eta\theta)|_{x=b}, \\ \tilde{L}(\eta) &= \int_a^b \eta AW dx + \eta(b)h_f A\theta_b, \\ V &= \{\eta \in W_2^1[a, b]; \quad \eta = 0, \quad x = a\}. \end{aligned}$$

Кроме слабой постановки задачи теплопроводности на всей области $[a, b]$ далее будет полезно следующее интегральное тождество на подобласти $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$ ($x_i, x_j \in [a, b]$, $x_i < x_j$), получаемое аналогично слабой постановке (1.64):

$$a_\Omega^{em}(\eta, \theta) = L_W^{em}(\eta) + \eta(x_j)Q_j^{em} + \eta_i(x_i)Q_i^{em}, \quad (1.65)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\Omega}^{em}(\eta, \theta) &= \int_{x_i}^{x_j} kA\eta'\theta' dx, \quad L_W^{em} = \int_{x_i}^{x_j} \eta AW dx, \\ Q_j^{em} &= -(Aq)|_{x=x_j}; \quad Q_i^{em} = (Aq)|_{x=x_i}; \quad q = -k\theta', \\ \eta, \theta &\in W_2^1[x_i, x_j]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Здесь индекс m обозначает номер подобласти $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$; $q = q_1$ – компонента вектора потока тепла из (1.2); Q_j^{em}, Q_i^{em} – количество теплоты, передающейся части стержня $[x_i, x_j] \times A$ через торцы $x = x_i$ и $x = x_j$ в направлении оси x .

Рассмотрим простейшую конечно-элементную аппроксимацию кусочно-линейными функциями $N_j(x) = \varphi_{kj}(x)$, определенными на отрезке $[a, b]$. Будем считать, что узлы x_j занумерованы в порядке возрастания: $a < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots < x_n = b$, а базисные функции $N_j(x) = \varphi_{kj}(x)$ определяются формулой (1.48). Тогда, $V_h = \mathcal{L}\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, и приближенное решение $\theta_{0h} \in V_h$ задачи (1.64) можно искать в виде:

$$\theta_{0h} = \sum_{j=1}^n N_j(x)T_j = \mathbf{N}^*(x) \cdot \mathbf{T}, \quad (1.67)$$

где $\mathbf{N}^*(x) = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]$ – вектор-строка базисных функций (функций формы), $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ – вектор-столбец узловых температур.

Заметим, что функцию θ_s , удовлетворяющую неоднородному главному граничному условию, можно задать с использованием функции-крышки $N_0(x)$, аналогичной (1.48):

$$\theta_s = N_0(x)T_0, \quad T_0 = \theta_{\Gamma}, \quad (1.68)$$

где

$$N_0 = \begin{cases} (x_1 - x)/(x_1 - x_0); & x \in [x_0, x_1], \quad x_0 = a, \\ 0; & x \geq x_1. \end{cases}$$

Из (1.67), (1.68) следует, что аппроксимирующая функция для поля температур может быть записана в виде:

$$\theta_h = \theta_{0h} + \theta_s = \sum_{j=0}^n N_j(x)T_j = \tilde{\mathbf{N}}^*(x) \cdot \tilde{\mathbf{T}}, \quad (1.69)$$

где $\tilde{\mathbf{N}}^*(x) = [N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)]$, $\tilde{\mathbf{T}} = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$, причем в векторе $\tilde{\mathbf{T}}$ узловая температура T_0 известна и равна θ_{Γ} .

Для классических формулировок МКЭ характерно, что неоднородные главные граничные условия могут быть учтены с помощью функций формы $N_j(x)$ того же типа, что и основные базисные функции из V_h , но сосредоточенные в других узлах. Как будет продемонстрировано в дальнейшем, это свойство позволяет эффективно реализовать в общей ситуации процедуру учета главных граничных условий. Кроме того, решена и задача подбора функции θ_s , причем эта функция имеет простую форму.

Отрезки $\Omega^{em} = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, занумеруем в порядке возрастания координат узлов x_j . Таким образом, отрезок с номером m имеет узлы x_{m-1} и x_m . Обозначим длину отрезка через h_m ; $h_m = x_m - x_{m-1}$. Заметим, что на отдельном участке с номером m только лишь две базисные функции $N_{m-1}(x)$ и $N_m(x)$ отличны от нуля, и поэтому аппроксимирующая функция θ_{0h} на этом отрезке определяется через эти две функции

$$\theta_{0h} = N_{m-1}(x)T_{m-1} + N_m(x)T_m; \quad x \in [x_{m-1}, x_m], \quad m = 2, 3, \dots, n, \quad (1.70)$$

а при $m = 1$ функция θ_{0h} определяется через одну базисную функцию: $\theta_{0h} = N_1(x)T_1$.

Формула (1.70) задает линейную интерполяцию неизвестной функции температуры θ_{0h} через значения в узлах $T_{m-1} = \theta_{0h}(x_{m-1})$ и $T_m = \theta_{0h}(x_m)$. Это есть лагранжева линейная интерполяция, а правая часть первой формулы из (1.70) определяет полином Лагранжа первой степени.

Назовем *конечным элементом* объект, включающий свой номер m ; геометрическую фигуру Ω^{em} (здесь это есть отрезок $\Omega^{em} = [x_{j-1}, x_j]$, $j = m$); набор узлов интерполяции (узлы x_{j-1} и x_j ; $j = m$) и аппроксимирующий полином для неизвестной функции (формула (1.70)) вместе с узловыми степенями свободы (узловые температуры T_{j-1} и T_j ; $j = m$). В более полные определения надо добавить описания процедур для вычислений соответствующих элементных матриц и векторов, что будет сделано позже.

В соответствии с отмеченным выше, рассматриваемый здесь конечный элемент есть одномерный линейный лагранжев элемент с двумя узлами.

Для более сложных элементов удобно использовать канонические геометрические фигуры и локальные системы координат. Введем отображение $x = x(\xi)$ по формуле:

$$x = \frac{h_m}{2}\xi + x_{0m}; \quad x_{0m} = \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \quad (1.71)$$

где x_{0m} – средняя точка отрезка.

Данное отображение переводит канонический отрезок $\xi \in [-1, 1]$ в отрезок $[x_{m-1}, x_m]$. Это отображение взаимно однозначное, и обратное отображение

$$\xi = \frac{2}{h_m}(x - x_{0m}) \quad (1.72)$$

также линейное и переводит отрезок $[x_{m-1}, x_m]$ в $[-1, 1]$.

На каноническом отрезке $[-1, 1]$ для аппроксимирующих функций можно ввести локальную нумерацию: $N_1(\xi) = N_{m-1}(x(\xi))$, $N_2(\xi) = N_m(x(\xi))$. Для функций $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ на $[-1, 1]$ имеем простые представления:

$$N_1(\xi) = (1 - \xi)/2; \quad N_2(\xi) = (1 + \xi)/2. \quad (1.73)$$

Введя элементные векторы функций формы \mathbf{N}^{em} и узловых неизвестных \mathbf{T}^{em}

$$\mathbf{N}^{em*} = [N_1(\xi), N_2(\xi)]; \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_{m-1}, T_m\}, \quad (1.74)$$

выражение (1.70) для θ_{0h} при $x \in \Omega^{em}$, $x = x(\xi)$ можно записать в векторной форме

$$\theta_{0h} = \mathbf{N}^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}. \quad (1.75)$$

Для того, чтобы подчеркнуть, что в (1.75) используются функции формы для поля температур, вектор \mathbf{N}^{em*} будем обозначать также \mathbf{N}_θ^{em*} .

Форму (1.75) можно придать и представлению для поля $\theta_h = \theta_{0h} + \theta_s$ на отдельном элементе

$$\theta_h = \tilde{\mathbf{N}}^{em*}(\xi) \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{em}, \quad (1.76)$$

причем для $\forall m \neq 1$ $\tilde{\mathbf{N}}^{em*}(\xi) = \mathbf{N}^{em*}(\xi)$, $\tilde{\mathbf{T}}^{em} = \mathbf{T}^{em}$. Лишь для первого элемента $\tilde{\mathbf{N}}^{e1*}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)]$, $\tilde{\mathbf{T}}^{e1} = \{T_0, T_1\}$, $T_0 = \theta_\Gamma$, тогда как $\mathbf{N}^{e1*}(\xi) = [N_2(\xi)]$, $\mathbf{T}^{e1} = \{T_1\}$.

Интересно отметить, что параметрическое отображение (1.71) с учетом выражений для h_m и x_{0m} может быть записано в виде

$$x = N_1(\xi)x_{m-1} + N_2(\xi)x_m = \mathbf{N}_x^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (1.77)$$

где $\mathbf{N}_x^{em*}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)]$; $\mathbf{X}^{em} = \{x_{j-1}, x_j\}$; $j = m$.

Вектор $\mathbf{N}_x^{em*}(\xi)$ является вектором функций формы для отображения $x = x(\xi)$, и в данном случае он совпадает с вектором \mathbf{N}_θ^{em*} , а вектор \mathbf{X}^{em} состоит из координат узлов элемента.

Как видно, выражение (1.75) для аппроксимирующих функций конечного элемента и выражение (1.77) для параметрического отображения имеют одну и ту же структуру.

Перейдем к решению задачи (1.64) в конечномерном пространстве V_h . Следуя методологии п. 1.3, подставим в (1.64) вместо θ_0 приближенное решение θ_{0h} из (1.67), а в качестве проекционных функций η возьмем базисные функции $N_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Как было принято в (1.68), неоднородное граничное условие будем удовлетворять с использованием функции N_0 из (1.68).

В результате таких подстановок задача (1.64) сводится к СЛАУ относительно неизвестных узловых температур T_1, T_2, \dots, T_n :

$$\sum_{j=1}^n a(N_i, N_j)T_j = L(N_i); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.78)$$

$$L(N_i) = \tilde{L}(N_i) - a(N_i, N_0)T_0; \quad T_0 = \theta_\Gamma \quad (1.79)$$

$$a(N_i, N_j) = \int_a^b kAN'_iN'_j dx + h_f A\delta_{in}\delta_{jn}, \quad (1.80)$$

$$\tilde{L}(N_i) = \int_a^b AWN_i dx + h_f A\theta_b\delta_{in}. \quad (1.81)$$

При записи выражений (1.80), (1.81) учтено, что $N_i(b) = N_i(x_n) = \delta_{in}$, $N_j(b) = N_j(x_n) = \delta_{jn}$, и таким образом, условие конвективного теплообмена при $x = b$ дает ненулевой вклад в $a(N_i, N_j)$ только при $i = j = n$, и в $L(N_i)$ – только при $i = n$.

СЛАУ МКЭ (1.78) может быть записана в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (1.82)$$

где \mathbf{K} – матрица размера $n \times n$ с компонентами $K_{ij} = a(N_i, N_j)$; \mathbf{T} – вектор узловых температур из (1.67); \mathbf{F} – вектор правых частей с компонентами $F_i = \tilde{L}(N_i)$.

В МКЭ матрица \mathbf{K} в зависимости от конкретных физических приложений изменяет название в соответствии со смыслом материальных констант, входящих в $a(N_i, N_j)$. Здесь, в задаче теплопроводности, в форму $a(N_i, N_j)$ входит коэффициент теплопроводности $k(x)$, и форма $a(\cdot, \cdot)$ отражает возможности тела в передаче тепла. Поэтому матрица \mathbf{K} называется *глобальной матрицей теплопроводности* или просто *матрицей теплопроводности*. Вектор правых частей \mathbf{F} включает составляющие с различным физическим смыслом, но в итоге определяет суммарные внешние тепловые потоки, приведенные к узлам.

Глобальные матрицы и некоторые составляющие глобальных векторов правых частей получаются в МКЭ в результате выполнения специальной *процедуры ансамблирования* соответствующих элементных объектов. Эта процедура является центральной в МКЭ и во многом определяет эффективность метода. Хотя для рассматриваемого простого примера одномерной задачи теплопроводности матрица \mathbf{K} и вектор правых частей \mathbf{F} могут быть легко построены и непосредственно, полезно сформировать эти объекты путем ансамблирования из соответствующих элементных.

В основе ансамблирования лежит идея рассмотрения задач для отдельных конечных элементов. Так, задачу (1.65), (1.66) на отрезке $[x_i, x_j]$ при $i = m - 1, j = m$ можно считать слабой постановкой задачи для элемента Ω^{em} , $m = 2, 3, \dots, n$. Подставляя в (1.65), (1.66) вместо θ функцию θ_{0h} из (1.75), а вместо η – базисные функции $N_1(\xi) = N_{m-1}(x(\xi))$ и $N_2(\xi) = N_m(x(\xi))$, получим

$$\begin{aligned} a^{em}(N_1, N_1)T_{m-1} + a^{em}(N_1, N_2)T_m &= F_{W1}^{em} + F_{Q1}^{em}, \\ a^{em}(N_2, N_1)T_{m-1} + a^{em}(N_2, N_2)T_m &= F_{W2}^{em} + F_{Q2}^{em}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

где $F_{Wp}^{em} = L^{em}(N_p)$, $p = 1, 2$ – компоненты элементного вектора \mathbf{F}_W^{em} интенсивности тепловых источников; $F_{Q1}^{em} = Q_{m-1}^{em}$, $F_{Q2}^{em} = Q_m^{em}$ – узловые тепловые потоки, передающиеся конечному элементу через торцы $x = x_{m-1}$ и $x = x_m$ от соседствующих элементов.

Матрицу данной системы размера 2×2 обозначим через \mathbf{K}_k^{em} и назовем *элементной матрицей теплопроводности*: $K_{kpq}^{em} = a^{em}(N_p, N_q)$, $p, q = 1, 2$.

Из (1.66), (1.71) получаем:

$$K_{kpq}^{em} = \frac{2}{h_m} \int_{-1}^1 kA \frac{\partial N_p(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_q(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad p, q = 1, 2. \quad (1.84)$$

Если принять, что коэффициент теплопроводности k и площадь поперечного сечения A в пределах элемента постоянны ($k = k_m$; $A = A_m$), то с учетом (1.73) K_{kpq}^{em} в (1.84) легко вычисляются, и в результате получаем:

$$\mathbf{K}_k^{em} = \frac{k_m A_m}{h_m} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

Несложно также определить и компоненты вектора \mathbf{F}_W^{em} при постоянных $A = A_m$ и $W = W_m$ на КЭ с номером m :

$$F_{Wp}^{em} = \frac{h_m}{2} \int_{-1}^1 AW N_p(\xi) d\xi = A_m W_m h_m / 2, \quad p = 1, 2. \quad (1.86)$$

Таким образом, элементное уравнение (1.83) можно записать в виде:

$$\mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{T}^{em} = \mathbf{F}_b^{em} + \mathbf{F}_{int}^{em}, \quad (1.87)$$

где

$$\mathbf{K}^{em} = \mathbf{K}_k^{em}, \quad \mathbf{F}_b^{em} = \mathbf{F}_W^{em}, \quad \mathbf{F}_{int}^{em} = \mathbf{F}_Q^{em}. \quad (1.88)$$

Система двух уравнений, представленная в (1.83) или в (1.87), не позволяет найти узловые неизвестные T_{m-1} , T_m . Матрица этой системы вырождена ($\det \mathbf{K}^{em} = 0$), а кроме того, помимо температур T_{m-1} , T_m , в этой системе неизвестны также и узловые тепловые потоки Q_{m-1}^{em} , Q_m^{em} .

Однако, если записать формулы (1.83) или (1.87) для различных элементов Ω^{em} , и сложить полученные уравнения попарно, то узловые тепловые потоки для внутренних сечений $x = x_m$, $m = 2, 3, \dots, n-1$, сократятся, поскольку $Q_m^{em} + Q_m^{e(m+1)} = 0$, если при $x = x_m$ не действуют сосредоточенные тепловые источники.

Заметим, что в случае, когда в узле $x = x_m$ имеется сосредоточенный тепловой источник в виде дельта-функции $W_m = W_{0m}\delta(x - x_m)$, который можно выделить из функции $W = W(x)$, то внутренние тепловые потоки Q_m^{em} , $Q_m^{e(m+1)}$ в результате суммирования дадут вклад от этого источника: $Q_m^{em} + Q_m^{e(m+1)} = F_{nd,m}$, где

$$F_{nd,m} = A_m W_{0m}, \quad (1.89)$$

В случае последнего конечного элемента при $m = n$ для нахождения теплового потока $Q_n^{en} = -(Aq)|_{x=x_n} = (Ak\theta'_{0h})|_{x=x_n}$ следует учесть граничное условие конвективного теплообмена (1.63), что дает

$$Q_n^{en} = Ah_f(\theta_b - \theta_{0h}), \quad x = x_n = b. \quad (1.90)$$

Слагаемое $Ah_f\theta_{0h}$ после подстановки конечно-элементной аппроксимации для θ_{0h} переносится в левую часть равенства (1.83). В результате учета значения $F_{int,2}^{en} = Q_n^{en}$ для элемента с номером n вместо соотношений (1.87), (1.88) можно использовать формулы

$$\mathbf{K}^{en} \cdot \mathbf{T}^{en} = \mathbf{F}_b^{en} + \mathbf{F}_c^{en} + \mathbf{F}_{int}^{en}, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{K}^{en} = \mathbf{K}_k^{en} + \mathbf{K}_c^{en}, \quad \mathbf{K}_c^{en} = A_n h_f \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.92)$$

$$\mathbf{F}_c^{en} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ A_n h_f \theta_b \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F}_{int}^{en} = \left\{ \begin{array}{c} Q_{n-1}^{en} \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (1.93)$$

Наконец, для самого первого элемента при $m = 1$ соотношение (1.83) справедливо для аппроксимации $\theta_h = \theta_{0h} + \theta_s$, а не для θ_{0h} . Согласно главному граничному условию (1.62) узловая температура T_0 известна и равна θ_Γ , но тепловой поток Q_0^{e1} неизвестен. Поэтому из системы (1.83) при $m = 1$ достаточно оставить только второе соотношение, в котором слагаемое с $T_0 = \theta_\Gamma$ нужно перенести в правую часть. Результату можно придать вид

$$\mathbf{K}^{e1} \cdot \mathbf{T}^{e1} = \mathbf{F}_b^{e1} + \mathbf{F}_d^{e1} + \mathbf{F}_{int}^{e1}, \quad (1.94)$$

для векторов размерности единица и матрицы \mathbf{K}^{e1} размерности 1×1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{e1} &= [K_{11}^{e1}] = [K_{k22}^{e1}], & \mathbf{T}^{e1} &= \{T_1\}, \\ \mathbf{F}_b^{e1} &= \{F_{b1}^{e1}\} = \{F_{W2}^{e1}\}, & \mathbf{F}_d^{e1} &= \{F_{d1}^{e1}\} = -\{K_{k21}^{e1} T_0\}, \\ \mathbf{F}_{int}^{e1} &= \{Q_1^{e1}\}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Соотношение (1.94) вместе с (1.95) является элементарным уравнением для функции θ_{0h} при $m = 1$, так как слагаемое с T_0 перенесено в правую часть, и T_0 не является неизвестной константой аппроксимации.

Отметим, что элементарная матрица \mathbf{K}^{e1} , состоящая из одного положительного элемента по причине наличия главного граничного условия, является положительно определенной. Также положительно определена и матрица \mathbf{K}^{en} , что вызвано условием конвективного теплообмена, давшим добавку \mathbf{K}_c^{en} .

Замечание. Если заменить условие конвективного теплообмена при $x = b$ на условие второго рода с заданным тепловым потоком, то для элемента с номером n в (1.92) добавки \mathbf{K}_c^{en} не будет, и элементарная матрица $\mathbf{K}^{en} = \mathbf{K}_k^{en}$ будет только неотрицательно определенной.

Попарное суммирование всех элементарных уравнений для каждого узла m дает систему МКЭ (1.82).

В данной системе уравнения для узлов $m = 2, 3, \dots, n - 1$ будут иметь вид

$$K_{21}^{em} T_{m-1} + (K_{22}^{em} + K_{11}^{e(m+1)}) T_m + K_{12}^{e(m+1)} T_{m+1} = F_{b2}^{em} + F_{b1}^{e(m+1)} + F_{nd,m}. \quad (1.96)$$

Первое уравнение системы для $m = 1$ и последнее уравнение для $m = n$ имеют усеченные формы

$$(K_{11}^{e1} + K_{11}^{e2}) T_1 + K_{12}^{e2} T_2 = F_{b1}^{e1} + F_{b1}^{e2} + F_{d1}^{e1} + F_{nd,1}, \quad (1.97)$$

$$K_{21}^{en} T_{n-1} + K_{22}^{en} T_n = F_{b2}^{en} + F_{c2}^{en} + F_{nd,n}, \quad (1.98)$$

где $F_{nd,1}, F_{nd,n}$ определены по (1.89) при $m = 1$ и $m = n$, соответственно, и отличны от нуля, если функция W содержит сосредоточенные источники при $x = x_1$ и $x = x_n$.

Итак, матрица \mathbf{K} при принятой последовательной нумерации узлов имеет трехдиагональную структуру:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & & & & & & & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & & & & & & & & \\ & K_{32} & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & & & & K_{n-1,n} \\ & & & & & & K_{n,n-1} & & & & K_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.99)$$

Ненулевые элементы этой матрицы по (1.96)–(1.98) даются формулами: $K_{m,m-1} = K_{21}^{em}$, $K_{mm} = K_{22}^{em} + K_{11}^{e(m+1)}$, $K_{m,m+1} = K_{12}^{e(m+1)}$ – для строк с номерами $m = 2, 3, \dots, n - 1$; и $K_{11} = K_{11}^{e1} + K_{11}^{e2}$; $K_{12} = K_{12}^{e2}$; $K_{n,n-1} = K_{21}^{en}$; $K_{nn} = K_{22}^{en}$.

Вектор правых частей \mathbf{F} системы (1.82) можно подразделить на составляющие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nd}, \quad (1.100)$$

где по (1.96)–(1.98) для данной задачи ненулевые компоненты векторов \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_d , \mathbf{F}_c и \mathbf{F}_{nd} даются формулами: $F_{bm} = F_{b2}^{em} + F_{b1}^{e(m+1)}$, $m = 1, 2, \dots, n - 1$; $F_{bn} = F_{b2}^{en}$; $F_{d1} = F_{d1}^{e1}$; $F_{cn} = F_{c2}^{en}$; а вектор \mathbf{F}_{nd} имеет компоненты $F_{nd,m}$, определенные по (1.89) при $m = 1, 2, \dots, n$.

Внешние воздействия в (1.100) выделены в соответствии с их различным физическим смыслом: \mathbf{F}_b – вектор активных распределенных внутри области источников (body load по терминологии ANSYS) без учета сосредоточенных источников в узлах; \mathbf{F}_d – вектор квазивоздействий, обусловленных связями или главными граничными условиями (DOF constraint, DOF – degree of freedom); \mathbf{F}_c – вектор воздействий, обусловленных конвективным (convection) теплообменом; \mathbf{F}_{nd} – вектор сосредоточенных узловых (nodal) внешних воздействий, которые могут содержаться в функции источника W по (1.89).

Видно, что процесс сборки СЛАУ МКЭ (1.82) может быть осуществлен путем формирования элементных объектов с дальнейшим их объединением в глобальные.

При этом матрица системы \mathbf{K} и вектор \mathbf{F}_b могут быть построены в результате ансамблирования элементных матриц \mathbf{K}^{em} и векторов \mathbf{F}_b^{em} . Идея объединения элементных объектов в глобальные иллюстрируется следующими фрагментами матрицы \mathbf{K} и вектора \mathbf{F}_a :

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc} \dots + K_{11}^{em} & K_{12}^{em} \\ K_{21}^{em} & K_{22}^{em} + K_{11}^{e(m+1)} & K_{12}^{e(m+1)} \\ & K_{21}^{e(m+1)} & K_{22}^{e(m+1)} + \dots \end{array} \right], \quad (1.101)$$

$$\mathbf{F}_b = \left\{ \begin{array}{c} \dots + F_{b1}^{em} \\ F_{b2}^{em} + F_{b1}^{e(m+1)} \\ F_{b2}^{e(m+1)} + \dots \end{array} \right\}. \quad (1.102)$$

Формулы (1.101), (1.102) можно представить в более компактном виде

$$\mathbf{K} = \sum_m^a \mathbf{K}^{em}, \quad \mathbf{F}_b = \sum_m^a \mathbf{F}_b^{em}. \quad (1.103)$$

Символ \sum^a в (1.103) обозначает операцию ансамблирования конечно-элементных объектов в глобальные. Понятно, что просто сложить матрицы \mathbf{K}^{em} размера 2×2 и получить матрицу \mathbf{K} размера $n \times n$ нельзя. Однако можно расширить элементные матрицы \mathbf{K}^{em} нулями до размера $n \times n$, расположив элементы K_{11}^{em} , K_{12}^{em} , K_{21}^{em} , K_{22}^{em} на соответствующих строках и столбцах с номерами $m - 1$ и m , а затем сложить полученные матрицы. Аналогичным образом осуществляется и формирование конечно-элементных глобальных векторов \mathbf{F}_b из элементных векторов \mathbf{F}_b^{em} .

Таким образом, процедура ансамблирования позволяет строить глобальные конечно-элементные матрицы и векторы из соответствующих элементных объектов. Эта техника эффективна для тел сложной формы и для составных структур, и может быть реализована для любых конечно-элементных сеток при произвольной нумерации узлов.

В заключение отметим, что наличие главного граничного условия обеспечивает положительную определенность матрицы \mathbf{K} . Здесь существенным оказывается присутствие положительно определенной матрицы \mathbf{K}^{e1} . Поэтому, несмотря на то что только лишь неотрицательную определенность элементных матриц \mathbf{K}^{em} , $m = 2, 3, \dots, n - 1$, и вне зависимости от наличия или

отсутствия матрицы конвективного теплообмена \mathbf{K}_c^{en} , матрица \mathbf{K} , полученная ансамблированием всех этих элементных матриц, будет положительно определена. Тогда, матрица \mathbf{K} для одномерной задачи теплопроводности будет иметь отличный от нуля определитель, а следовательно, СЛАУ МКЭ (1.82) может быть однозначно разрешена относительно узловых температур \mathbf{T} .

Итак, в данном разделе приведена схема решения одномерной стационарной задачи теплопроводности по МКЭ с использованием линейных конечных элементов. При принятой последовательной нумерации узлов была получена трехдиагональная матрица СЛАУ, полученная в результате ансамблирования элементных матриц. В дальнейшем техника ансамблирования МКЭ будет описана и для более общих случаев.

1.6. МКЭ в двумерных и трехмерных задачах теплопроводности

Вернемся к слабым постановкам стационарных задач теплопроводности (1.19)–(1.21) или (1.24), (1.25) для (1.23), (1.22) и рассмотрим конечно-элементные аппроксимации этих задач для двумерных и трехмерных областей Ω .

Пусть область Ω аппроксимируется совокупностью n_{el} конечных элементов $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$, т.е. $\Omega \approx \Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$. Тогда граница $\Gamma = \partial\Omega$ будет аппроксимироваться границей $\Gamma_h = \partial\Omega_h$, и можно ввести в рассмотрение ее участки $\Gamma_{\theta h}$, Γ_{qh} , Γ_{ch} , на которые можно снести граничные условия (1.8), (1.9) и (1.12) для температуры, теплового потока и конвективного теплообмена, соответственно. Заметим, что при этом граничные условия при $\Gamma_h \neq \Gamma$ будут выполняться, вообще говоря, неточно, и вместо (1.8), (1.9) и (1.12) будем иметь

$$\theta = \theta_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta h}. \quad (1.104)$$

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -q_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{qh}, \quad (1.105)$$

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -h_{fh}(\theta_{bh} - \theta); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ch}, \quad (1.106)$$

где $\theta_{\Gamma h}$, $q_{\Gamma h}$, h_{fh} , θ_{bh} – функции, заданные на участках границы Γ_h , и поэтому отличающиеся от соответствующих функций θ_{Γ} , q_{Γ} , h_f , θ_b .

В результате для области Ω_h основные соотношения обобщенной постановки задачи стационарной теплопроводности (1.19)–(1.21) можно предста-

ВИТЬ В ВИДЕ

$$a_h(\eta, \theta_h) = \tilde{L}_h(\eta), \quad (1.107)$$

$$a_h(\eta, \theta_h) = \int_{\Omega_h} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta_h d\Omega + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \eta \theta_h d\Gamma, \quad (1.108)$$

$$\tilde{L}_h(\eta) = \int_{\Omega_h} \eta W d\Omega + \int_{\Gamma_{qh}} \eta q_{\Gamma h} d\Gamma + \int_{\Gamma_{ch}} \eta h_{fh} \theta_{bh} d\Gamma. \quad (1.109)$$

Если аналогично (1.23), (1.22) путем подбора специальной функции θ_{sh} снять неоднородность граничных условий (1.104)

$$\theta_h = \theta_{0h} + \theta_{sh}, \quad (1.110)$$

$$\theta_{0h} = 0, \quad \theta_{sh} = \theta_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta h}, \quad (1.111)$$

то, как и в (1.24), (1.25), основное тождество обобщенной постановки (1.107)–(1.109) можно записать в виде

$$a_h(\eta, \theta_{0h}) = L_h(\eta), \quad (1.112)$$

$$L_h(\eta) = \tilde{L}_h(\eta) - a_h(\eta, \theta_{sh}). \quad (1.113)$$

Примем для θ_{0h} и θ_{sh} , а следовательно, и для θ_h , конечно-элементные аппроксимации, аналогичные (1.67)–(1.69). А именно, пусть

$$\theta_{0h} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}, \quad \theta_{sh} = \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s, \quad (1.114)$$

$$\theta_h = \tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s, \quad (1.115)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})], \quad \tilde{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}, \mathbf{T}_s\}, \quad (1.116)$$

где $\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})$ – векторы-строки базисных функций (функций формы), $\tilde{\mathbf{T}}$, \mathbf{T} , \mathbf{T}_s – векторы-столбцы узловых температур для задания функций θ_h , θ_{0h} , θ_{sh} , соответственно. При этом, при разделении вектора $\tilde{\mathbf{T}}$ на \mathbf{T} и \mathbf{T}_s используется общая нумерация узлов (степеней свободы T_j), и, таким образом, формулу $\tilde{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}, \mathbf{T}_s\}$ надо понимать как некоторую условную группировку узловых температур T_j в векторы \mathbf{T} и \mathbf{T}_s , соответствующую этой общей нумерации.

Заметим, что тождество (1.112) для приближенного решения $\theta_{0h} \in V_h$ должно выполняться для $\forall \eta \in V_h$. Поэтому для проекционной функции η можно принять

$$\eta = \delta \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}), \quad (1.117)$$

где $\delta \mathbf{T}$ – произвольный вектор или вариация узловых значений температур.

Подстановка (1.114)–(1.117) в (1.112) с учетом (1.113), (1.108), (1.109) дает вариационное конечно-элементное соотношение

$$\delta \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \delta \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{F}, \quad (1.118)$$

где

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_h} \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \mathbf{N} \mathbf{N}^* d\Gamma, \quad \mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}^*, \quad (1.119)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d, \quad (1.120)$$

$$\mathbf{F}_b = \int_{\Omega_h} W \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{sf} = \int_{\Gamma_{qh}} q_{\Gamma h} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \theta_{bh} \mathbf{N} d\Gamma, \quad (1.121)$$

$$\mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_s, \quad (1.122)$$

$$\mathbf{K}_{0s} = \int_{\Omega_h} \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_s d\Omega + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \mathbf{N} \mathbf{N}_s^* d\Gamma, \quad \mathbf{B}_s = \nabla \mathbf{N}_s^*. \quad (1.123)$$

Учитывая произвольность компонент вектора $\delta \mathbf{T}$, из (1.118) получаем разрешающую СЛАУ МКЭ для стационарной задачи теплопроводности

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}. \quad (1.124)$$

Данная система может быть сформирована как для трехмерных (3D), так и для двумерных (2D) задач теплопроводности. Отличие состоит лишь в том, что 3D-задач Ω_h – трехмерная область (объем) в \mathbb{R}^3 , $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ – двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 ; а для 2D-задач Ω_h – двумерная область в \mathbb{R}^2 , $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ – криволинейная граница в \mathbb{R}^2 .

Для одномерной задачи при $\Omega_h = [a, b]$ система (1.124) сводится к рассмотренной ранее (1.82), где для двух крайних точек $x = a$ и $x = b$ отрезка $[a, b]$ пришлось ограничиться двумя видами граничных условий, а все уравнения системы были умножены на площадь поперечного сечения A для сохранения размерности компонент матриц и векторов, как для трехмерной задачи. Аналогично для 2D-задач компоненты матриц и векторов в (1.119)–(1.123) можно умножить на линейный размер h . Такой размер естественен, например, для цилиндра длины h вдоль образующей оси, для которого можно поставить плоскую задачу теплопроводности для поперечного сечения Ω_h , если граничные температурные условия по боковой границе не меняются вдоль осевой координаты цилиндра.

Матрица \mathbf{K} и составляющие вектора \mathbf{F} СЛАУ (1.124) именуется также, как и для одномерной задачи теплопроводности. Матрица \mathbf{K} носит название *матрицы теплопроводности*, а составляющие вектора \mathbf{F} , выделенные

в (1.120) имеют следующий физический смысл: \mathbf{F}_b – вектор распределенных внутри области Ω_h тепловых источников (body load по терминологии ANSYS); \mathbf{F}_{sf} – вектор поверхностных тепловых воздействий, связанных с тепловыми потоками и конвективным теплообменом (surface load); \mathbf{F}_d – вектор квазивоздействий, обусловленных связями или главными граничными условиями (DOF constraint).

Как и в одномерных задачах, при наличии сосредоточенных в узлах \mathbf{x}_j тепловых воздействий $F_{ndj}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ из векторов \mathbf{F}_b и \mathbf{F}_{sf} можно выделить вектор узловых (nodal) тепловых воздействий \mathbf{F}_{nd} и вместо (1.120) записать

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{nd}. \quad (1.125)$$

Матрица \mathbf{K} и векторы \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_{sf} и \mathbf{F}_d могут быть получены в результате ансамблирования соответствующих элементных объектов \mathbf{K}^{em} , \mathbf{F}_b^{em} , \mathbf{F}_{sf}^{em} и \mathbf{F}_d^{em} . Для демонстрации этой важной процедуры представим сужения выражений (1.114), (1.117) для θ_{0h} , θ_{sh} и η на конечном элементе Ω^{em} в виде

$$\theta_{0h} = \mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad \theta_{sh} = \mathbf{N}_s^{em*}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s^{em}; \quad \mathbf{x} \in \Omega^{em}, \quad (1.126)$$

$$\eta = \delta\mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{N}^{em}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega^{em}, \quad (1.127)$$

где $\mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_s^{em*}(\mathbf{x})$ – векторы-строки функций формы отдельного конечного элемента Ω^{em} ; \mathbf{T}^{em} , \mathbf{T}_s^{em} – векторы-столбцы узловых температур для θ_{0h} , θ_{sh} на Ω^{em} ; $\delta\mathbf{T}^{em*}$ – вектор-строка вариаций узловых температур для конечного элемента Ω^{em} .

Интегралы по Ω_h , Γ_{ch} , Γ_{qh} в (1.119), (1.121), (1.123) можно представить в виде суммы соответствующих интегралов по отдельным конечным элементам Ω^{em} и элементным границам Γ_c^{em} , Γ_q^{em} . Тогда с учетом (1.126), (1.127) совокупность формул (1.118)–(1.123) вариационного соотношения МКЭ можно переписать следующим образом:

$$\sum_m \delta\mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{T}^{em} = \sum_m \delta\mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{F}_a^{em}, \quad (1.128)$$

$$\mathbf{K}^{em} = \int_{\Omega^{em}} \mathbf{B}^{em*} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{em} d\Omega + \int_{\Gamma_c^{em}} h_{fh} \mathbf{N}^{em} \mathbf{N}^{em*} d\Gamma, \quad \mathbf{B}^{em} = \nabla \mathbf{N}^{em*}, \quad (1.129)$$

$$\mathbf{F}_a^{em} = \mathbf{F}_b^{em} + \mathbf{F}_{sf}^{em} + \mathbf{F}_d^{em}, \quad (1.130)$$

$$\mathbf{F}_b^{em} = \int_{\Omega^{em}} W \mathbf{N}^{em} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{sf}^{em} = \int_{\Gamma_q^{em}} q_{\Gamma h} \mathbf{N}^{em} d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{em}} h_{fh} \theta_{bh} \mathbf{N}^{em} d\Gamma, \quad (1.131)$$

$$\mathbf{F}_d^{em} = -\mathbf{K}_{0s}^{em} \cdot \mathbf{T}_s^{em}, \quad (1.132)$$

$$\mathbf{K}_{0s}^{em} = \int_{\Omega^{em}} \mathbf{B}^{em*} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_s^{em} d\Omega + \int_{\Gamma_c^{em}} h_{fh} \mathbf{N}^{em} \mathbf{N}_s^{em*} d\Gamma, \quad \mathbf{B}_s^{em} = \nabla \mathbf{N}_s^{em*}. \quad (1.133)$$

Заметим, что вариационное элементное соотношение может быть получено из слабой постановки задачи теплопроводности для отдельного конечного элемента Ω^{em} и, как несложно показать, может быть представлено в форме

$$\delta \mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{T}^{em} = \delta \mathbf{T}^{em*} \cdot (\mathbf{F}_a^{em} + \mathbf{F}_{int}^{em}), \quad (1.134)$$

$$\mathbf{F}_{int}^{em} = \int_{\Gamma_{int}^{em}} q \mathbf{N}^{em} d\Gamma; \quad q = -\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q}(\theta_h) = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta_h. \quad (1.135)$$

Здесь \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к границе конечного элемента; Γ_{int}^{em} – часть границы (или вся граница), контактирующая с другими конечными элементами; \mathbf{F}_{int}^{em} – вектор (внутренних) тепловых потоков, передающихся через границу Γ_{int}^{em} от других соседствующих с Ω^{em} конечных элементов.

Для классических конечно-элементных сеток при переходе от одного конечного элемента к другому должна обеспечиваться непрерывность аппроксимирующих полевых функций и проекционных функций, т.е. полей температуры θ_{0h} и вариации температуры $\eta = \delta\theta$ в задаче теплопроводности. В связи с этим, если два конечных элемента Ω^{em} и Ω^{el} имеют общую границу $\Gamma_{int}^{e(ml)}$, то в силу непрерывности функции η на этой границе должно выполняться равенство

$$\delta \mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{N}^{em}(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{N}^{el}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{int}^{e(ml)}. \quad (1.136)$$

С учетом (1.136) очевидно, что при суммировании равенств (1.134) для элементов Ω^{em} и Ω^{el} вклады от векторов внутренних тепловых потоков через общую границу $\Gamma_{int}^{e(ml)}$ сокращаются, так как в (1.135) нормаль \mathbf{n} на $\Gamma_{int}^{e(ml)}$ меняет знак при переходе от элемента Ω^{em} к элементу Ω^{el} .

В результате суммирования равенств (1.134) для всех элементов Ω^{em} в отсутствии сосредоточенных узловых воздействий будем иметь

$$\sum_m \delta \mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{F}_{int}^{em} = 0, \quad (1.137)$$

и поэтому суммирование всех элементных соотношений (1.134) дает равенство (1.128).

Если расширить элементные объекты \mathbf{K}^{em} и \mathbf{F}_a^{em} нулями до размеров соответствующих глобальных объектов \mathbf{K}_G^{em} и \mathbf{F}_{Ga}^{em} так, чтобы выполнялись равенства

$$\delta\mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{T}^{em} = \delta\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{K}_G^{em} \cdot \mathbf{T}, \quad \delta\mathbf{T}^{em*} \cdot \mathbf{F}_a^{em} = \delta\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{F}_{Ga}^{em}, \quad (1.138)$$

то видно, что суммирование элементных соотношений дает

$$\delta\mathbf{T}^* \cdot \sum_m \mathbf{K}_G^{em} \cdot \mathbf{T} = \delta\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{F}_{Ga}^{em}, \quad (1.139)$$

что эквивалентно (1.118).

Таким образом, процесс ансамблирования, обозначаемый ранее как \sum^a , определяется следующим образом

$$\mathbf{K} = \sum_m^a \mathbf{K}^{em} = \sum_m \mathbf{K}_G^{em}, \quad \mathbf{F}_a = \sum_m^a \mathbf{F}_a^{em} = \sum_m \mathbf{F}_{Ga}^{em}. \quad (1.140)$$

Формулы (1.140) показывают, как из элементных объектов можно построить глобальные. Более формализовано и для более общего случая процесс ансамблирования в МКЭ будет описан в следующем разделе.

Отметим также, что, аналогично (1.125), в вектор \mathbf{F} можно включить вектор узловых воздействий \mathbf{F}_{nd} . Здесь можно считать, что при сосредоточенных воздействиях этот вектор выделяется из векторов \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_{sf} , или получается в результате суммирования внутренних воздействий

$$\mathbf{F}_{nd} = \sum_m \mathbf{F}_{Gint}^{em}. \quad (1.141)$$

Итак, в данном разделе приведены конечно-элементные соотношения для стационарной задачи теплопроводности, справедливые как для 3D-задач, так и для 2D- и 1D-задач.

Разрешающие конечно-элементные соотношения были получены как из общей слабой постановки задачи теплопроводности в конечномерном пространстве, так и из рассмотрения задач теплопроводности для отдельных конечных элементов с последующим объединением элементных уравнений в глобальные. Это объединение определяет способ построения глобальных матриц и векторов, как результат ансамблирования соответствующих элементных объектов.

Отметим, что элементная матрица теплопроводности \mathbf{K}^{em} в (1.129) в общем случае лишь неотрицательно определена. При этом, матрица \mathbf{K}^{em}

в (1.129) будет положительно определенной при наличии у конечного элемента Ω^{em} границ Γ_c^{em} или Γ_θ^{em} . (Наличие главных граничных условий на Γ_θ^{em} приводит к уменьшению числа узловых температур в векторе \mathbf{T}^{em} , что влечет за собой исключение у матрицы \mathbf{K}^{em} строк и столбцов, соответствующих узловым температурам \mathbf{T}_s^{em} .) Также неотрицательно определена и глобальная матрица теплопроводности \mathbf{K} в (1.119), причем эта матрица положительно определена ($\mathbf{K} > 0$), если есть условие конвективного теплообмена, либо если есть главные граничные условия, которые исключают решение однородной задачи теплопроводности в виде произвольной постоянной функции.

В вектор правых частей СЛАУ МКЭ могут входить векторы, определяющие различные внешние воздействия: объемные, поверхностные, узловые, а также векторы квазивоздействий, вызванные ограничениями степеней свободы (главными граничными условиями).

МКЭ значительно выигрывает по сравнению со многими другими численными методами за счет использования для аппроксимаций слабых постановок, имеющих энергетический или вариационный смысл; автоматического учета условий сопряжения полей на межэлементных границах (равенства (1.136) или (1.141)); хороших вычислительных свойств получающихся СЛАУ; а также за счет возможностей реализации эффективных процедур формирования глобальных матриц и векторов. Среди последних процедур следует отметить процесс сборки глобальных объектов из элементных путем ансамблирования и методы учета главных граничных условий. Эти две важные вычислительные процедуры будут дополнительно описаны в двух последующих разделах данной главы.

1.7. Формальное описание процедур ансамблирования

В данном разделе процедура ансамблирования рассматривается в общем случае безотносительно к типу решаемой по МКЭ задачи.

Идея сборки глобальных уравнений МКЭ из соответствующих элементных составлет одну из центральных частей МКЭ. Конкретная реализация такой процедуры определяется форматом хранения основных структур данных (конечно-элементных матриц и векторов), а также и алгоритмами решения СЛАУ МКЭ. Ниже процесс формирования глобальных уравнений излагается в теоретическом аспекте, причем считается, что конечно-элементные матрицы являются обычными двумерными массивами.

Рассмотрим некоторую конечно-элементную задачу. Пусть число узлов ее конечно-элементной сетки равно n_{nd} , а число элементов – n_{el} .

Отдельный узел характеризуется своим номером j , а также координатами x_j, y_j, z_j в глобальной декартовой системе координат $Oxyz$. (Для двумерных и одномерных задач число координат будет меньшим.) С каждым узлом связывается набор степеней свободы в глобальной системе координат. Например, для задачи теплопроводности для каждого узла с номером j имеем одну степень свободы T_j (узловую температуру), для трехмерной задачи теории упругости – три степени свободы U_{xj}, U_{yj}, U_{zj} (узловые перемещения по осям x, y, z), для связанной задачи термоупругости – четыре степени свободы $U_{xj}, U_{yj}, U_{zj}, T_j$, и т.д. Из этих компонент образуем вектор узловых степеней свободы для каждого узла с номером j :

$$\mathbf{U}_j = \{T_j\}; \quad \mathbf{U}_j = \{U_{xj}, U_{yj}, U_{zj}\}; \quad \mathbf{U}_j = \{U_{xj}, U_{yj}, U_{zj}, T_j\}, \quad (1.142)$$

и т. п.

Объединяя узловые степени свободы для всех узлов в единый вектор \mathbf{U} , можно записать:

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{n_{nd}}\}. \quad (1.143)$$

Вектор \mathbf{U} из (1.143) назовем *глобальным вектором узловых степеней свободы*. Если в каждом узле j имеется κ_j степеней свободы, то размерность вектора \mathbf{U} будет равна

$$n = \sum_{j=1}^{n_{nd}} \kappa_j, \quad (1.144)$$

и в частности, если $\kappa_j = \kappa$ для $j = 1, 2, \dots, n_{nd}$ (т.е. число степеней свободы одинаково для всех узлов), то $n = \kappa n_{nd}$.

Запишем элементные соотношения типа (1.134) в глобальной системе координат для каждого элемента с номером m :

$$\delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{U}^{em} = \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot (\mathbf{F}_a^{em} + \mathbf{F}_{int}^{em}), \quad (1.145)$$

где \mathbf{T}^{em} заменено на более общее обозначение \mathbf{U}^{em} при сохранении остальных величин; $\mathbf{F}_a^{em} = \mathbf{F}_b^{em} + \mathbf{F}_{sf}^{em} + \mathbf{F}_d^{em}$.

Просуммировав уравнения (1.145) по m , при учете сосредоточенных воздействий в узлах имеем

$$\sum_{m=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{U}^{em} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{F}_a^{em} + \delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}_{nd}, \quad (1.146)$$

где $\delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}_{nd} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{F}_{int}^{em}$; \mathbf{F}_{nd} – вектор внешних воздействий, заданных в узлах, т.е. неизвестные внутренние воздействия \mathbf{F}_{int}^{em} в узловых сечениях, действующие на элемент с номером m со сторон окружающих его элементов, при суммировании дают заданные значения \mathbf{F}_{nd} воздействий в узлах (возможно, равные нулю).

Элементные матрицы \mathbf{K}^{em} и векторы \mathbf{F}_b^{em} , \mathbf{F}_{sf}^{em} , \mathbf{F}_d^{em} расширим до размеров $n \times n$ или n , дополнив их нулями. Полученные таким образом объекты снабдим индексами G : \mathbf{K}_G^{em} , \mathbf{F}_{Gb}^{em} и т.д. Строгие математические формулировки процесса расширения могут быть представлены следующим образом.

Пусть конечный элемент с номером m имеет n_d^{em} степеней свободы, и его степени свободы локально занумерованы от 1 до n_d^{em} . Тогда множество локальных номеров степеней свободы элементы есть множество

$$J_L^{em} = \{1, 2, \dots, n_d^{em}\}. \quad (1.147)$$

В общей (глобальной) нумерации эти же степени свободы имеют соответственно некоторые номера $r_1, r_2, \dots, r_{n_d^{em}}$; т.е. множество номеров степеней свободы в глобальной нумерации, соответствующей нумерации компонент вектора \mathbf{U} из (1.143), есть множество

$$J_G^{em} = \{r_1, r_2, \dots, r_{n_d^{em}}\}. \quad (1.148)$$

Существует однозначное отображение $f^{em}: J_G^{em} \rightarrow J_L^{em}$, переводящее для элемента с номером m глобальный номер p степени свободы из J_G^{em} в локальный номер s из J_L^{em} :

$$f^{em}(p) = s; \quad p \in J_G^{em}, \quad s \in J_L^{em}; \quad p = r_s. \quad (1.149)$$

Элементная матрица \mathbf{K}^{em} при локальной нумерации степеней свободы есть матрица размера $n_d^{em} \times n_d^{em}$ с компонентами K_{pq}^{em} ; $p, q \in J_L^{em}$.

Тогда расширенную элементную матрицу \mathbf{K}_G^{em} в глобальной системе координат можно определить по формуле:

$$K_{Gij}^{em} = \begin{cases} K_{pq}^{em}; & p = f^{em}(i), \quad q = f^{em}(j); \quad (i \in J_G^{em}) \wedge (j \in J_G^{em}), \\ 0; & (i \notin J_G^{em}) \vee (j \notin J_G^{em}). \end{cases} \quad (1.150)$$

Аналогично, используя структуры (1.147)–(1.149), можно определить и расширенные векторы \mathbf{F}_{Gb}^{em} , \mathbf{F}_{Gsf}^{em} , \mathbf{F}_{Gd}^{em} :

$$F_{G(\dots)i}^{em} = \begin{cases} F_{(\dots)p}^{em}; & p = f^{em}(i); \quad i \in J_G^{em}, \\ 0; & i \notin J_G^{em}. \end{cases} \quad (1.151)$$

Теперь, используя (1.143), (1.144), (1.150), (1.151), уравнение (1.146) можно переписать в виде

$$\delta \mathbf{U}^* \cdot \left(\sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em} \right) \cdot \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^* \cdot \sum_{m=1}^{n_{el}} (\mathbf{F}_{Gb}^{em} + \mathbf{F}_{Gsf}^{em} + \mathbf{F}_{Gd}^{em}) + \delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}_{nd}. \quad (1.152)$$

Отметим, что именно расширения (1.150), (1.151) обеспечивают равенства

$$\sum_{m=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{U}^{em} = \delta \mathbf{U}^* \cdot \left(\sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em} \right) \cdot \mathbf{U}, \quad (1.153)$$

$$\sum_{m=1}^{n_{el}} \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{F}_a^{em} = \delta \mathbf{U}^* \cdot \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{Ga}^{em}. \quad (1.154)$$

Введя обозначения

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em}, \quad \mathbf{F}_t = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{Gt}^{em}, \quad t = b, sf, d, \quad (1.155)$$

и учитывая произвольность значений вектора $\delta \mathbf{U}$, из (1.152) получаем итоговую форму СЛАУ МКЭ

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (1.156)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{nd}. \quad (1.157)$$

Таким образом, процесс ансамблирования элементных конечно-элементных объектов (матриц и векторов) в глобальные описывается формулами (1.155) и включает переход от элементных объектов \mathbf{K}^{em} , \mathbf{F}_t^{em} к расширенным объектам \mathbf{K}_G^{em} , \mathbf{F}_{Gt}^{em} по (1.150), (1.151) согласно законам соответствия (1.149).

Ранее процесс формирования глобальных конечно-элементных объектов сокращенно обозначался следующим образом

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{n_{el}} {}^a \mathbf{K}^{em}, \quad \mathbf{F}_t = \sum_{m=1}^{n_{el}} {}^a \mathbf{F}_t^{em}, \quad t = b, sf, d, \quad (1.158)$$

и сравнение (1.155) с (1.158) позволяет записать

$$\sum_{m=1}^{n_{el}} {}^a \mathbf{K}^{em} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em}, \quad \sum_{m=1}^{n_{el}} {}^a \mathbf{F}_t^{em} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{Gt}^{em}. \quad (1.159)$$

В вычислительной практике расширенные элементные объекты \mathbf{K}_G^{em} и \mathbf{F}_{Gt}^{em} обычно явным образом не строятся. Вместо этого в цикле по номерам элементов реализуется процесс (1.158) формирования глобальных объектов из элементных с учетом расположения компонент элементных матриц и векторов при их суммировании в глобальные объекты по (1.147)–(1.151). Данный процесс ансамблирования эффективно реализуется в компьютерных программах для любых типов конечных элементов, в том числе и для элементов с различным числом степеней свободы с узлах.

В заключение заметим, что при построении вектора $\mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_s$ по (1.122) ансамблирование векторов \mathbf{F}_d^{em} фактически сводится к ансамблированию элементных матриц \mathbf{K}_{0s}^{em} : $\mathbf{K}_{0s} = \sum_m^a \mathbf{K}_{0s}^{em}$. Структура матриц \mathbf{K}_{0s}^{em} похожа на структуру матриц \mathbf{K}^{em} , и поэтому, как будет показано в следующем разделе, формирование всех этих матриц может быть осуществлено по единым методикам, связанным с процедурами учета главных граничных условий.

1.8. Способы учета главных граничных условий

Как можно заметить из (1.126), аппроксимации функций θ_{0h} и θ_{sh} , удовлетворяющие соответственно однородным и неоднородным главным граничным условиям на $\Gamma_{\theta h}$, единообразны. При формировании конечно-элементных сеток в Ω_h обычно удобно строить общие конечно-элементные аппроксимации для функции θ_h . Эти аппроксимации давались ранее формулами (1.110), (1.111), (1.114)–(1.116). Приведем эти формулы еще раз, снабдив для удобства дальнейших выкладок векторы $\mathbf{N}(\mathbf{x})$, \mathbf{T} и $\delta\mathbf{T}$ нижним индексом "0", т.е. $\mathbf{N}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})$, $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}$ и $\delta\mathbf{T}_0 = \delta\mathbf{T}$. Итак, имеем

$$\theta_0 = \theta_{0h} + \theta_{sh}, \quad (1.160)$$

$$\theta_{0h} = 0, \quad \theta_{sh} = \theta_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta h}, \quad (1.161)$$

$$\theta_{0h} = \mathbf{N}_0^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_0, \quad \theta_{sh} = \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s, \quad (1.162)$$

$$\theta_h = \tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{N}_0^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s, \quad (1.163)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_0^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})], \quad \tilde{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_s\}. \quad (1.164)$$

Здесь компоненты вектора \mathbf{T}_s известны из граничных условий (1.161) для θ_{sh} , т.е. можно записать

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_\Gamma, \quad (1.165)$$

где \mathbf{T}_Γ – известный вектор значений температуры в соответствующих узлах на поверхности $\Gamma_{\theta h}$.

Основное конечно-элементное соотношение (1.118) в новых обозначениях можно с учетом (1.119)–(1.122) представить в виде:

$$\delta \mathbf{T}_0^* \cdot (\mathbf{K}_{00} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_s) = \delta \mathbf{T}_0^* \cdot \mathbf{F}_0, \quad (1.166)$$

где $\mathbf{K}_{00} = \mathbf{K}$; $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{b0} + \mathbf{F}_{sf,0}$ или $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{b0} + \mathbf{F}_{sf,0} + \mathbf{F}_{nd,0}$ при учете сосредоточенных воздействий ($\mathbf{F}_{b0} = \mathbf{F}_b$, $\mathbf{F}_{sf,0} = \mathbf{F}_{sf}$, $\mathbf{F}_{nd,0} = \mathbf{F}_{nd}$).

Как можно заметить, если формировать вариационное конечно-элементное соотношение для всего ансамбля конечных элементов в Ω_h без учета главных граничных условий на $\Gamma_{\theta h}$, то будем иметь

$$\delta \tilde{\mathbf{T}}^* \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \delta \tilde{\mathbf{T}}^* \cdot \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.167)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{0s} \\ \mathbf{K}_{0s}^* & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_s \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix}, \quad \delta \tilde{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{T}_0 \\ \delta \mathbf{T}_s \end{Bmatrix}, \quad (1.168)$$

где

$$\mathbf{K}_{ss} = \int_{\Omega_h} \mathbf{B}_s^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_s d\Omega + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \mathbf{N}_s \mathbf{N}_s^* d\Gamma, \quad \mathbf{B}_s = \nabla \mathbf{N}_s^*, \quad (1.169)$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_{bs} + \mathbf{F}_{sf,s} + \mathbf{F}_{\theta s}, \quad (1.170)$$

$$\mathbf{F}_{bs} = \int_{\Omega_h} W \mathbf{N}_s d\Omega, \quad \mathbf{F}_{sf,s} = \int_{\Gamma_{qh}} q_{\Gamma h} \mathbf{N}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_{ch}} h_{fh} \theta_{bh} \mathbf{N}_s d\Gamma, \quad (1.171)$$

$$\mathbf{F}_{\theta s} = \int_{\Gamma_{\theta h}} q \mathbf{N}_s d\Gamma. \quad (1.172)$$

В (1.172) $\mathbf{F}_{\theta s}$ – неизвестный вектор, поскольку на поверхности $\Gamma_{\theta h}$ функция $q = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta_h$ зависит от неизвестного поля температур θ_h . По аналогии с задачами механики $\mathbf{F}_{\theta s}$ можно назвать *вектором реакций* или *вектором реактивных воздействий*.

Учитывая произвольность вектора $\delta \tilde{\mathbf{T}}$, из (1.167) получаем соотношение

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (1.173)$$

которое с учетом (1.168) можно представить в развернутом виде

$$\mathbf{K}_{00} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_s = \mathbf{F}_0, \quad (1.174)$$

$$\mathbf{K}_{0s}^* \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{ss} \cdot \mathbf{T}_s = \mathbf{F}_s. \quad (1.175)$$

Система (1.174), (1.175) интересна тем, что в левой части уравнений вектор \mathbf{T}_s известен ($\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_\Gamma$), а в правой части (1.175) неизвестен вектор \mathbf{F}_s , поскольку неизвестна его составляющая $\mathbf{F}_{\theta s}$.

Из (1.174), (1.165) легко получить СЛАУ МКЭ относительно неизвестных, входящих в вектор \mathbf{T}_0 :

$$\mathbf{K}_{00} \cdot \mathbf{T}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_\Gamma. \quad (1.176)$$

Данное уравнение с учетом (1.165) и перемены обозначений совпадает с полученным ранее СЛАУ МКЭ (1.124). После нахождения \mathbf{T}_0 из (1.176) равенство (1.175) можно использовать для нахождения реакций, входящих в \mathbf{F}_s .

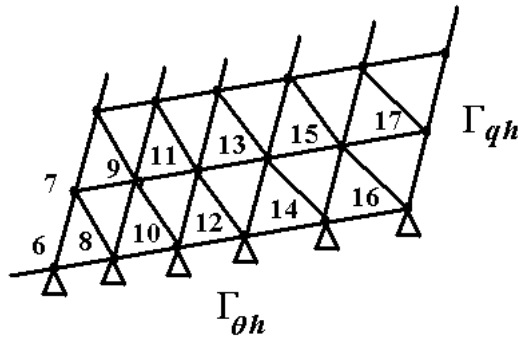


Рис. 1.7.

Опишем теперь некоторые практические способы учета главных граничных условий, исходя из общей системы (1.173). Заметим, что при построении конечно-элементной сетки в Ω_h узлы могут быть занумерованы по различным алгоритмам, и совсем не обязательно, что узлы на $\Gamma_{\theta h}$ будут иметь последовательные номера (Рис. 1.7). Таким образом, блочное представление в (1.168) означает некоторую условную группировку по блокам соответствующих столбцов и строк в $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\delta\tilde{\mathbf{T}}$. Например, связь между компонентами векторов \mathbf{T}_s и $\tilde{\mathbf{T}}$ можно отобразить следующим образом. Пусть компоненты T_{sj} вектора $\mathbf{T}_s = \{T_{s1}, \dots, T_{sn_s}\}$ при общей нумерации компонент в векторе $\tilde{\mathbf{T}}$ имеют номера $p = r_j$, образующие множество $J_s = \{r_1, r_2, \dots, r_{n_s}\}$. Тогда $T_{sj} = \tilde{T}_p$, $p = r_j \in J_s$. При этом, поскольку T_{sj} известны, т.е. $T_{sj} = T_{\Gamma j}$; то известны и соответствующие компоненты \tilde{T}_p : $\tilde{T}_p = \tilde{T}_{\Gamma p} = T_{\Gamma j}$. Если вектор $\tilde{\mathbf{T}}$ имеет размерность n , то множество J_0 номеров компонент вектора $\tilde{\mathbf{T}}$, соответствующих компонентам вектора \mathbf{T}_0 , состоит из $n_0 = n - n_s$ элементов. Множество J_0 очевидно является дополнительным к J_s : $J_0 \cup J_s = \{1, 2, \dots, n\}$; $J_0 \cap J_s = \emptyset$.

Тогда систему (1.176) можно представить в покомпонентной записи в виде:

$$\sum_{q \in J_0} \tilde{K}_{iq} \tilde{T}_q = \tilde{F}_i - \sum_{p \in J_s} \tilde{K}_{ip} \tilde{T}_{\Gamma p}, \quad i \in J_0. \quad (1.177)$$

Исходя из (1.177), можно сформулировать *первый способ учета главных граничных условий*, состоящий из следующих трех этапов 1 – 3.

Этап 1. Формируем матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ и известные составляющие вектора $\tilde{\mathbf{F}}$, т.е. $\tilde{\mathbf{F}}_b$, $\tilde{\mathbf{F}}_{sf}$, \mathbf{F}_{nd} . Запоминаем множество J_s номеров известных компонент $\tilde{T}_{\Gamma p}$ вектора $\tilde{\mathbf{T}}$.

Этап 2. По матрице $\tilde{\mathbf{K}}$ размера $n \times n$ находим матрицу \mathbf{K}_{00} размера $n_0 \times n_0$, исключив из $\tilde{\mathbf{K}}$ столбцы и строки с номерами $p \in J_s$. Для каждой строки с первоначальным номером $i \in J_0$ исключенные компоненты матрицы \tilde{K}_{ip} умножаем на $\tilde{T}_{\Gamma p}$ и суммируем для $\forall p \in J_s$. Полученные значения отнимаем от исходных значений компонент \tilde{F}_i и в итоге формируем правую часть уравнений (1.177). Решая полученную систему (1.177), находим неизвестные компоненты \tilde{T}_q , $q \in J_0$.

Этап 3 (дополнительный). При необходимости определяем реактивные воздействия по формуле

$$\tilde{F}_{\theta j} = \sum_{q \in J_0} \tilde{K}_{qj} \tilde{T}_q + \sum_{p \in J_s} \tilde{K}_{jp} \tilde{T}_{\Gamma p} - \tilde{F}_{bj} - \tilde{F}_{sf,j}, \quad j \in J_s, \quad (1.178)$$

следующей из (1.175), (1.170) при $\tilde{\mathbf{F}}_b = \{\mathbf{F}_{b0}, \mathbf{F}_{bs}\}$, $\tilde{\mathbf{F}}_{sf} = \{\mathbf{F}_{sf,0}, \mathbf{F}_{sf,s}\}$.

При программной реализации представленный способ имеет существенный недостаток, состоящий в том, что на этапе 2 по исходной матрице $\tilde{\mathbf{K}}$ одного размера надо построить ее подматрицу \mathbf{K}_{00} несколько меньшего размера. Если матрицу \mathbf{K}_{00} сохранять на новом месте, то требуется дополнительная компьютерная память. Если же матрицу \mathbf{K}_{00} записывать на место матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$, то нужно реализовать много операций сдвига строк и столбцов. Кроме этого, нужно сохранять подматрицу \mathbf{K}_{0s} для вычисления вектора правых частей и возможно подматрицу \mathbf{K}_{ss} для нахождения реактивных воздействий.

Поставим задачу о сохранении размера матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ при формировании итоговой СЛАУ МКЭ. Как можно заметить, одно из решений состоит в записи (1.176), (1.165) в виде

$$\mathbf{K}_{00} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{T}_s = \mathbf{F}_0 - \mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_{\Gamma}, \quad (1.179)$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{ss}^d \cdot \mathbf{T}_s = \mathbf{K}_{ss}^d \cdot \mathbf{T}_{\Gamma}, \quad (1.180)$$

где \mathbf{K}_{ss}^d – диагональный блок, состоящий из диагональных элементов матрицы \mathbf{K}_{ss} .

Уравнение (1.180) эквивалентно (1.165) и получено умножением левой и правой частей (1.165) на диагональную невырожденную матрицу \mathbf{K}_{ss}^d . Это было сделано лишь для того, чтобы сохранить порядки элементов в новой матрице СЛАУ.

Систему (1.179), (1.180) очевидно можно также представить в форме

$$\tilde{\mathbf{K}}_m \cdot \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{F}}_m, \quad (1.181)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ss}^d \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_s \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 - \mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_\Gamma \\ \mathbf{K}_{ss}^d \cdot \mathbf{T}_\Gamma \end{Bmatrix}. \quad (1.182)$$

Из (1.181), (1.182) и обозначений, принятых в (1.177), легко предложить *второй способ учета главных граничных условий*. При этом способе изменяется лишь второй этап из описанных ранее. Теперь в матрице $\tilde{\mathbf{K}}$ следует просто обнулить все элементы в строках и столбцах с номерами $p \in J_s$, кроме диагональных элементов, которые нужно сохранить без изменений. Таким образом, трансформация матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ в матрицу $\tilde{\mathbf{K}}_m$ оказывается здесь достаточно простой. Более сложные преобразования нужно осуществить с вектором $\tilde{\mathbf{F}}$. Во-первых, как и в первом способе, для каждой строки с номером $i \in J_0$ компоненту \tilde{F}_i следует преобразовать согласно правой части формулы (1.177). Во-вторых, здесь еще нужно при $j \in J_s$ заменить все компоненты вектора \tilde{F}_j на значения $\tilde{K}_{jj}\tilde{T}_{\Gamma j}$.

Второй способ учета главных граничных условий более прост для компьютерной реализации, нежели первый, поскольку для него не нужно менять размеры и структуру матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$. Его минусом является большая размерность матрицы СЛАУ (1.181) по сравнению с размерностью матрицы СЛАУ (1.176). Но обычно число узлов (степеней свободы) с заданными главными граничными условиями много меньше общего числа узлов (степеней свободы). В результате преимущества, связанные с работой с матрицей одного размера, превосходят недостатки, связанные с чуть большими размерами СЛАУ, и второй подход следует признать более эффективным по сравнению с первым.

Описанными способами, конечно же, не исчерпываются возможные способы учета главных граничных условий.

Так, можно предложить *третий подход*, в котором в исходной матрице $\tilde{\mathbf{K}}$ диагональные компоненты \tilde{K}_{jj} для $\forall j \in J_s$ (т.е. соответствующие главным граничным условиям) нужно просто умножить на очень большое

число κ , а соответствующую компоненту \tilde{F}_j вектора правых частей нужно заменить на значение $\kappa \tilde{K}_{jj} \tilde{T}_{\Gamma j}$. Других преобразования исходной системы при этом подходе не требуется. Данный подход наиболее прост при реализации, но, во-первых, он приводит лишь к приближенному выполнению равенства (1.165), а во-вторых, может давать большую погрешность при малых $\tilde{T}_{\Gamma j}$.

Отметим также подходы, связанные с использованием множителей Лагранжа, при которых получаются СЛАУ с матрицей даже большего размера, чем исходная матрица $\tilde{\mathbf{K}}$.

Итак, существует достаточно большое число способов учета главных граничных условий, при которых вначале строится конечно-элементная сетка без учета этих граничных условий, формируется общая матрица МКЭ и основные части вектора правых частей, после чего процедура учета главных граничных условий сводится лишь к преобразованию построенных матрицы и векторов. Такие методы позволяют автоматизировать процессы учета главных граничных условий в рамках общих концепций МКЭ.

Задачи к главе 1

1.1. Покажите, что из положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$ следует положительная определенность матрицы \mathbf{K} СЛАУ (1.34) или (1.44). Сохраняется ли это свойство матрицы \mathbf{K} в случаях: а) положительной, б) неотрицательной (положительно полуопределенной) формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.2. Докажите, что для симметричной положительно определенной матрицы \mathbf{A} для всех i, j выполняется неравенство $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.

1.3. Докажите теорему 1.3, не используя теорему 1.2. Для этого подставьте разложение $v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i$ в функционал $J(v)$ и рассмотрите полученный функционал, как квадратичный функционал многих переменных $J(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Используя теорему о минимуме квадратичного функционала, достигающимся при $\partial J / \partial v_j$, получите систему (1.34) и ее решение.

1.4. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для следующей краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + ku = f, \quad x \in (0, 1),$$

$$\frac{du}{dx} - cu = g, \quad x = 0; \quad \frac{du}{dx} = q, \quad x = 1,$$

где $p = p(x)$, $k = k(x)$, а c, g, q – некоторые постоянные. Какие условия можно наложить на входные величины p, k и т. п. для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.5. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для следующей краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) = f, \quad x \in (0, 1),$$

$$u = u_\Gamma, \quad x = 0; \quad p\frac{du}{dx} + cu = g, \quad x = 1,$$

где $p = p(x)$, а u_Γ, c, g – некоторые постоянные. Какие условия можно наложить на входные величины для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.6. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для следующей краевой задачи

$$\frac{d^4u}{dx^4} + ku = f, \quad x \in (0, 1),$$

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad x = 0,$$

$$u'' = g_1, \quad u''' - pu = g_2, \quad x = 1,$$

где $k = k(x)$, а g_1, g_2, p – некоторые постоянные. Какие условия можно наложить на входные величины k и т. п. для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$? Какие из граничных условий здесь являются главными?

1.7. Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности в цилиндрической системе координат $0r\varphi z$ для кольца $a \leq r \leq b$ при отсутствии зависимостей от угловой координаты φ и осевой координаты z . В этом случае для прироста температуры θ имеем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = W,$$

где $k = k_{rr}$ – коэффициент теплопроводности в радиальном направлении.

Примем также следующие граничные условия:

$$\theta = \theta_\Gamma, \quad r = a,$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} = q_\Gamma, \quad r = b.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. В качестве области интегрирования задачи возьмите кольцевую область $\Omega = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, и учтите, что $d\Omega = r dr d\varphi$.

1.8. В условиях задачи 1.7 примите $a = 0$, т.е. рассмотрите теплопроводный диск $\{0 \leq r \leq b\}$, подчиняющийся тому же дифференциальному уравнению, что и в задаче 1.7. Примите теперь условие конвективного теплообмена при $r = b$:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} = h_f(\theta_b - \theta), \quad r = b.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. В качестве области интегрирования задачи возьмите

область диска $\Omega = \{0 \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, и учтите, что $d\Omega = r dr d\varphi$. Какое граничное условие должно выполняться при $r = 0$, т.е. в центре диска?

1.9. Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности в сферической системе координат $0r\varphi\phi$ ($x = r \cos \varphi \sin \phi$, $y = r \sin \varphi \sin \phi$, $z = r \cos \phi$), для шарового слоя $a \leq r \leq b$ при отсутствии зависимостей от угловых координат φ и ϕ . В этом случае для прироста температуры θ имеем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = W.$$

Примем также следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_\Gamma, & r &= a, \\ k \frac{\partial \theta}{\partial r} &= q_\Gamma, & r &= b. \end{aligned}$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. В качестве области интегрирования задачи возьмите шаровой слой $\Omega = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \phi < \pi\}$, и учтите, что $d\Omega = r^2 \sin \phi dr d\varphi d\phi$.

1.10. В условиях задачи 1.9 примите $a = 0$, т.е. рассмотрите теплопроводный шар $\{0 \leq r \leq b\}$, подчиняющийся тому же дифференциальному уравнению, что и в задаче 1.9. Примите теперь условие конвективного теплообмена при $r = b$:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} = h_f(\theta_b - \theta), \quad r = b.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. В качестве области интегрирования задачи возьмите область шара $\Omega = \{0 \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \phi < \pi\}$, и учтите, что $d\Omega = r^2 \sin \phi dr d\varphi d\phi$. Какое граничное условие должно выполняться при $r = 0$, т.е. в центре шара?

1.11. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f, & x &\in (0, 1), & y &\in (0, 1), \\ u &= 0, & x &= 0; & \frac{\partial u}{\partial x} &= g_1(y), & x &= 1, \\ u &= 0, & y &= 0; & \frac{\partial u}{\partial y} &+ k(x)u &= g_2(x), & y &= 1. \end{aligned}$$

Нужны ли ограничения на входные величины k , g_1 , g_2 для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.12. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu &= 0, & x &\in (0, 1), & y &\in (0, 1), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= g_1(y), & x &= 0; & \frac{\partial u}{\partial x} &= g_2(y), & x &= 1, \end{aligned}$$

$$u = 0, \quad y = 0; \quad u = 0, \quad y = 1.$$

Нужны ли ограничения на входные величины p, g_1, g_2 для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.13. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для следующей краевой задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1),$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} = -g_1(y), \quad x = 0; \quad u = 1 - y, \quad x = 1,$$

$$k \frac{\partial u}{\partial y} - q(x)u = g_2(x), \quad y = 0; \quad u = 0, \quad y = 1.$$

Нужны ли ограничения на входные величины k, q, g_1, g_2 для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.14. Дайте слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для краевой задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + pu = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1),$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} = -g_1(y), \quad x = 0; \quad k \frac{\partial u}{\partial x} = g_2(y), \quad x = 1,$$

$$u = 0, \quad y = 0; \quad u = 0, \quad y = 1.$$

Нужны ли ограничения на входные величины k, p, g_1, g_2 для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.15. Получите слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для краевой задачи в прямоугольнике $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad \{x, y\} \in \Omega,$$

$$u = 0, \quad x = 0; \quad u = 0, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + ku = g, \quad y = 1 - x.$$

Нужны ли ограничения на k и g для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.16. Получите слабую постановку с соотношением вида $a(v, u) = L(v)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$ для краевой задачи в прямоугольнике $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + pu = 0, \quad \{x, y\} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -g_1(y), \quad x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -g_2(x), \quad y = 0,$$

$$u = 0, \quad y = 1 - x.$$

Нужны ли ограничения на k , g_1 , g_2 для неотрицательной или положительной определенности формы $a(\cdot, \cdot)$?

1.17. Рассмотрим стационарную осесимметричную задачу теплопроводности для полого изотропного цилиндра $\Omega = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$ в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$. В случае осесимметричной задачи для прироста температуры θ имеем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = W,$$

где k – коэффициент теплопроводности.

Примем следующие граничные условия:

$$\theta = 0, \quad r = a; \quad k \frac{\partial \theta}{\partial r} = q_{\Gamma}, \quad r = b,$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = 0, h.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. При интегрировании по объему цилиндра используйте, что $d\Omega = r dr d\varphi dz$.

1.18. В условиях задачи 1.17 примите $a = 0$, т.е. рассмотрите сплошной теплопроводный цилиндр $\Omega = \{0 \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$ с тем же дифференциальным уравнением, что и в задаче 1.13. Примите теперь следующие граничные условия:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} = q_{\Gamma}, \quad r = b,$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad k \frac{\partial \theta}{\partial z} = h_f(\theta_b - \theta), \quad z = h.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. При интегрировании по объему цилиндра используйте, что $d\Omega = r dr d\varphi dz$. Какое граничное условие должно выполняться при $r = 0$, т.е. вдоль оси цилиндра?

1.19. Рассмотрим плоскую стационарную задачу теплопроводности в полярной системе координат $Or\varphi$. Для изотропной среды для прироста температуры θ уравнение теплопроводности в полярной системе координат принимает форму

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) = W,$$

где k – коэффициент теплопроводности.

Пусть Ω – область в виде четверти кольца $\Omega = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$. На границе этой области примем следующие граничные условия:

$$\theta = \theta_{\Gamma}, \quad \varphi = 0; \quad \frac{k}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = q_{\Gamma}, \quad \varphi = \pi/2,$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = a, b.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. При интегрировании по области Ω используйте, что $d\Omega = r dr d\varphi$.

1.20. Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности в сферической системе координат $\theta r \varphi \phi$ ($x = r \cos \varphi \sin \phi$, $y = r \sin \varphi \sin \phi$, $z = r \cos \phi$) для половины изотропного шарового слоя $\{a \leq r \leq b, \pi/2 \leq \phi \leq \pi\}$ при отсутствии зависимости от угловой координаты φ . В этом случае для прироста температуры θ имеем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{k \sin \phi}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) = W,$$

где k – коэффициент теплопроводности.

Примем следующие граничные условия:

$$\theta = 0, \quad r = a; \quad \theta = \theta_{\Gamma b}, \quad r = b,$$

$$\frac{k}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = -q_{\Gamma}, \quad \phi = \pi/2.$$

Получите для данной задачи слабую формулировку вида $a(\eta, \theta) = L(\eta)$ с симметричной билинейной формой $a(\cdot, \cdot)$. При интегрировании по области Ω используйте, что $d\Omega = r^2 \sin \phi dr d\varphi d\phi$. Требуется ли здесь граничное условие при $\phi = \pi$, и если да, то какое?

1.21. Докажите, что если все элементные матрицы теплопроводности неотрицательно определены, то и глобальная конечно-элементная матрица, полученная в результате ансамблирования элементных матриц будет неотрицательно определенной (без учета главных граничных условий).

1.22. Сформулируйте слабую постановку стационарной задачи теплопроводности для отдельного конечного элемента Ω^{em} и с ее использованием выведите вариационное элементное соотношение (1.134).

Глава 2

БАЗОВЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Данная глава является базовой для метода конечных элементов. В ней рассматриваются классические конечно-элементные аппроксимации лагранжева типа для одномерных, двумерных и трехмерных скалярных задач, а также некоторые другие полиномиальные приближения.

Как отмечалось в главе 1, в основе классической конечно-элементной техники лежит идея о кусочно-полиномиальной (возможно, параметрической) аппроксимации неизвестной функции на области Ω_h , разбитой на фигуры (конечные элементы) Ω^{em} достаточно простой формы. Таким образом, для отдельного конечного элемента Ω^{em} задача приближения функции θ состоит в нахождении аппроксимирующей функции θ_h , такой, что:

1) θ_h на Ω^{em} является полиномом невысокой степени (для простоты вычислений локальных конечно-элементных объектов);

2) θ_h имеет разложение по базису из функций форм $N_j(\mathbf{x})$ в виде $\theta_h = \sum_j N_j(\mathbf{x})T_j$, причем θ_h совпадает со значениями T_k в узлах \mathbf{x}_k конечного элемента Ω^{em} , т.е. $\theta_h(\mathbf{x}_k) = T_k$,

3) θ_h с учетом нахождения коэффициентов T_j из решения СЛАУ МКЭ приближает функцию θ в некотором пространстве V .

При этом для параметрических конечных элементов задается отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ канонической фигуры Ω_ξ^{em} на элемент Ω_x^{em} , а аппроксимация θ_h задается как в пункте 2, но от канонических переменных $\boldsymbol{\xi}$.

Как известно из курсов вычислительной математики [6, 20], задача приближения функции по ее значениям в некотором наборе точек называется задачей лагранжевой интерполяции. Именно по этой причине большин-

ство из рассматриваемых в данной главе конечных элементов называются лагранжевыми элементами.

Отметим, что более сложные аппроксимации, использующие как значения самой функции, так и значения ее производных, называются эрмитовыми аппроксимациями и порождают эрмитовы конечные элементы. Эрмитовы конечные элементы важны для задач изгиба упругих балок, пластин и оболочек, описываемых дифференциальными уравнениями четвертого порядка и выше. Такие элементы будут описаны позже при рассмотрении задач изгиба балок.

2.1. Одномерный линейный лагранжев конечный элемент

Одномерный *линейный лагранжев конечный элемент с двумя узлами* уже описывался ранее в разделе 1.5. Здесь он будет рассмотрен еще раз с новых позиций. Именно, нас будет интересовать стационарная задача теплопроводности только на одном элементе без учета того, какая общая задача имеется для остальных областей среды. Кроме того, в данном разделе будут отмечены общие формулировки, обобщаемые в дальнейшем на другие типы конечных элементов.

Итак, пусть одномерный конечный элемент $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с номером m занимает область $x \in \Omega^{em} = [x_i, x_j]$; $x_i < x_j$. (Заметим, что здесь используется произвольная нумерация узлов x_i, x_j , применяемая для более сложных задач, особенно, для двумерных и трехмерных.) Данный отрезок может быть отображен на канонический отрезок $\xi \in [-1, 1]$ с помощью представления вида (1.71)

$$x = \frac{h_m}{2}\xi + x_{0m}, \quad (2.1)$$

где $h_m = x_j - x_i$ – длина исходного отрезка; $x_{0m} = (x_i + x_j)/2$ – его средняя точка.

Как отмечалось в разделе 1.5, соотношение (2.1) может быть записано в виде параметрического отображения вида (1.77)

$$x = \mathbf{N}_x^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{N}_x^{em*}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)]$ – вектор-строка линейных функций формы (1.73)

$$N_1(\xi) = (1 - \xi)/2; \quad N_2(\xi) = (1 + \xi)/2, \quad (2.3)$$

а \mathbf{X}^{em} – вектор-столбец координат узловых точек элемента

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_i, x_j\}. \quad (2.4)$$

Отметим, что функции формы $N_s(\xi)$, $s = 1, 2$, можно представить в единой записи

$$N_s(\xi) = (1 + \xi_s \xi)/2, \quad (2.5)$$

где $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$.

Очевидно, что отображение (2.1) или (2.2)–(2.4) переводит взаимно однозначно канонический отрезок $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1]$ в элемент $\Omega^{em} = \Omega_x^{em} = [x_i, x_j]$. При этом, точка $\xi = -1$ переходит в левую крайнюю точку x_i , а точка $\xi = 1$ – в правую крайнюю точку x_j . Естественно, что внутренность отрезка $\xi \in [-1, 1]$ переводится однозначно во внутренность отрезка $x \in \Omega^{em} = [x_i, x_j]$, причем середина $\xi = 0$ канонического отрезка переходит в среднюю точку x_{0m} отрезка Ω^{em} .

Обратное отображение вида (1.72) также линейно и, наоборот, переводит отрезок $\Omega^{em} = \Omega_x^{em} = [x_i, x_j]$ в канонический отрезок $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1]$:

$$\xi = \frac{2}{h_m}(x - x_{0m}). \quad (2.6)$$

Поскольку в слабую постановку стационарной задачи теплопроводности (1.64) входят интегралы с производными первого порядка, то минимальной степенью полинома для аппроксимирующей функции $\theta_h(x) = \theta_h(x(\xi))$ должна быть первая степень. Таким образом, самой простой полиномиальной аппроксимацией θ_h на каноническом отрезке $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1]$ является линейное приближение вида (1.75)

$$\theta_h^{em}(\xi) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.7)$$

где $\theta_h^{em}(\xi)$ – обозначение для функции θ_h , зависящей от $\xi = \xi(x)$ на каноническом отрезке,

$$\mathbf{N}_\theta^{em*} = [N_1(\xi), N_2(\xi)]; \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_i, T_j\}, \quad (2.8)$$

а $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ даются формулами (2.3), и для данного случая $\mathbf{N}_x^{em*} = \mathbf{N}_\theta^{em*}$, что однако не обязательно для других типов элементов.

Представление (2.7) определяет линейный полином от ξ : $\theta_h^{em}(\xi) = a_m + b_m \xi$; $a_m = (T_i + T_j)/2$; $b_m = (T_j - T_i)/2$.

Важно отметить, что (2.7) в совокупности с (2.6) или с (2.2)–(2.4) дают линейную аппроксимацию по x на элементе $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$

$$\theta_h(x) = \theta_h^{em}(\xi(x)) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi(x)) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi(x)) = [N_{g1}(x), N_{g2}(x)]$,

$$N_{g1}(x) = (x_j - x)/h_m; \quad N_{g2}(x) = (x - x_i)/h_m. \quad (2.10)$$

Функции $N_{g1}(x)$, $N_{g2}(x)$ являются линейными функциями от x , принимающими значение "1" в одном узле, и "0" – в другом. Таким образом, приближение (2.8), (2.9) является полиномиальной конечно-элементной аппроксимацией на элементе $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$ и определяет линейный по x конечный элемент с двумя узлами.

Выражения (2.9), (2.10), естественно, проще, чем эквивалентные им (2.7), (2.6) или (2.7), (2.2)–(2.4). Тем не менее, для более сложных элементов оказывается более удобной идеология суперпозиции двух представлений: параметрического отображения канонической фигуры на исходный конечный элемент (здесь – это отображение (2.2)) и аппроксимация неизвестной полевой функции по локальным переменным на канонической фигуре (здесь – это отображение (2.7)).

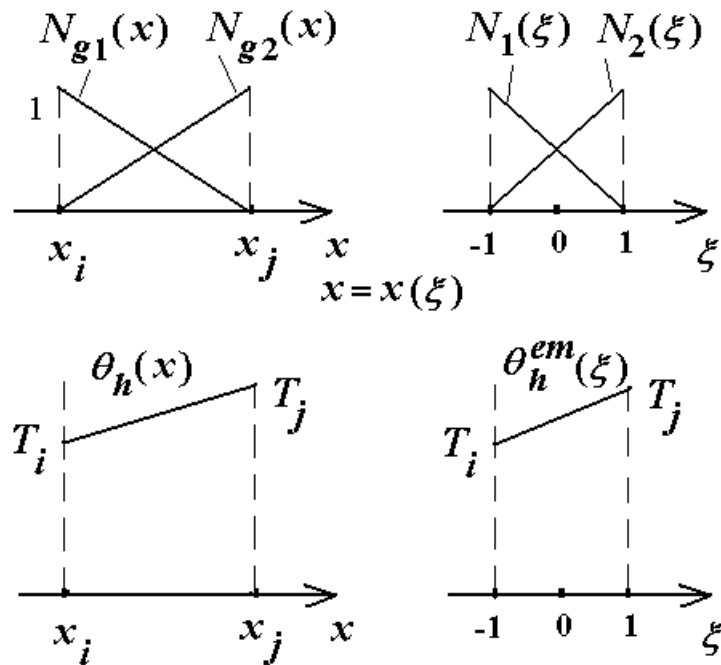


Рис. 2.1.

В результате в обоих случаях имеем лагранжеву линейную аппроксимацию (Рис. 2.1), поскольку, как легко видеть, константы аппроксимации T_i , T_j являются значениями аппроксимирующей функции в узловых точках: $\theta_h(x_i) = T_i$; $\theta_h(x_j) = T_j$; $\theta_h^{em}(-1) = T_i$; $\theta_h^{em}(1) = T_j$.

Для полноты описания конечного элемента необходима конкретизация его предметной области. Если согласно разделу 1.5 рассматривать слабую постановку (1.65), (1.66) одномерной стационарной задачи теплопроводности (1.61) на Ω^{em} , то, как было показано ранее, линейный лагранжев температурный конечный элемент приводит к элементному соотношению (1.87), (1.88). В (1.88) при постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и при постоянном коэффициенте теплопроводности $k = k_m$ на Ω^{em} элементная матрица теплопроводности \mathbf{K}^{em} имеет вид (1.85), а компоненты элементного вектора интенсивности тепловых источников $\mathbf{F}_b^{em} = \mathbf{F}_W^{em}$ даются формулой (1.86).

Суммируем основные свойства, определяющие конечные элементы, и в частности, рассмотренный температурный *линейный конечный элемент с двумя узлами*. Разделение свойств по классам проведем применительно к конечно-элементному пакету ANSYS, хотя аналогичные характеристики требуется задавать для определения конечных элементов и в других конечно-элементных программных комплексах.

В пакете ANSYS конечный элемент характеризуется:

- 1) своим уникальным номером с названием (LINK32, LINK33, PLANE35, PLANE55, PLANE77, SOLID70, SOLID87, SOLID90, SHELL57 и др.);
- 2) дополнительными ключевыми опциями (KEYOPT), определяющими специальные свойства (например, двумерная задача в декартовой системе координат или осесимметричная задача для плоских элементов, специальные опции вывода, и т.д.);
- 3) геометрической формой (стержни – LINK, базовые плоские фигуры – PLANE, базовые пространственные фигуры – SOLID, оболочки – SHELL, и т.д.);
- 4) количеством узлов и их координатами \mathbf{X}^{em} (определяется геометрической формой и принимаемой аппроксимацией);
- 5) параметрическим отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}$, связывающим выбранную базовую фигуру с каноническим объектом (каноническим отрезком, квадратом, треугольником и т.д.);
- 6) аппроксимацией неизвестной функции со своими узловыми степенями свободы \mathbf{T}^{em} (DOF – Degrees of Freedom) через функции формы или базис-

- ные функции $\mathbf{N}^{em*}(\boldsymbol{\xi})$ на канонической фигуре;
- 7) материальными свойствами (MP – Material Properties; например, коэффициент теплопроводности KXX);
 - 8) дополнительными геометрическими характеристиками и параметрами (R – Real Constants; например, площадь поперечного сечения AREA для стержневых элементов, толщина HEIGHT для балок, пластин и оболочек и т.д.);
 - 9) элементной системой координат (ESYS – Element coordinate system; например, стержень может располагаться в двумерном или в трехмерном пространстве, и тогда программа по координатам узлов сама может определить положение элементной системы координат; материальные свойства среды могут быть анизотропными и привязаны к локальным системам координат отдельных конечных элементов; и т.п.);
 - 10) возможными видами внешних воздействий (например, объемной плотностью мощности источников тепла $W = W_m$, тепловым потоком, конвективным теплообменом и т.д.).

Перечисленные выше входные данные (некоторые данные для ряда элементов могут не потребоваться) необходимы для работы процедур по формированию фигурирующих в элементных соотношениях типа (1.87), (1.134), элементных матриц и векторов, а также для дальнейшего ансамблирования элементных объектов в глобальные.

2.2. Одномерные лагранжевы конечные элементы высших порядков

Линейный одномерный лагранжев элемент, рассмотренный в предыдущем разделе, является самым простым конечным элементом, который можно использовать для решения одномерных задач стационарной теплопроводности. При применении элементов этого типа на всей конечно-элементной сетке в области $\Omega = [a, b]$ он дает кусочно-линейную аппроксимацию поля температур. Если по каким-либо причинам получаемое приближенное решение является не достаточно точным, то можно перейти к более мелкой сетке с меньшими размерами элементов, и, соответственно, с большим числом узлов. Как будет показано далее, при использовании конечных элементов с кусочно-полиномиальными функциями формы порядка p для стационарной одномерной задачи теплопроводности сходимость при-

ближенного решения θ_h к точному θ имеет оценку $\|\theta - \theta_h\|_V = O(h^p)$, где $h = \max_m h_m / \text{diam}(\Omega)$ – максимальная безразмерная длина среди всех конечных элементов, V – подходящее функциональное пространство, например, $V = \{\eta \in W_2^1(\Omega); \eta = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\theta\}$. Таким образом, для кусочно-линейных конечных элементов (при $p = 1$) имеем оценку погрешности $\|\theta - \theta_h\|_V = O(h)$, и $\|\theta - \theta_h\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Данная сходимость может оказаться медленной.

Другой проблемой является то, что для многих задач наиболее важными являются значения производных от приближенной функции. Так в задачах теплопроводности через производные от функции температуры определяются тепловые потоки, а в задачах структурного анализа через производные от перемещений выражаются деформации и напряжения. Известно, например, что при расчетах конструкции центральными являются вопросы прочности, связанные с ограничениями по максимальным напряжениям. Понятно, что производные находятся с большей погрешностью, чем сами полевые функции. Так при использовании линейных лагранжевых элементов, производные от аппроксимирующей функции будут уже кусочно-постоянными, причем они будут иметь разрывы в граничных узлах элементов. В этих случаях может оказаться желательным применение дополнительных процедур сглаживания при постпроцессорной обработке результатов расчета.

Таким образом, для достижения требуемой точности конечно-элементных расчетов можно при использовании одного и того же типа элементов степени p увеличивать их количество с уменьшением их максимального размера h . Но при этом скорость сходимости остается той же, порядка $O(h^p)$, и производные могут иметь достаточно большую погрешность, например, при $p = 1$.

Альтернативный путь для повышения точности состоит в выборе конечных элементов с полиномиальными аппроксимациями более высокого порядка p . Действительно, если $h \ll 1$, то $h^{p_1} > h^{p_2}$ при $p_1 < p_2$. Таким образом, квадратичный конечный элемент более точен, чем линейный; кубический более точен, чем квадратичный и т.д.

Рассмотрим вначале *одномерный квадратичный конечный элемент с тремя узлами*. Пусть данный конечный элемент Ω^{em} с номером m занимает область $x \in \Omega^{em} = [x_i, x_j]; x_i < x_j$. Для квадратичной лагранжевой интерполяции на Ω^{em} нужен дополнительный узел внутри элемента. Логично взять этим узлом x_l серединную точку отрезка: $x_l = x_{0m} = (x_i + x_j)/2$.

Отображение (2.1) или (2.2)–(2.4) ставит в соответствие узлу x_l узел $\xi = 0$ канонического отрезка $\xi \in [-1, 1]$. Таким образом, на каноническом отрезке можно выделить три узла, которые занумеруем следующим образом: $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$.

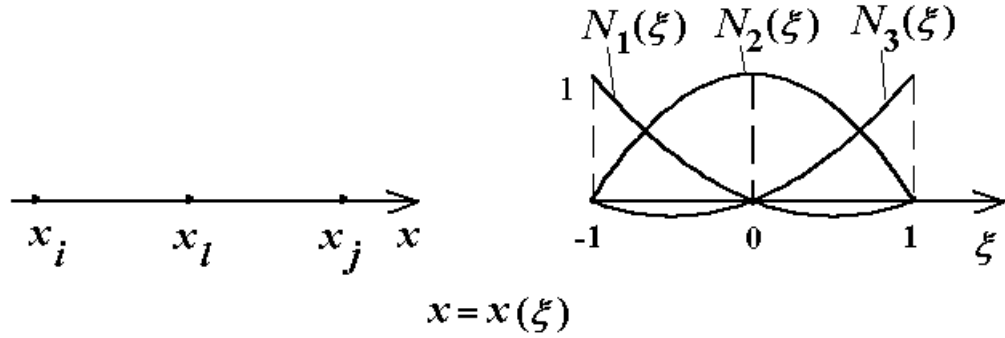


Рис. 2.2.

Введем в рассмотрение квадратичные функции формы $N_j(\xi)$, принимающие значение 1 в одном узле, и 0 – в остальных двух узлах (Рис. 2.2). Такие квадратичные полиномы на $[-1, 1]$ единственны и даются формулами:

$$N_1(\xi) = \xi(\xi - 1)/2; \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3(\xi) = \xi(\xi + 1)/2. \quad (2.11)$$

Отметим, что функции формы $N_s(\xi)$ можно представить в общей записи:

$$N_s(\xi) = \frac{(3\xi_s^2 - 2)}{2} [\xi_s^2(1 + \xi_s\xi) - (1 - \xi^2)], \quad s = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Тогда квадратичное представление функции θ_h на каноническом отрезке может быть записано в виде, аналогичном (2.7)

$$\theta_h^{em}(\xi) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.13)$$

но теперь

$$\mathbf{N}_\theta^{em*} = [N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi)]; \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_i, T_l, T_j\}, \quad (2.14)$$

и $N_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3$, даются формулами (2.11) или (2.12).

С учетом обратного к отображению (2.1) или к (2.2)–(2.4) параметрического представления (2.6), выражение (2.13) дает и квадратичную зависимость $\theta_h(x) = \theta_h^{em}(\xi(x))$ от физической переменной x .

Итак, соотношения (2.11)–(2.14), (2.6) определяют квадратичную лагранжеву интерполяцию поля температур θ_h .

Элементная матрица теплопроводности $\mathbf{K}^{em} = \mathbf{K}_k^{em}$ для квадратичного элемента имеет ту же форму (1.84)

$$K_{kpq}^{em} = \frac{2}{h_m} \int_{-1}^1 kA \frac{\partial N_p(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_q(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (2.15)$$

но здесь $p, q = 1, 2, 3$.

Вычисления интегралов (2.15) для N_p, N_q из (2.11) при постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и коэффициенте теплопроводности $k = k_m$ стержневого температурного элемента Ω^{em} дают следующую элементную матрицу теплопроводности (задача 2.3):

$$\mathbf{K}_k^{em} = \frac{k_m A_m}{3h_m} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

С использованием (2.11) из первого равенства (1.86) легко вычисляются и компоненты элементного вектора \mathbf{F}_W^{em} интенсивности тепловых источников при постоянных $A = A_m$ и $W = W_m$ (задача 2.3):

$$\mathbf{F}_W^{em} = \frac{A_m h_m W_m}{6} \{1, 4, 1\}. \quad (2.17)$$

Как можно проверить, и для квадратичной аппроксимации элементная матрица теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} вырождена: $\det \mathbf{K}_k^{em} = 0$. Важным свойством является и равенство $\sum_{p=1}^3 F_{Wp}^{em} = A_m h_m W_m$, что представляет собой произведение объема $A_m h_m$ стержневого элемента на объемную плотность W_m интенсивности источников тепла, т.е. суммарную интенсивность теплоты.

Отмеченные выше свойства являются общими. Неотрицательная определенность элементной матрицы теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} следует из отсутствия главных граничных условий при слабой постановке стационарной задачи теплопроводности для отдельного конечного элемента, а свойство $\sum_{p=1}^3 F_{Wp}^{em} = A_m h_m W_m$ вытекает из равенства $\sum_{p=1}^3 N_p(\xi) = 1$, необходимого для точного представления в пределах элемента постоянной функции $\theta_h = T_i = T_l = T_j = \text{const}$.

Аналогичным образом можно построить *кубический одномерный лагранжев конечный элемент*, а также элементы более высоких порядков. Остановимся только на кубическом элементе (Рис. 2.3). Примем четыре равноотстоящих друг от друга узла на каноническом отрезке $[-1, 1]$: $\xi_1 = -1$,

$\xi_2 = -1/3$, $\xi_3 = 1/3$, $\xi_4 = 1$. С данными узлами свяжем функции формы, которые легко получить из общего вида многочлена Лагранжа.

Как известно, интерполяционный многочлен Лагранжа степени n для функции f , задаваемый по узлам ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$, имеет вид [6, 20]

$$L_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\xi_i) \prod_{j \neq i; j=1,2,\dots,n+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \quad (2.18)$$

Для многочлена Лагранжа (2.18) его значение в узле ξ_s совпадает со значением функции f в этом узле: $L_n(\xi_s) = f(\xi_s)$. Если искать базисную функцию конечного элемента $N_s(\xi) = f(\xi)$ из условия, чтобы $N_s(\xi_k) = \delta_{ks}$, то представление (2.18) примет форму:

$$L_{ns}(\xi) = \prod_{j \neq s; j=1,2,\dots,n+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_s - \xi_j}. \quad (2.19)$$

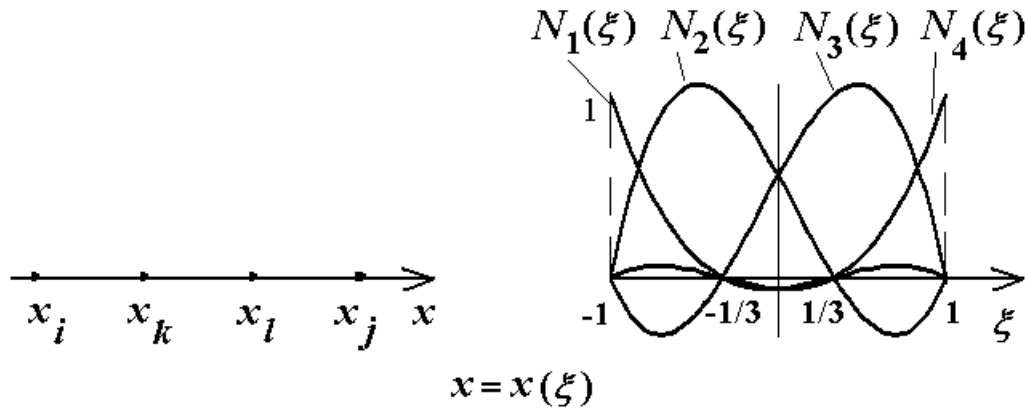


Рис. 2.3.

Функцию $N_s(\xi)$ можно отождествить с ее интерполяционным многочленом $N_s(\xi) = L_{ns}(\xi)$, что для $n = 3$ с учетом принятых значений узлов ξ_j дает:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -(9/16)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= (27/16)(\xi + 1)(\xi - 1/3)(\xi - 1), \\ N_3(\xi) &= -(27/16)(\xi + 1)(\xi + 1/3)(\xi - 1), \\ N_4(\xi) &= (9/16)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)(\xi + 1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Заметим, что функции формы (2.20) можно представить в единой записи ($\xi_1 = -1$, $\xi_2 = -1/3$, $\xi_3 = 1/3$, $\xi_4 = 1$):

$$N_s(\xi) = \frac{(\xi_s + \xi)(9\xi_s^2\xi^2 - 1)}{4\xi_s^3(9\xi_s^2 - 5)}, \quad s = 1, 2, 3, 4. \quad (2.21)$$

С использованием введенных функций формы кубическое представление функции θ_h на каноническом отрезке может быть записано в виде, аналогичном (2.7), (2.13)

$$\theta_h^{em}(\xi) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.22)$$

где

$$\mathbf{N}_\theta^{em*} = [N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)]; \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_i, T_k, T_l, T_j\}, \quad (2.23)$$

$N_s(\xi)$, $s = 1, 2, 3, 4$, даются формулами (2.20), а узлы ξ_s , $s = 1, 2, 3, 4$, с локальными номерами на каноническом отрезке соответствуют узлам i, k, l, j с координатами x_i, x_k, x_l, x_j , получаемыми при параметрическом преобразовании (2.1). Очевидно, что тогда точки x_k и x_l располагаются равномерно внутри отрезка $[x_i, x_j]$ на расстояниях $h_m/3 = (x_j - x_i)/3$ от крайних точек элемента x_i и x_j : $x_k = (2x_i + x_j)/3$, $x_l = (x_i + 2x_j)/3$.

С учетом обратного параметрического представления (2.6), выражение (2.22) дает кубическую зависимость $\theta_h(x) = \theta_h^{em}(\xi(x))$ от физической переменной x .

Итак, соотношения (2.20)–(2.23), (2.6) определяют кубическую лагранжеву интерполяцию поля температур θ_h .

Вычисления интегралов (2.15) для N_p, N_q из (2.20), $p, q = 1, 2, 3, 4$, при постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и коэффициенте теплопроводности $k = k_m$ стержневого температурного элемента Ω^{em} достаточно громоздки, и в результате дают следующую элементную матрицу теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} размера 4×4 (задача 2.6):

$$\mathbf{K}_k^{em} = \frac{k_m A_m}{h_m} \begin{bmatrix} \frac{37}{10} & -\frac{189}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{13}{40} \\ \frac{189}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{297}{40} & \frac{27}{20} \\ \frac{27}{20} & -\frac{297}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} \\ \frac{20}{13} & \frac{40}{27} & \frac{5}{189} & \frac{40}{37} \\ -\frac{40}{40} & \frac{20}{20} & -\frac{40}{40} & \frac{10}{10} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Наконец, из первого равенства (1.86) и (2.20) можно вычислить компоненты элементного вектора \mathbf{F}_W^{em} интенсивности тепловых источников при постоянных $A = A_m$ и $W = W_m = \text{const}$ для кубического лагранжева элемента (задача 2.6):

$$\mathbf{F}_W^{em} = \frac{A_m h_m W_m}{8} \{1, 3, 3, 1\}. \quad (2.25)$$

В результате одномерный кубический лагранжев конечный элемент для одномерной стационарной задачи теплопроводности при постоянных $A = A_m$, $k = k_m$ и $W = W_m$ на элементе определяется формулами (2.20)–(2.23), (2.6), (2.24), (2.25). При этом формулы (2.20)–(2.23), (2.6) являются общими для всех одномерных кубических лагранжевых конечных элементов в форме прямолинейных отрезков с одной неизвестной полевой функцией безотносительно к типу задачи, а формулы (2.24), (2.25) – частные, и относятся именно к стационарной задаче для теплопроводного стержня при постоянных на элементе площади поперечного сечения $A = A_m$, коэффициенте теплопроводности $k = k_m$ и функции интенсивности теплового источника $W(x) = W_m = \text{const}$.

Как видно, применение конечных элементов высокого порядка приводит к более громоздким вычислениям для элементных объектов. Между тем, конечные элементы более высоких порядков имеют лучшие аппроксимационные свойства по сравнению с элементами низких порядков. Поскольку для двумерных и трехмерных задач явные формулы для элементов высоких порядков чрезвычайно громоздки, а сами элементы имеют достаточно сложную структуру, то необходим компромисс между простотой элемента и генерируемых для него объектов и точностью вычислений. В связи с этим, среди элементов классического лагранжева типа наибольшее распространение получили элементы с линейной, квадратичной и кубической полиномиальными аппроксимациями по каждой из пространственных элементов.

2.3. Погрешности конечно-элементных аппроксимаций для одномерных элементов. h - и p -сходимости

Одними из важнейших моментов при применении приближенных методов являются вопросы сходимости приближенных решений к точным и получение оценок для скорости сходимости.

В рассмотренных ранее схемах МКЭ такой проблемой является определение оценки нормы $\|\theta(x) - \theta_h(x)\|_a$ или $\|\theta(x) - \theta_h(x)\|_V$, где θ – точное решение (эти нормы согласно разделам 1.2, 1.3 эквивалентны). Основным инструментом для получения оценок сходимости является теорема 1.4 из раздела 1.3, устанавливающая наилучшие аппроксимационные свойства конечно-элементного решения как приближения Рунге. Как отмечалось в

разделе 1.4, если вместо функции $\theta_h(x)$ взять функцию $\theta_I(x)$, являющуюся кусочно-полиномиальным интерполянтном точного решения $\theta(x)$ на сетке с узлами x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. $\theta_I(x_j) = \theta(x_j)$ для всех j , $\theta_I(x)$ – полином соответствующей степени на каждом конечном элементе Ω^{em}), то в силу теоремы 1.4

$$\|\theta - \theta_h\|_a \leq \|\theta - \theta_I\|_a. \quad (2.26)$$

В связи с этим, для получения оценки нормы $\|\theta(x) - \theta_h(x)\|_a$ достаточно оценить погрешность $\|\theta_I(x) - \theta_h(x)\|_a$ между точным решением с некоторыми наперед предполагаемыми свойствами и его кусочно-полиномиальным интерполянтном, а затем использовать неравенство (2.26).

В данном разделе будут проведены соответствующие оценки [30] для одномерной стационарной задачи теплопроводности из раздела 1.5.

Первоначально докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Если $\theta(x) \in C^2[a, b]$, и $\exists M_2 = \max_{[a, b]} |\theta''(x)|$, то*

$$|\theta(x)| \leq \max\{\theta(a), \theta(b)\} + \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2, \quad (2.27)$$

$$|\theta'(x)| \leq \frac{|\theta(b) - \theta(a)|}{b - a} + M_2 (b - a). \quad (2.28)$$

◀ Доказательство леммы следующее. Пусть

$$L_1(x) = \theta(a) \frac{b - x}{b - a} + \theta(b) \frac{x - a}{b - a}$$

– интерполяционный многочлен Лагранжа функции $\theta(x)$, $x \in [a, b]$.

Тогда функцию $\theta(x)$ можно представить в виде

$$\theta(x) = L_1(x) + \eta(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.29)$$

где $\eta(x)$ – остаточный член формулы Лагранжа, для которого имеем представление

$$\eta(x) = \frac{\theta''(\xi)}{2} (x - a)(x - b), \quad \xi = \xi(x) \in [a, b].$$

Очевидно, что поскольку $L_1(x)$ – линейная функция, принимающая значения, находящиеся между $\theta(a)$ и $\theta(b)$, то

$$L_1(x) \leq \max\{\theta(a), \theta(b)\}. \quad (2.30)$$

Кроме того, поскольку для квадратичной функции $(x - a)(x - b)$ максимум на $[a, b]$ равен $(b - a)^2/4$ (и достигается при $x = (a + b)/2$), то

$$|\eta(x)| \leq \frac{M_2}{8}(b - a)^2 \quad (2.31)$$

Из (2.29)–(2.31) получаем первую оценку (2.27) леммы.

Для функции $\eta(x)$ остаточного члена формулы Лагранжа очевидно имеем: $\eta(a) = \eta(b) = 0$ и $|\eta''(x)| \leq M_2$. Тогда по теореме Ролля из курса математического анализа $\exists \xi_1 \in [a, b]: \eta'(\xi_1) = 0$. Согласно формуле конечных приращений можно записать

$$\eta'(x) = \eta'(\xi_1) + \eta''(\xi_2)(x - \xi_1), \quad \xi_2 = \xi_1 + \zeta(x - \xi_1), \quad \zeta \in [0, 1],$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \eta'(x) &= \eta''(\xi_2)(x - \xi_1), \\ |\eta'(x)| &\leq M_2(b - a). \end{aligned}$$

Тогда, оценивая производную от (2.29), получаем

$$|\theta'(x)| \leq |L_1'(x)| + |\eta'(x)| \leq \frac{|\theta(b) - \theta(a)|}{b - a} + M_2(b - a),$$

т.е. доказана и оценка (2.28) леммы. ►

Перейдем теперь к выводу оценки для нормы погрешности решения одномерной задачи теплопроводности при использовании линейных лагранжевых конечных элементов. В качестве $\theta_I(x)$ возьмем линейный интерполант функции $\theta(x)$.

Обозначим $w(x) = \theta(x) - \theta_I(x)$. Заметим, что $w(x_l) = 0$ для всех узлов x_l конечно-элементной сетки, так как $\theta_I(x)$ – интерполант функции $\theta(x)$, построенный по узлам x_l .

Для одномерной задачи теплопроводности из раздела 1.5 можно записать

$$\|w\|_a^2 = \|\theta - \theta_h\|_a^2 = \int_a^b kA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \sum_m \int_{\Omega^{em}} kA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.32)$$

Если точное решение $\theta(x)$ на $[a, b]$ существует в классическом смысле, то $\theta(x) \in C^2[a, b]$ и $\exists M_2 = \max_{[a, b]} |\theta''(x)|$. Тогда, так как для кусочно-линейной функции $\theta_I(x)$ на каждом конечном элементе $\theta_I''(x) = 0$, то

$$|w''| = |\theta'' - \theta_I''| \leq M_2.$$

Итак, при принятых предположениях для функции w'' выполнены условия леммы 2.1. Кроме того, поскольку $w(x_l) = 0$ для всех узлов, то оценка (2.28) для каждого конечного элемента Ω^{em} длины h_m принимает вид

$$|w'| \leq M_2 h_m, \quad x \in \Omega^{em}.$$

Тогда, с учетом того, что $\sum_m h_m = (b - a)$, можно записать цепочку равенств

$$\|w\|_a^2 \leq \sum_m M_2^2 h_m^2 \int_{\Omega^{em}} kA \, dx \leq \sum_m M_2^2 \max_{[a,b]}(kA) h_m^3 \leq M_2^2 \max_{[a,b]}(kA) (b-a) h^2,$$

где $h = \max_m h_m$ – максимальная длина конечных элементов Ω^{em} .

В результате, таким образом, получено

$$\|w\|_a = \|\theta - \theta_I\|_a \leq M_2 C_a h,$$

где $C_a^2 = \max_{[a,b]}(kA)(b - a)$.

Поскольку нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_V$ эквивалентны, то имеет место и оценка

$$\|\theta - \theta_I\|_V \leq M_2 C_1 h,$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от h и отличающаяся от C_a только сомножителем.

Найденные оценки с учетом (2.26) доказывают следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть функция $\theta \in V$ является решением одномерной стационарной задачи теплопроводности и имеет ограниченную вторую производную на $[a, b]$, т.е. $\exists M_2 = \max_{[a,b]} |\theta''(x)|$. Пусть также θ_h является приближенным решением данной задачи, полученным по МКЭ с использованием линейных конечных элементов. Тогда справедлива оценка*

$$\|\theta - \theta_h\|_V \leq M_2 C_1 h, \tag{2.33}$$

где константа C_1 не зависит от h ; $h = \max_m h_m$ – максимальная длина среди всех конечных элементов Ω^{em} .

Для приближенных решений, полученных по МКЭ с использованием лагранжевых элементов более высокого порядка, аналогичным (но более громоздким) образом можно доказать теорему, обобщающую теорему 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть функция $\theta \in V$ является решением одномерной стационарной задачи теплопроводности и имеет ограниченную производную порядка $p + 1$ на $[a, b]$, т.е. $\exists M_{p+1} = \max_{[a,b]} |\theta^{(p+1)}(x)|$. Пусть также θ_h является приближенным решением данной задачи, полученным по*

МКЭ с использованием лагранжеских конечных элементов Ω^{em} порядка p ; $h = \max_m h_m$. Тогда справедлива оценка

$$\|\theta - \theta_h\|_V \leq M_{p+1} C_p h^p, \quad (2.34)$$

где константа C_p не зависит от h .

Теорема 2.2 показывает, что при использовании элементов порядка p имеет место сходимость приближенного конечно-элементного решения к точному порядку $O(h^p)$.

Таким образом, как уже отмечалось ранее в начале п. 2.2, для достижения лучшей точности можно, выбирая элементы одного и того же порядка, использовать все более мелкие конечно-элементные сетки, уменьшая величину h . В этом случае говорят об *h-сходимости*.

Другой способ получения более точного конечно-элементного решения состоит в переходе к элементам более высокого порядка p . В данном случае имеет место так называемая *p-сходимость*.

Возникает вопрос, какая из этих двух сходимостей быстрее. Сравнение решений, полученных при конечно-элементных аппроксимациях различного порядка p , логично проводить при одинаковом числе узлов. Действительно, число узлов определяет порядок СЛАУ МКЭ, а, следовательно, трудоемкость решения СЛАУ. Как показывают результаты многочисленных расчетов, *p-сходимость* выше, чем *h-сходимость*. Например, использование двух одномерных кубических лагранжеских элементов даст более точное решение, чем использование трех квадратичных элементов; а использование трех квадратичных элементов в свою очередь дает более точное решение, чем использование шести линейных элементов. При этом во всех этих случаях имеется 7 узлов в конечно-элементных сетках, т.е. размерности СЛАУ МКЭ одинаковы.

Однако, трудоемкость формирования конечно-элементных объектов возрастает при применении элементов более высокого порядка. Кроме того, для неоднородных задач, когда физические свойства среды изменяются по пространственным координатам, или для задач со сложными границами требуются конечные элементы малой длины. Таким образом, необходим разумный компромисс между выбором порядка конечных элементов и густотой конечно-элементной сетки. Как отмечалось в п. 2.2, на практике наиболее популярны конечные элементы с многочленами первой, второй и третьей степеней по отдельным пространственным координатам.

2.4. Изопараметрические, субпараметрические и суперпараметрические элементы

Как было видно, рассмотренные элементы с точки зрения аппроксимации характеризовались:

- своей геометрической формой $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$, например, отрезком $[x_i, x_j]$;
- параметрическим отображением

$$x = x(\xi) = \mathbf{N}_x^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.35)$$

связывающим область $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с канонической фигурой Ω_ξ^{em} , например, с отрезком $[-1, 1]$;

- лагранжевой полиномиальной аппроксимацией

$$\theta_h^{em}(\xi) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.36)$$

заданной на канонической фигуре, например, на отрезке $[-1, 1]$.

При этом для лагранжевых конечных элементов из пп. 2.1, 2.2 переход (2.35) от области $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ к канонической фигуре Ω_ξ^{em} был в принципе не обязательным. Причина состояла в том, что при выборе (2.35) в виде линейного отображения (2.2) – (2.4) или (2.1) обратное отображение $\xi = \xi(x)$ вида (2.6) было также линейно и обеспечивало лагранжеву аппроксимацию (2.36), как полиномиальную аппроксимацию от физической переменной x . Таким образом, для рассмотренных элементов можно было сразу задавать лагранжеву полиномиальную аппроксимацию вида

$$\theta_h(x) = \theta_h^{em}(\xi(x)) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi(x)) \cdot \mathbf{T}^{em} = \mathbf{N}_g^{em*}(x) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.37)$$

где $\mathbf{N}_g^{em*}(x)$ – вектор-строка базисных функций $N_{gl}(x)$. Базисные функции $N_{gl}(x)$ можно считать обычными функциями формы МКЭ: они являлись полиномами на Ω^{em} той же степени, что и функции из $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi)$; а также принимали значение "1" в одном узле $x = x_l$, и значение "0" – в остальных узлах элемента Ω^{em} . Здесь под узлами элемента понимаются точки $x = x_l$, в которые при параметрическом отображении $x = x(\xi)$ переходят узлы ξ_k канонической фигуры, связанные с аппроксимацией (2.35). Поскольку для элементов из пп. 2.1, 2.2 узлы ξ_k выбирались равноотстоящими друг от друга на каноническом отрезке, то и узлы $x = x_l$ будут равноотстоять друг от друга, но на элементе Ω^{em} .

Между тем, для параметрического отображения (2.35) можно выбрать свои собственные узлы и полиномиальные аппроксимации различных по-

рядков, вообще говоря, не связанные с аппроксимациями (2.36) полевой функции на канонической фигуре.

Так, можно рассматривать следующие типы узлов:

- узлы конечного элемента $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с координатами \mathbf{x} , содержащимися в векторе \mathbf{X}^{em} ;
- узлы на канонической фигуре Ω_ξ^{em} , используемые для определения базисных функций параметрического отображения в $\mathbf{N}_x^{em*}(\xi)$;
- узлы на канонической фигуре Ω_ξ^{em} , используемые для определения базисных функций аппроксимации полевой функции в $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi)$.

Отметим, что четвертый набор узлов – набор узлов конечного элемента Ω_x^{em} с координатами x_l , для которых задаются узловые температуры в векторе \mathbf{T}^{em} , полностью определяется перечисленными выше тремя наборами узлов. Действительно, зная координаты узлов на канонической фигуре, используемых для определения базисных функций $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi)$ в аппроксимации θ_h , и учитывая параметрическое отображение (2.35), можно однозначно восстановить координаты x_l для узловых температур.

При такой стратегии независимого выбора узлов в параметрическом отображении (2.35) и в аппроксимации (2.36) допустимо множество различных вариантов, причем узлы не обязательно должны равноотстоять друг от друга. Нужно однако удовлетворить обязательное требование о взаимной однозначности параметрического отображения (2.35).

Классификация основных возможных случаев базируется на следующей терминологии:

- если наборы узлов и базисные функции в параметрическом отображении (2.35) и в аппроксимации (2.36) одинаковы, то такие конечные элементы называются *изопараметрическими*;
- если в параметрическом отображении (2.35) используются базисные функции низших порядков и меньшее число узлов по сравнению с аппроксимацией (2.36) полевых функций, то такие конечные элементы называются *субпараметрическими*;
- наконец, если в параметрическом отображении (2.35) используются базисные функции высших порядков и большее число узлов по сравнению с аппроксимацией (2.36) полевых функций, то такие конечные элементы называются *суперпараметрическими*.

Рассмотрим некоторые примеры.

Выделим для элемента $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$ узлы $x_i^{(p)} = x_i$; $x_j^{(p)} = x_j$; $x_l^{(p)} = x_l$, где $x_i^{(p)} < x_l^{(p)} < x_j^{(p)}$, а верхний индекс "(p)" обозначает принадлежность

узлов к параметрического отображению $x = x(\xi)$. На каноническом отрезке $\xi \in [-1, 1]$ зададим узлы $\xi_1 = -1$; $\xi_2 = 0$; $\xi_3 = 1$.

Параметрическое отображение $x = x(\xi)$ (2.35) запишем формально в том же виде:

$$x = x(\xi) = \mathbf{N}_x^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.38)$$

где теперь

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\xi) = [N_1^{(p)}(\xi), N_2^{(p)}(\xi), N_3^{(p)}(\xi)]; \quad \mathbf{X}^{em} = \{x_i^{(p)}, x_l^{(p)}, x_j^{(p)}\}, \quad (2.39)$$

$$N_1^{(p)}(\xi) = \xi(\xi - 1)/2; \quad N_2^{(p)}(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_3^{(p)}(\xi) = \xi(\xi + 1)/2, \quad (2.40)$$

т.е. $N_s^{(p)}(\xi)$ в (2.40) – обычные квадратичные функции формы, встречавшиеся ранее в (2.11).

Очевидно, что при отображении (2.38) – (2.40) узел $\xi_1 = -1$ переводится в узел $x_i^{(p)}$; узел $\xi_2 = 0$ – в узел $x_l^{(p)}$; а узел $\xi_3 = 1$ – в узел $x_j^{(p)}$.

Необходимо проверить, что отображение (2.38) – (2.40) является взаимно-однозначным. Вычисляя якобиан преобразования (2.38) – (2.40), имеем:

$$\partial x / \partial \xi = (x_j^{(p)} - x_i^{(p)})/2 + (x_j^{(p)} + x_i^{(p)} - 2x_l^{(p)})\xi. \quad (2.41)$$

Как видно, производная $\partial x / \partial \xi$ в (2.41) является линейной функцией. Поэтому, чтобы якобиан преобразования (2.38) – (2.40) не обращался в нуль на отрезке $[-1, 1]$ нужно, чтобы значения функции $\partial x / \partial \xi$ при $\xi = -1$ и при $\xi = 1$ были бы одного знака, т.е. необходимо выполнение неравенства

$$(\partial x / \partial \xi)|_{\xi=-1} (\partial x / \partial \xi)|_{\xi=1} > 0. \quad (2.42)$$

Тогда, из (2.41), (2.42) получаем условие

$$\left(\frac{x_i^{(p)} + 3x_j^{(p)}}{4} - x_l^{(p)} \right) \left(\frac{3x_i^{(p)} + x_j^{(p)}}{4} - x_l^{(p)} \right) < 0.$$

Данное неравенство эквивалентно следующим двум ($x_i = x_i^{(p)}$, $x_j = x_j^{(p)}$):

$$\frac{x_j - x_i}{4} < x_l^{(p)} - x_i; \quad \frac{x_j - x_i}{4} < x_j - x_l^{(p)}. \quad (2.43)$$

Таким образом, для взаимной однозначности параметрического отображения (2.38) – (2.40) необходимо, чтобы внутренний узел $x_l^{(p)}$ отстоял от границ x_i и x_j отрезка $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$ более, чем на четверть его длины.

Случаи допустимой и недопустимой ситуаций для отображения (2.38) – (2.40) показаны на рис. 2.4 и 2.5, соответственно. Как видно, в случае,

показанном на рис. 2.5, обратное отображение $\xi = \xi(x)$ не является однозначным в точке x_i и переводит отрезок $[x_i, x_j]$ взаимно однозначно лишь на меньшей отрезок, чем $[-1, 1]$.

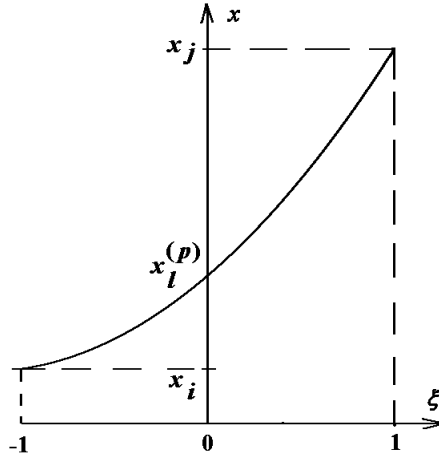


Рис. 2.4.

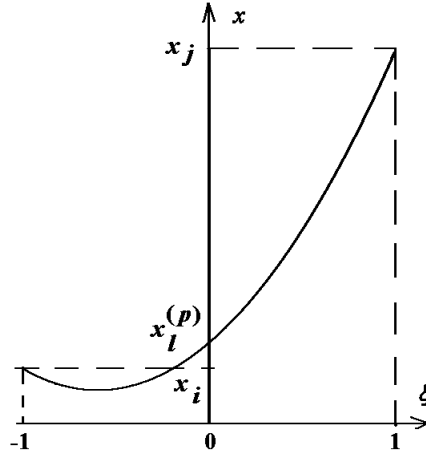


Рис. 2.5.

Итак, отображение (2.38) – (2.40) допустимо не всегда, и требуется проверить взаимную однозначность данного отображения.

Интересно посмотреть, что происходит с отображением (2.38) – (2.40) в случае, когда узел $x_l^{(p)}$ является серединой точки отрезка $[x_i, x_j]$.

Отображение (2.38) – (2.40), записанное в виде явного полинома от ξ , имеет вид:

$$x = x_l^{(p)} + \frac{x_j - x_i}{2}\xi + \left(\frac{x_j + x_i}{2} - x_l^{(p)}\right)\xi^2. \quad (2.44)$$

Поэтому при $x_l^{(p)} = (x_j + x_i)/2$ слагаемое с ξ^2 в (2.44) обращается в нуль, и имеем:

$$x = \frac{x_j + x_i}{2} + \frac{x_j - x_i}{2}\xi = \frac{1 - \xi}{2}x_i + \frac{1 + \xi}{2}x_j, \quad (2.45)$$

что совпадает с линейным отображением (2.1) или (2.2) – (2.4) отрезка $[-1, 1]$ в отрезок $\Omega^{em} = [x_i, x_j]$.

Итак, квадратичное отображение (2.38) – (2.40) вырождается в линейное (2.2) – (2.4) в наиболее естественном случае, когда узел $x_l^{(p)}$ находится посередине отрезка $[x_i, x_j]$.

Если же рассматривать общую ситуацию квадратичного отображения (2.38) – (2.40) с узлом $x_l^{(p)}$, удовлетворяющим условию (2.43), то можно построить разнообразные типы конечных элементов.

Например, при линейной аппроксимации поля температур θ_h по (2.7), (2.8), (2.3) имеем суперпараметрический конечный элемент. Если для поля температур θ_h принять кубическую аппроксимацию (2.20) – (2.23), то будем иметь субпараметрический конечный элемент. Если же для функции θ_h принять квадратичную аппроксимацию, аналогичную выбранному квадратичному параметрическому отображению, то получаем изопараметрический конечный элемент.

Отметим, что введенная терминология несколько условна. Поскольку квадратичная аппроксимация (2.38) – (2.40) для узла $x_i^{(p)} = (x_j + x_i)/2$ вырождается в линейную, то изопараметрический элемент может стать субпараметрическим и т.п.

Другим примером усложненных конечных элементов являются элементы с кубическим параметрическим отображением (2.38), когда

$$\mathbf{N}_\theta^{em*}(\xi) = [N_1^{(p)}, N_2^{(p)}, N_3^{(p)}, N_4^{(p)}]; \quad \mathbf{X}^{em} = \{x_i^{(p)}, x_k^{(p)}, x_l^{(p)}, x_j^{(p)}\}, \quad (2.46)$$

$$x_i^{(p)} = x_i, \quad x_k^{(p)} = -c_0, \quad x_l^{(p)} = c_0, \quad x_j^{(p)} = x_j, \quad 0 < c_0 < x_j, \quad (2.47)$$

а $N_s^{(p)} = N_s^{(p)}(\xi)$ – функции формы, совпадающие с определенными ранее в (2.20).

Можно также использовать и функции формы, построенные как кубические полиномы Лагранжа по узлам $\xi = \{-1, -c_0, c_0, 1\}$:

$$N_1^{(p)} = -\frac{1}{2(1-c_0^2)}(\xi^2 - c_0^2)(\xi - 1), \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{2c_0(1-c_0^2)}(\xi^2 - 1)(\xi - c_0), \quad (2.48)$$

$$N_3^{(p)} = -\frac{1}{2c_0(1-c_0^2)}(\xi^2 - 1)(\xi + c_0), \quad N_4^{(p)} = \frac{1}{2(1-c_0^2)}(\xi^2 - c_0^2)(\xi + 1). \quad (2.49)$$

Заметим, что функции формы (2.48), (2.49) можно представить в единой записи ($\xi_1 = -1, \xi_2 = -c_0, \xi_3 = c_0, \xi_4 = 1$):

$$N_s(\xi) = \frac{(\xi_s + \xi)(\xi_s^2 \xi^2 - c_0^2)}{2\xi_s^3(2\xi_s^2 - 1 - c_0^2)}, \quad s = 1, 2, 3, 4. \quad (2.50)$$

Данные функции принимают обычный вид (2.20) или (2.21) при $c_0 = 1/3$, но иногда используются и при значении $c_0 = 1/\sqrt{5}$, совпадающем с узлом интегрирования одной из квадратурных формул (формула Гаусса–Лобатто или формула Маркова с четырьмя узлами).

Все эти случаи кажутся экзотическими для одномерных прямолинейных конечных элементов, так как формулы для получающихся элементов

становятся значительно более громоздкими. Здесь, помимо усложнения вида параметрического отображения, надо еще учесть, что выражения для вычислений коэффициентов элементных матриц теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} и вектора \mathbf{F}_W^{em} также усложняются:

$$K_{kpq}^{em} = \int_{-1}^1 kA \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^{-1} \frac{\partial N_p(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial N_q(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (2.51)$$

$$F_{Wp}^{em} = \int_{-1}^1 AW N_p(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.52)$$

Например, для якобиана $\partial x / \partial \xi$ из (2.41) видно, что интеграл в (2.51) будет иметь линейную функцию в знаменателе, что существенно затруднит его вычисление.

Тем не менее, для одномерных задач изопараметрические и суперпараметрические элементы находят свое применение для криволинейных по пространственным переменным конечных элементов (труб, искривленных стержней и т.п.), когда геометрию элемента можно аппроксимировать параметрическими отображениями с квадратичными и кубическими функциями формы для $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$ с канонической координатой ξ , а полевую функцию, например, θ_h сразу задавать на каноническом отрезке $\xi \in [-1, 1]$. Здесь логично использование параметрических аппроксимаций высоких порядков для сильно искривленных элементов, а для описания поля $\theta_h(\xi)$ можно принимать и аппроксимации более низких порядков. Истинные же преимущества изопараметрической техники будут видны в дальнейшем при рассмотрении двумерных и трехмерных задач.

2.5. Двумерные четырехугольные лагранжевы конечные элементы

Для решения плоских задач по методу конечных элементов необходимы соответствующие двумерные конечные элементы. Наиболее простыми фигурами на плоскости, на которых можно задавать полиномиальные аппроксимации, являются треугольники и четырехугольники. Четырехугольник при этом отличается тем, что для него базисные функции на плоскости могут быть построены простым произведением базисных функций одномерных конечных элементов. По этой причине вначале будут рассмотрены базовые четырехугольные элементы.

2.5.1. Четырехугольный лагранжев конечный элемент с четырьмя узлами

Рассмотрим выпуклый четырехугольник на плоскости Oxy с вершинами с номерами i, j, k, l , расположенными в порядке обхода против часовой стрелки (Рис. 2.6).

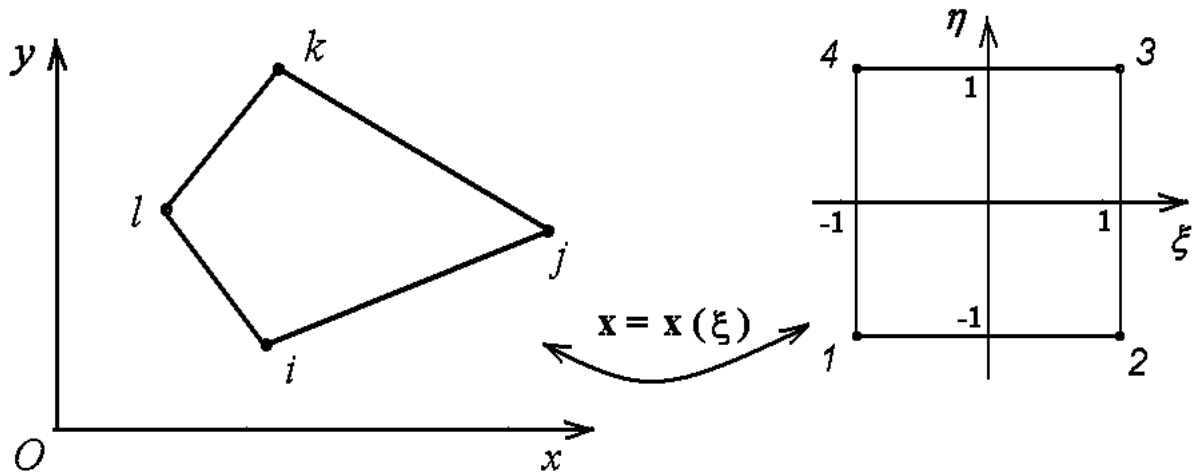


Рис. 2.6.

Номера вершин четырехугольника совпадают с номерами узлов некоторой конечно-элементной сетки $\Omega_h = \cup_m \Omega^{em}$, причем рассматриваемый четырехугольник является подобластью (конечным элементом) $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с некоторым номером m . Каждый узел имеет координаты на плоскости: $x_{i1} = x_i, x_{i2} = y_i$, и т.д. В итоге можно построить вектор-столбец координат узловых точек элемента \mathbf{X}^{em}

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l\}. \quad (2.53)$$

В соответствии с общей идеологией важной задачей является построение параметрического отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta\}$, а точнее, обратного и нему $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{x})$, переводящего четырехугольник $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ в канонический квадрат $(\xi, \eta) \in \Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ на плоскости $\xi\eta$.

Прежде чем решать эту задачу, зададимся проблемой интерполяции аппроксимирующей функции θ_h на каноническом квадрате. Итак, требуется построить полиномиальное представление функции $\theta_h = \theta_h^{em}(\xi, \eta)$ через вектор-строку $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi})$ функций формы и вектор-столбец \mathbf{T}^{em} узловых температур

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = [N_1, N_2, N_3, N_4], \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_i, T_j, T_k, T_l\}, \quad (2.55)$$

где $N_s = N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta)$ – функции формы на каноническом квадрате с локальной нумерацией узлов ($s = 1, 2, 3, 4$), T_p – узловые температуры при глобальной нумерации узлов ($p = i, j, k, l$).

Здесь предполагается, что отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ будет переводить узел $\boldsymbol{\xi}_1 = \{-1, -1\}$ канонического квадрата в узел $\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i\}$ исходного четырехугольника, узел $\boldsymbol{\xi}_2 = \{1, -1\}$ – в узел $\mathbf{x}_j = \{x_j, y_j\}$, узел $\boldsymbol{\xi}_3 = \{1, 1\}$ – в узел $\mathbf{x}_k = \{x_k, y_k\}$, а узел $\boldsymbol{\xi}_4 = \{-1, 1\}$ – в узел $\mathbf{x}_l = \{x_l, y_l\}$.

Отметим, что для канонического квадрата Ω_ξ^{em} удобно использовать локальную нумерацию узлов, а для четырехугольника Ω_x^{em} на физической плоскости Oxy – глобальную нумерацию.

Как обычно, желательно, чтобы функции формы были бы полиномами как можно меньшей степени, и чтобы функции формы принимали значение единица в соответствующем узле, связанном с данной функцией, и нуль – во всех остальных узлах элемента, т.е. чтобы выполнялось условие $N_s(\boldsymbol{\xi}_q) = \delta_{sq}$; $s, q = 1, 2, 3, 4$. Легко заметить, что данным условиям удовлетворяют произведения функций формы одномерного линейного лагранжева конечного элемента по ξ и по η , т.е. попарные произведения функций $(1 - \xi)/2$, $(1 + \xi)/2$ и $(1 - \eta)/2$, $(1 + \eta)/2$. Таким образом, требуемый набор функций формы дается формулами:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Используя иное представление (2.5) функций формы одномерного линейного элемента, (2.56) можно также представить в виде

$$N_s(\boldsymbol{\xi}) = (1 + \xi_s \xi)(1 + \eta_s \eta)/4, \quad s = 1, 2, 3, 4, \quad (2.57)$$

где $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\eta_2 = -1$, $\xi_3 = 1$, $\eta_3 = 1$, $\xi_4 = -1$, $\eta_4 = 1$ – координаты узлов $\boldsymbol{\xi}_s$.

Данные функции являются линейными отдельно по переменным ξ и по η , а, следовательно, – билинейными функциями. В структуре аппроксимирующего многочлена в (2.54)–(2.56) имеются члены нулевого порядка, первого – по ξ и по η , но среди квадратичных членов имеется только произведение $\xi\eta$. Таким образом, представление (2.54)–(2.56) содержит полный линейный полином по ξ и η , а также один из элементов квадратичной полиномиальной аппроксимации. Полную квадратичную аппроксимацию выражения (2.54)–(2.56) в совокупности не дают.

Теперь можно перейти к задаче поиска параметрического отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$. По аналогии с изложенным ранее для одномерных элементов, можно предположить, что искомое отображение определяется в виде

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta)x_i + N_2(\xi, \eta)x_j + N_3(\xi, \eta)x_k + N_4(\xi, \eta)x_l, \\ y(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta)y_i + N_2(\xi, \eta)y_j + N_3(\xi, \eta)y_k + N_4(\xi, \eta)y_l. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Чтобы данное отображение связывало четырехугольник Ω^{em} и канонический квадрат необходимым образом, требуется, чтобы отображение (2.58) переводило вершины одной фигуры в вершины другой фигуры, стороны переводило в соответствующие стороны и было взаимно-однозначным соответствием для множеств внутренностей этих двух фигур.

В силу условия $N_s(\boldsymbol{\xi}_q) = \delta_{sq}$, $s, q = 1, 2, 3, 4$, очевидно, что по (2.58) выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} x(\xi_1, \eta_1) &= x(-1, -1) = x_i, & y(\xi_1, \eta_1) &= y(-1, -1) = y_i, \\ x(\xi_2, \eta_2) &= x(1, -1) = x_j, & y(\xi_2, \eta_2) &= y(1, -1) = y_j, \\ x(\xi_3, \eta_3) &= x(1, 1) = x_k, & y(\xi_3, \eta_3) &= y(1, 1) = y_k, \\ x(\xi_4, \eta_4) &= x(-1, 1) = x_l, & y(\xi_4, \eta_4) &= y(-1, 1) = y_l, \end{aligned} \quad (2.59)$$

т.е. вершины канонического квадрата переходят в вершины исходного четырехугольника.

Проверим, что сторона $\eta = -1$, связывающая вершины 1 и 2 канонического квадрата, переводится в сторону, связывающую вершины i и j четырехугольника $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$. При $\eta = -1$ из (2.56) имеем:

$$N_1(\xi, -1) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi, -1) = \frac{1 + \xi}{2}, \quad N_3(\xi, -1) = N_4(\xi, -1) = 0. \quad (2.60)$$

Из (2.60) видно, что базисные функции $N_1(\xi, \eta)$ и $N_2(\xi, \eta)$ при $\eta = -1$ становятся функциями формы (2.3) одномерного линейного лагранжева элемента по ξ .

Подставляя (2.60) в (2.58), при $\eta = -1$ получаем

$$\begin{aligned} x(\xi, -1) &= (1 - \xi/2)x_i + (1 + \xi/2)x_j = (h_{xm}^{(ji)}/2)\xi + x_{0m}^{(ji)}, \\ y(\xi, -1) &= (1 - \xi/2)y_i + (1 + \xi/2)y_j = (h_{ym}^{(ji)}/2)\xi + y_{0m}^{(ji)}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где $h_{xm}^{(ji)} = x_j - x_i$, $h_{ym}^{(ji)} = y_j - y_i$ – длины проекций стороны четырехугольника Ω_x^{em} , связывающей вершины i и j , на оси x и y , соответственно, $x_{0m}^{(ji)} = (x_i + x_j)/2$, $y_{0m}^{(ji)} = (y_i + y_j)/2$ – средние точки проекций данной стороны на оси x и y .

Формулы (2.61) являются параметрическим отображением отрезка $\xi \in [-1, 1]$ в отрезок с вершинами (x_i, y_i) , (x_j, y_j) на плоскости xy , и, таким образом, сторона $\eta = -1$ канонического квадрата Ω_ξ^{em} отображением (2.58) переводится в соответствующую сторону четырехугольника Ω_x^{em} . Аналогично, можно показать, что остальные три стороны канонического квадрата на плоскости $\xi\eta$ отображаются в соответствующие три стороны четырехугольника $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ на плоскости xy .

Остается проверить обратимость преобразования (2.58), что будет гарантировать, что каждой точке (x, y) из Ω_x^{em} будет соответствовать одна и только одна точка (ξ, η) канонического квадрата. Для этого запишем отображение (2.58) в виде явных полиномов от ξ и η . После перегруппировки слагаемых в (2.58) имеем

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= a_{0x} + a_{1x}\xi + a_{2x}\eta + a_{3x}\xi\eta, \\ y(\xi, \eta) &= a_{0y} + a_{1y}\xi + a_{2y}\eta + a_{3y}\xi\eta, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где

$$\begin{aligned} a_{0x} &= (x_i + x_j + x_k + x_l)/4 & a_{1x} &= (x_j - x_i + x_k - x_l)/4, \\ a_{2x} &= (x_k + x_l - x_i - x_j)/4 & a_{3x} &= (x_i - x_j + x_k - x_l)/4, \\ a_{0y} &= (y_i + y_j + y_k + y_l)/4 & a_{1y} &= (y_j - y_i + y_k - y_l)/4, \\ a_{2y} &= (y_k + y_l - y_i - y_j)/4 & a_{3y} &= (y_i - y_j + y_k - y_l)/4. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Вычислим матрицу Якоби \mathbf{J} для отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ (2.62):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} + a_{3x}\eta & a_{1y} + a_{3y}\eta \\ a_{2x} + a_{3x}\xi & a_{2y} + a_{3y}\xi \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Для взаимной однозначности билинейного отображения (2.62) необходимо, чтобы определитель матрицы Якоби $\det \mathbf{J}$ не обращался в нуль внутри канонического квадрата. Вычисляя $\det \mathbf{J}$ из (2.64), находим:

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = J_0 + J_1\xi + J_2\eta, \quad (2.65)$$

$$J_0 = a_{1x}a_{2y} - a_{2x}a_{1y}, \quad J_1 = a_{1x}a_{3y} - a_{3x}a_{1y}, \quad J_2 = a_{3x}a_{2y} - a_{2x}a_{3y}. \quad (2.66)$$

Из (2.65) видно, что $\det \mathbf{J}$ – линейная функция от ξ и η (т.к. слагаемое с $\xi\eta$ обращается в нуль). В связи с этим, если во всех четырех вершинах канонического квадрата функция $\det \mathbf{J}(\xi, \eta)$ будет одного знака, то эта линейная функция будет знакопостоянной и отличной от нуля ($\det \mathbf{J} \neq 0$) всюду внутри канонического квадрата.

После несложных, но достаточно громоздких преобразований, из (2.63), (2.65), (2.66) найдем, что, например, в вершине $\xi = -1, \eta = -1$

$$\det \mathbf{J}(-1, -1) = \frac{1}{4}[(x_j - x_i)(y_l - y_i) - (x_l - x_i)(y_j - y_i)]. \quad (2.67)$$

Последнее выражение можно преобразовать к более наглядной форме

$$\det \mathbf{J}(-1, -1) = \frac{1}{4}h_m^{ji}h_m^{li} \sin \varphi_m^{(i)}, \quad (2.68)$$

$$h_m^{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad h_m^{li} = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}, \quad (2.69)$$

$$\sin \varphi_m^{(i)} = \frac{(x_j - x_i)(y_l - y_i) - (x_l - x_i)(y_j - y_i)}{h_m^{ji}h_m^{li}}, \quad (2.70)$$

где h_m^{ji}, h_m^{li} – длины сторон четырехугольника Ω_x^{em} , связывающих вершины i, j и i, l , соответственно; $\varphi_m^{(i)}$ – угол между этими сторонами, имеющими общую вершину i (Рис. 2.7).

Очевидно, что если угол $\varphi_m^{(i)}$ меньше π , то $\det \mathbf{J} > 0$ в узле 1 канонического квадрата, соответствующем узлу i четырехугольника Ω_x^{em} . Аналогичные выкладки можно проделать и для трех других вершин канонического квадрата, получив тот же результат о положительности якобина при $\varphi_m^{(j)} < \pi$, $\varphi_m^{(k)} < \pi$ и $\varphi_m^{(l)} < \pi$. В результате получаем, что якобиан преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ (2.58) или (2.62) всюду отличен от нуля тогда и только тогда, когда четырехугольник Ω_x^{em} выпуклый, т.е. когда все его углы меньше π . В противном случае (рис. 2.8) $\det \mathbf{J}$ будет знакопеременной функцией, и отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ не будет взаимно-однозначным.

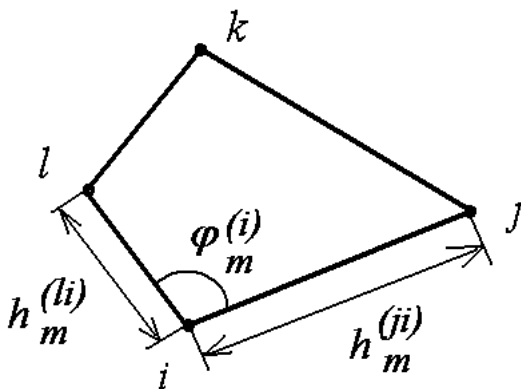


Рис. 2.7.

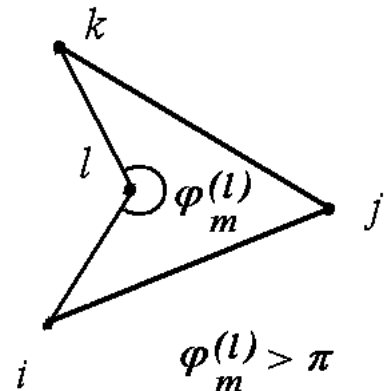


Рис. 2.8.

Итак, параметрическое отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ (2.58) является взаимно-однозначным преобразованием канонического квадрата $\Omega_{\xi}^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ в выпуклый четырехугольник Ω_x^{em} . Отображение (2.58) можно записать в векторно-матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.71)$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

$N_s = N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta)$ – базисные функции или функции формы, определенные по (2.56); $s = 1, 2, 3, 4$; $\mathbf{x} = \{x, y\}$; а вектор \mathbf{X}^{em} был введен ранее в (2.53).

Подведем итог. В данном подразделе описаны вопросы, связанные с представлением некоторой функции на выпуклом четырехугольном элементе $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с четырьмя узлами. Как было показано, существует параметрическое отображение стандартной для метода конечных элементов формы $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}$, связывающее взаимно-однозначно четырехугольник Ω_x^{em} с каноническим квадратом Ω_{ξ}^{em} . Данное отображение использует билинейные функции формы $N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta)$, $s = 1, 2, 3, 4$. Эти же функции формы применяются и для аппроксимации (2.54) на каноническом квадрате ($\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_{\theta}^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}$). Поскольку базисные функции $N_s(\boldsymbol{\xi})$ билинейны, то и все представление (2.54) является билинейной функцией от ξ и η . Данная формула дает полный линейный полином от ξ и η , и только одно из слагаемых с произведением $\xi\eta$ является квадратичным. Полной квадратичной аппроксимации в (2.54), таким образом, нет, и поэтому теоретическая оценка погрешности будет такой же, как и для чисто линейной аппроксимации по ξ , η . Между тем, наличие элементов квадратичного приближения, конечно же, не ухудшает аппроксимационных свойств билинейного элемента. Это слагаемое особенно важно для приближений производных от неизвестной функции, которые из-за этого члена будут содержать линейные слагаемые по ξ или η .

Что касается представления неизвестной функции, например, θ_h на физической плоскости xy , т.е. как функции $\theta_h = \theta_h(x, y)$, то данный вопрос более сложен. Функция $\theta_h^{em}(\xi, \eta)$, будучи билинейным полиномом от ξ и η на каноническом квадрате, не будет, вообще говоря, полиномом от x и y . Действительно, обратное к (2.58) или (2.62) отображение $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ не является полиномиальным. На практике, однако, это обычно не пре-

пятствует нормальным аппроксимационным свойствам рассматриваемого четырехугольного билинейного конечного элемента, как и других конечных элементов аналогичного типа. Стандартная техника МКЭ состоит в разбиении области Ω_h на совокупность конечных элементов Ω^{em} небольших размеров, на которых полевые функции должны мало изменяться. В этом случае билинейное представление (2.54) на каноническом квадрате в совокупности с параметрическим отображением (2.58) или (2.62), (2.71) является вполне удовлетворительным для многих реальных задач.

Следует также отметить, что хотя во всей области Ω^{em} поведение функции $\theta_h = \theta_h(x, y)$ достаточно сложное, на сторонах четырехугольника она изменяется линейно. В самом деле, например, на стороне $\eta = -1$ базисные функции линейны и изменяются по закону (2.60). Поэтому представление (2.54) принимает вид:

$$\theta_h^{em}(\xi, -1) = (1 - \xi/2)T_i + (1 + \xi/2)T_j, \quad (2.73)$$

что в совокупности с параметрическими формулами (2.61) обеспечивает линейное поведение функции θ_h на выбранной стороне четырехугольника.

Линейное поведение функции на стороне позволяет объединять билинейные конечные элементы в единую конечно-элементную сетку, сохраняя при этом непрерывность аппроксимирующей функции (см. далее п. 2.7). Данное свойство обеспечивается именно изопараметрическим подходом.

Здесь важно отметить, что для произвольного четырехугольника в \mathbb{R}^2 не существует полиномиальной аппроксимации θ_h по \mathbf{x} с линейным поведением θ_h на сторонах.

Например, если искать на четырехугольном элементе Ω_x^{em} полиномиальную лагранжеву аппроксимацию вида

$$\tilde{\theta}_h^{em}(\mathbf{x}) = c_0 + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy, \quad (2.74)$$

то из четырех условий $\tilde{\theta}_h^{em}(\mathbf{x}_{r_s}) = T_{r_s}$, $s = 1, 2, 3, 4$, где $r_1 = i$, $r_2 = j$, $r_3 = k$, $r_4 = l$, можно выразить c_0 , c_{10} , c_{01} и c_{11} через T_{r_s} . Тогда (2.74) можно записать в форме

$$\tilde{\theta}_h^{em}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^4 \varphi_s(\mathbf{x})T_{r_s}, \quad (2.75)$$

$$\varphi_s(\mathbf{x}) = b_{s0} + b_{s10}x + b_{s01}y + b_{s11}xy, \quad (2.76)$$

где b_{s0} , b_{s10} , b_{s01} , b_{s11} – некоторые коэффициенты, зависящие от c_0 , c_{10} , c_{01} и c_{11} .

Представление (2.75), (2.76) напоминает конечно-элементную аппроксимацию. Но оно дает в общем случае квадратичное поведение $\tilde{\theta}_h^{em}(\mathbf{x})$ на стороне четырехугольника Ω_x^{em} . Поэтому, соединяя два таких четырехугольных элемента по общей стороне, например, с узлами r_i, r_j , нельзя гарантировать единое квадратичное поведение функции $\tilde{\theta}_h^{em}(\mathbf{x})$ на этой стороне, так как одинаковыми для этих двух элементов будут только два узловых значения T_{r_i}, T_{r_j} , а не три.

Квадратичное поведение на стороне четырехугольника вырождается в линейное, если эти стороны будут параллельными координатным осям [53]. Поэтому, чтобы аппроксимирующая функция была непрерывна при переходе от одного элемента к другому, четырехугольники должны быть прямоугольными со сторонами, параллельными осям x и y . Канонический квадрат Ω_ξ^{em} и является таким прямоугольником на плоскости $O\xi\eta$. Но для него имеется представление типа (2.74)–(2.76) только для переменных ξ и η , а не для x и y . При этом на Ω_ξ^{em} с использованием (2.54)–(2.56) можно точно представить любой полином вида

$$P_{1b}(\xi, \eta) = c_0 + c_{10}\xi + c_{01}\eta + c_{11}\xi\eta = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 c_{pq} \xi^p \eta^q, \quad (2.77)$$

т.е. для любых c_0, c_{10}, c_{01} и c_{11} должны существовать такие значения T_{r_s} , $s = 1, 2, 3, 4$, что

$$P_{1b}(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^4 N_s(\boldsymbol{\xi}) T_{r_s}. \quad (2.78)$$

Поскольку T_{r_s} есть значения функции $\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi})$ в узлах $\boldsymbol{\xi}_s = \{\xi_s, \eta_s\}$, то $T_{r_s} = P_{1b}(\xi_s, \eta_s)$, и из (2.78) получаем, что должны выполняться равенства

$$\sum_{s=1}^4 N_s(\boldsymbol{\xi}) = 1, \quad \sum_{s=1}^4 \xi_s N_s(\boldsymbol{\xi}) = \xi, \quad \sum_{s=1}^4 \eta_s N_s(\boldsymbol{\xi}) = \eta, \quad \sum_{s=1}^4 \xi_s \eta_s N_s(\boldsymbol{\xi}) = \xi\eta. \quad (2.79)$$

Эти равенства можно непосредственно проверить для билинейных базисных функций (2.56), что даст строгое доказательство справедливости точного представления произвольного полинома вида (2.77) в форме (2.78).

Равенства (2.79) полезны и сами по себе. Так, первое из равенств (2.79) свидетельствует о точном представлении постоянной функции на элементе, и входит в условие полноты для базовых конечно-элементных аппроксимаций (см. п. 2.7).

Аналогичные рассуждения в пользу изопараметрического подхода справедливы и для других элементов с нелинейной аппроксимацией, если они имеют неканоническую форму и, особенно, криволинейные границы. Для таких форм элементов построение интерполяционных полиномов, зависящих только от $x, y, (z)$, в общих случаях не будет гарантировать непрерывность аппроксимирующей функции при переходе от одного элемента к другому. Между тем, изопараметрические конечные элементы будут согласованы с элементами того же типа, будут давать в канонических областях Ω_ξ^{em} точное представление для соответствующих полиномиальных функций типа (2.77), но, естественно, с другими степенями по $\xi, \eta, (\zeta)$, и для их базисных функций и узлов будут выполняться соотношения, аналогичные (2.79).

В заключение заметим, что в данном подразделе не рассматривался ряд важных вопросов, без которых описание конечного элемента является совсем не полным. Именно, формулы (2.54), (2.71) должны быть использованы для построения элементных матриц и векторов активных внешних воздействий. Данным проблемам будет уделено внимание позже в общей для всех конечных элементов форме после рассмотрения других видов конечно-элементных аппроксимаций на плоскости.

2.5.2. Четырехугольный лагранжев конечный элемент с девятью узлами

Аналогично одномерному случаю, на каноническом квадрате можно задать и лагранжевы представления более высоких порядков. Так, если взять базисные функции (2.11) одномерного квадратичного элемента как функции от ξ и как функции от η : $\{\xi(\xi - 1)/2; 1 - \xi^2; \xi(\xi + 1)/2; \eta(\eta - 1)/2; 1 - \eta^2; \eta(\eta + 1)/2\}$, то их попарные произведения дадут функции формы биквадратичного четырехугольного конечного элемента.

Узлы биквадратичного конечного элемента для канонического квадрата $\Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ на плоскости $\xi\eta$ при соответствующей нумерации можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1\}, & \xi_3 &= \{1, 1\}, \\ \xi_4 &= \{-1, 1\}, & \xi_5 &= \{0, -1\}, & \xi_6 &= \{1, 0\}, \\ \xi_7 &= \{0, 1\}, & \xi_8 &= \{-1, 0\}, & \xi_9 &= \{0, 0\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Тогда, функции формы будут иметь вид

$$\begin{aligned}
N_1(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)/4; & N_2(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1)/4; \\
N_3(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1)/4; & N_4(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1)/4 \\
N_5(\boldsymbol{\xi}) &= (1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)/2; & N_6(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)/2; \\
N_7(\boldsymbol{\xi}) &= (1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)/2; & N_8(\boldsymbol{\xi}) &= \xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)/2; \\
N_9(\boldsymbol{\xi}) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

или, в общей записи,

$$N_s(\boldsymbol{\xi}) = \frac{(3\xi_s^2 - 2)(3\eta_s^2 - 2)}{4} [\xi_s^2(1 + \xi_s\xi) - (1 - \xi^2)][\eta_s^2(1 + \eta_s\eta) - (1 - \eta^2)], \tag{2.82}$$

где $s = 1, 2, \dots, 9$ в соответствии с (2.80).

Используя эти функции формы, обычным образом можно задать аппроксимирующую функцию $\theta_h = \theta_h^{em}(\xi, \eta)$ через вектор-строку $\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi})$ функций формы и вектор-столбец \mathbf{T}^{em} узловых температур

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \tag{2.83}$$

$$\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = [N_1, N_2, \dots, N_9], \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_{r_1}, T_{r_2}, \dots, T_{r_9}\}, \tag{2.84}$$

где T_{r_s} – узловые температуры при глобальной нумерации узлов r_s , соответствующих локальной нумерации s , $s = 1, \dots, 9$.

Остается открытым вопрос о параметрическом отображении четырехугольника на канонический квадрат. Здесь можно рассматривать выпуклый четырехугольник с прямолинейными сторонами и использовать параметрическую зависимость $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ (2.58), как для билинейного четырехугольного элемента. Очевидно, что тогда узлы $\boldsymbol{\xi}_5, \dots, \boldsymbol{\xi}_8$ будут переходить в узлы, лежащие на серединах сторон четырехугольника Ω^{em} .

Можно однако и использовать биквадратичное представление для всего четырехугольника. У такого четырехугольника будет девять узлов на плоскости xy : $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}\}$, $s = 1, \dots, 9$, где узлы с номерами от r_1 до r_4 совпадают с вершинами четырехугольника, узлы с номерами от r_5 до r_8 лежат на его сторонах, а узел r_9 находится внутри четырехугольника. Тогда параметрическое биквадратичное отображение канонического квадрата на четырехугольник может быть представлено в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \tag{2.85}$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_9 \end{bmatrix}, \tag{2.86}$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, \dots, x_{r_9}, y_{r_9}\}, \quad (2.87)$$

$N_s = N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta)$ – функции формы из (2.81); $s = 1, \dots, 9$; $\mathbf{x} = \{x, y\}$.

Таким образом, получается четырехугольный конечный элемент изопараметрического типа с девятью узлами. Полученный четырехугольный конечный элемент будет иметь биквадратичную аппроксимацию по ξ и η на каноническом квадрате.

Совсем не обязательно, чтобы узлы с номерами от r_5 до r_8 лежали бы на отрезках прямых, соединяющих вершины, и в этом случае четырехугольник будет иметь криволинейные стороны.

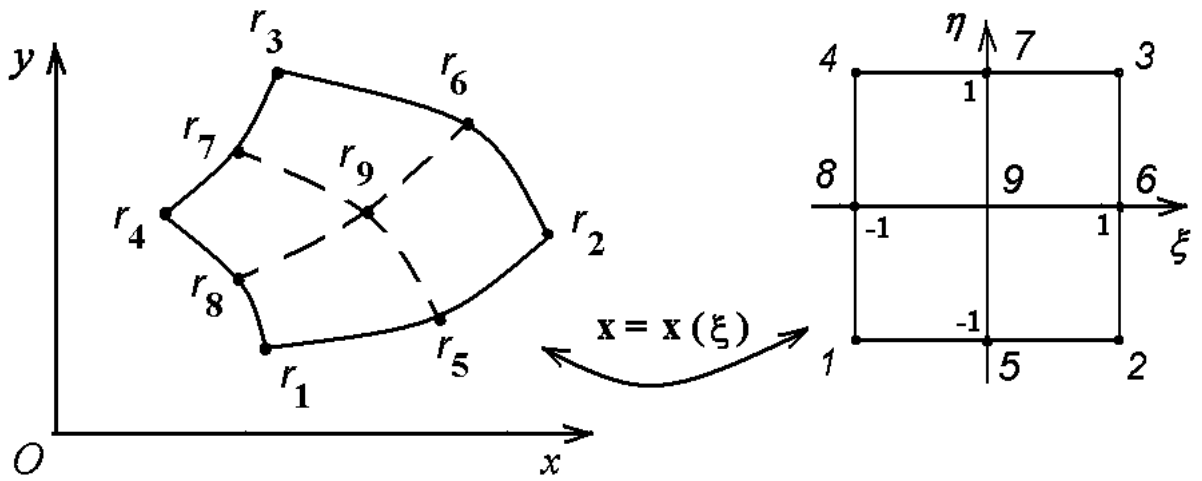


Рис. 2.9.

Пример криволинейного четырехугольника показан на рис. 2.9. Его сторонами являются кривые с квадратичной параметризацией. Действительно, если рассмотреть какую-нибудь сторону, например, $\eta = -1$, то можно заметить, что функции формы в (2.81) принимают вид:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, -1) &= \xi(\xi - 1)/2; & N_2(\xi, -1) &= \xi(\xi + 1)/2, \\ N_3(\xi, -1) &= N_4(\xi, -1) = 0; & N_5(\xi, -1) &= (1 - \xi^2), \\ N_6(\xi, -1) &= N_7(\xi, -1) = N_8(\xi, -1) = N_9(\xi, -1) = 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Базисные функции $N_1(\xi, -1)$, $N_2(\xi, -1)$ и $N_5(\xi, -1)$ из (2.88) являются обычными квадратичными функциями формы от ξ , определенными в (2.11). В связи с этим видно, что (2.85)–(2.88) при $\eta = -1$ задают отображение стороны $\eta = -1$, связывающий вершины ξ_1 , ξ_5 , ξ_2 , на сторону криволинейного четырехугольника, связывающую вершины \mathbf{x}_{r_1} , \mathbf{x}_{r_5} , \mathbf{x}_{r_2} .

Причем это отображение является квадратичным параметрическим представлением кривой на плоскости xy , проходящей через точки \mathbf{x}_{r_1} , \mathbf{x}_{r_5} , \mathbf{x}_{r_2} . Можно также заметить, что на стороне канонического квадрата по (2.83), (2.84), (2.88) определяется квадратичная аппроксимация θ_h по ξ и η .

Вопрос о взаимной однозначности отображения (2.85)–(2.87), (2.81) в общем случае достаточно сложен. Но на практике в реальных конечно-элементных сетках у четырехугольников либо все стороны прямые, либо три стороны прямые, и только одна (в случае криволинейных границ области Ω) – кривая, которая определяется квадратичной параметризацией. В таких случаях, если линейная оболочка четырехугольника будет выпуклой, криволинейная сторона будет также выпуклой (или не слишком вогнутой, что требует дополнительного исследования), средние узлы будут находиться посередине соответствующих сторон, а внутренний узел – на пересечении отрезков, соединяющих противоположащие средние узлы, то отображение (2.85)–(2.87), (2.81) будет взаимно-однозначным.

Возможность приближения криволинейных участков границы кривыми с квадратичными параметризациями (квадратичными лагранжевыми сплайнами) является важным достоинством элемента. Кроме того, биквадратичный четырехугольный конечный элемент с девятью узлами, конечно же, точнее, чем билинейный элемент из п. 2.5.1. Если в билинейном четырехугольном элементе аппроксимирующая функция включала полный линейный полином от ξ и η , то в биквадратичном четырехугольном элементе аппроксимирующая функция содержит уже полный квадратичный полином от ξ и η . Кроме того, есть еще члены с произведениями $\xi^2\eta$, $\xi\eta^2$ и $\xi^2\eta^2$. Данные слагаемые не дают вклада в теоретическую оценку погрешности, но на практике дают улучшение сходимости. Можно также показать (задача 2.20), что этот элемент обеспечивает точное представление любого полинома вида

$$P_{2b}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^2 c_{pq} \xi^p \eta^q,$$

что конечно же лучше, чем только точное представление билинейного полинома P_{1b} из (2.77).

Главный недостаток элемента состоит в наличии внутреннего узла. Следующий элемент, рассматриваемый далее, также будет обеспечивать полную квадратичную аппроксимацию, но не будет иметь внутреннего узла.

2.5.3. Четырехугольный серендипов конечный элемент с восемью узлами

Биквадратичный четырехугольный элемент давал полную квадратичную аппроксимацию, содержал дополнительные члены с частичной кубической аппроксимацией и имел член четвертой степени $\xi^2\eta^2$. Однако теоретическая оценка погрешности для данного элемента такая же, как для элемента с чисто квадратичной аппроксимацией. Таким образом, можно попытаться получить другие аппроксимации с той же теоретической точностью, но более простые. Так, можно построить квадратичный конечный элемент без внутреннего узла. Однако просто выбросить внутренний узел в биквадратичном элементе нельзя. Действительно, поскольку функции формы принимают значение 1 в своем узле, и 0 – в остальных узлах элемента, то все функции формы N_s из (2.81) для $s = 1, 2, \dots, 8$ равны нулю в узле ξ_9 , а, следовательно, и функция θ_h при аппроксимации (2.83), но без девятого узла, будет равна нулю при $\xi = \xi_9$. Таким образом, тогда будет нарушена корректность аппроксимации. Необходим другой подход, и один из вариантов построения допустимой аппроксимации был предложен А. Эргатоудисом, Б. Иронсом и О. Зенкевичем [17]. Семейство конечных элементов высших порядков без внутренних узлов (до четвертого порядка) было названо *серендиповыми конечными элементами*.

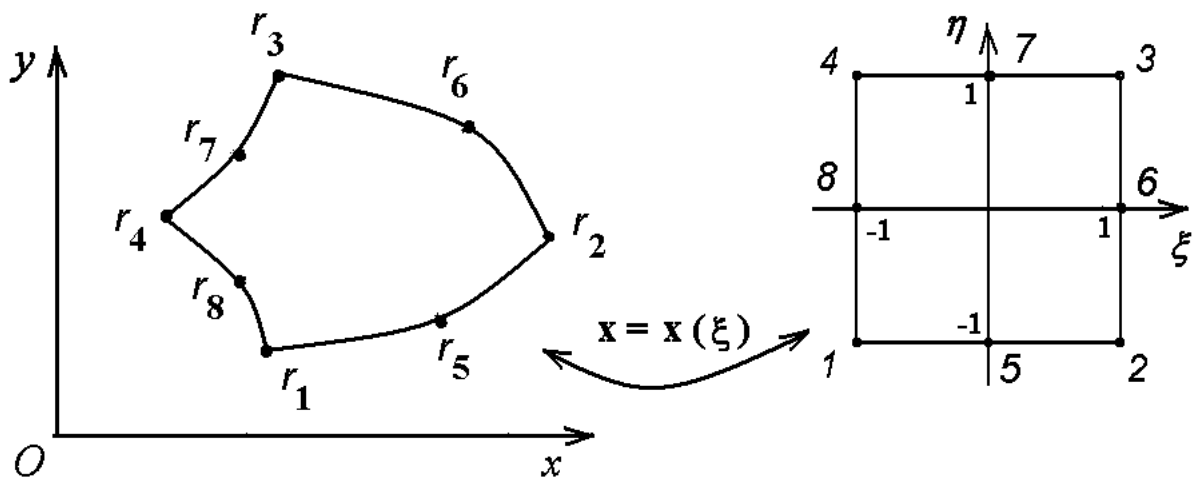


Рис. 2.10.

Ниже остановимся более подробно на изопараметрическом квадратичном серендиповом конечном элементе. Пусть четырехугольный элемент

$\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ (в общем случае с криволинейными границами с квадратичными параметризациями, рис. 2.10) имеет на каноническом квадрате $\Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ восемь узлов

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1\}, & \xi_3 &= \{1, 1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1\} \\ \xi_5 &= \{0, -1\}, & \xi_6 &= \{1, 0\}, & \xi_7 &= \{0, 1\}, & \xi_8 &= \{-1, 0\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Аппроксимацию на элементе поля θ_h будем искать в обычном виде

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = [N_1, N_2, \dots, N_8], \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_{r_1}, T_{r_2}, \dots, T_{r_8}\}, \quad (2.91)$$

где T_{r_s} – узловые температуры при глобальной нумерации узлов r_s , соответствующих локальной нумерации s , $s = 1, \dots, 8$.

Параметрическое отображение канонического квадрата на четырехугольник Ω_x^{em} с криволинейными границами в форме кривых с квадратичными полиномиальными параметризациями будем также искать в стандартном виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.92)$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, \dots, x_{r_8}, y_{r_8}\}, \quad (2.94)$$

$\mathbf{x} = \{x, y\}$; $N_s = N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta)$, $s = 1, \dots, 8$ – функции формы.

Основная задача построения элемента состоит в корректном нахождении функций формы $N_s(\xi, \eta)$, $s = 1, \dots, 8$, для (2.89) – (2.94).

Рассмотрим вначале срединные узлы ξ_s при $s = 5, 6, 7, 8$. Функции формы для этих узлов, удовлетворяющие основному соотношению $N_s(\boldsymbol{\xi}_q) = \delta_{sq}$, могут быть получены умножением квадратичных функций одномерного элемента для срединных узлов, т.е. функций $(1 - \xi^2)$ или $(1 - \eta^2)$, на линейные функции формы по другой координате: $(1 - \eta)/2$, $(1 + \eta)/2$, $(1 - \xi)/2$ или $(1 + \xi)/2$.

Таким образом, функции формы для срединных узлов можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} N_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2, & N_6(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 + \xi)/2, \\ N_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2, & N_8(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 - \xi)/2. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Остается построить функции формы $N_s(\xi, \eta)$ для узлов, совпадающих с вершинами квадрата ($s = 1, 2, 3, 4$). Рассмотрим функции формы (2.56) билинейного элемента.

Для первого узла $\xi_1 = \{-1, -1\}$ функция $(1 - \xi)(1 - \eta)/4$ равна единице в этом узле и обращается в нуль на двух сторонах, не связанных с узлом ξ_1 , т.е. при $\xi = 1$ и при $\eta = 1$. Таким образом, эта функция равна нулю для узлов ξ_s с номерами $s = 2, 3, 4, 6, 7$. Однако в узлах ξ_5 и ξ_8 она не обращается в нуль и равна $1/2$. Между тем, функции N_5 и N_8 из (2.95) равны единице в узлах ξ_5 и ξ_8 , соответственно, и равны нулю во всех остальных узлах элемента. Поэтому, если отнять от функции $(1 - \xi)(1 - \eta)/4$ функции $(1/2)N_5$ и $(1/2)N_8$, то как раз и получится требуемая функция формы для первого узла. Аналогичные процедуры можно проделать и для других узлов элемента, находящихся в вершинах четырехугольника. В результате получим:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_5(\xi, \eta) - (1/2)N_8(\xi, \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_5(\xi, \eta) - (1/2)N_6(\xi, \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_6(\xi, \eta) - (1/2)N_7(\xi, \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_7(\xi, \eta) - (1/2)N_8(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Заметим, что функции формы (2.95), (2.96) можно представить в едином виде

$$\begin{aligned} N_s(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(3\xi_s^2\eta_s^2 - 2)[\xi_s^2\eta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta) - \\ &\quad - \eta_s^2(1 - \xi^2)(1 + \eta_s\eta) - \xi_s^2(1 - \eta^2)(1 + \xi_s\xi)], \end{aligned} \quad (2.97)$$

где $s = 1, 2, \dots, 8$, и узлы $\xi_s = \{\xi_s, \eta_s\}$ определены в (2.89).

В результате по (2.89)–(2.97) определен четырехугольный конечный элемент серендипова типа, не содержащий внутренних узлов. Данный элемент дает полную квадратичную аппроксимацию по ξ и η , и имеет для представления функции θ_h слагаемые с $\xi^2\eta$ и $\xi\eta^2$. В отличие от биквадратичного четырехугольного конечного элемента с девятью узлами здесь нет члена с $\xi^2\eta^2$. Можно показать (задача 2.21), что четырехугольный серендипов элемент обеспечивает точное представление любого полинома вида $P_{2s}(\xi, \eta) = \sum_{p,q=0}^{p+q \leq 2} c_{pq}\xi^p\eta^q + c_{21}\xi^2\eta + c_{12}\xi\eta^2$. В частности, любой квадратичный полином по ξ и η можно точно представить на квадрате Ω_ξ^{em} с помощью базисных функций (2.95), (2.96) или (2.97).

Следует еще посмотреть, как ведет себя аппроксимирующая функция θ_h и параметрическое отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ на сторонах канонического квад-

рата. Возьмем, например, сторону $\eta = -1$. Как легко проверить, функции формы из (2.95), (2.96) или из (2.97) при $\eta = -1$ принимают вид:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, -1) &= \xi(\xi - 1)/2; & N_2(\xi, -1) &= \xi(\xi + 1)/2, \\ N_3(\xi, -1) &= N_4(\xi, -1) = 0; & N_5(\xi, -1) &= (1 - \xi^2), \\ N_6(\xi, -1) &= N_7(\xi, -1) = N_8(\xi, -1) = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Видно, что данные формулы полностью совпадают с формулами (2.88) для функций формы $N_s(\xi, -1)$, $s = 1, 2, \dots, 8$, биквадратичного четырехугольного элемента из п. 2.5.2. Следовательно, и для данного квадратичного четырехугольного элемента серендипова типа имеем квадратичное поведение аппроксимирующей функции на сторонах канонического квадрата Ω_ξ^{em} , а стороны канонического квадрата преобразуются в части кривых с квадратичными параметризациями, проходящих через вершины четырехугольника Ω_x^{em} и его средние узлы. Естественно, что если средние узлы будут лежать на прямых, соединяющих соответствующие вершины четырехугольника Ω_x^{em} , то при отображении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ прямолинейные стороны канонического квадрата Ω_ξ^{em} будут переводиться в прямолинейные стороны четырехугольника Ω_x^{em} , т.е. квадратичные отображения сторон будут вырождаться в линейные.

Относительно требований о взаимной однозначности параметрического отображения (2.92) – (2.96) здесь справедливы те же замечания, что и для биквадратичного четырехугольного элемента с девятью узлами.

В заключение рассмотрения базовых четырехугольных элементов для плоских задач сравним еще раз полиномиальные аппроксимации, используемые для различных элементов. На рис. 2.11 показаны треугольники Паскаля, из которых наглядно видны члены, входящие в аппроксимирующие многочлены для различных элементов (эти члены связаны сплошными линиями). Здесь рис. 2.11, *а*, соответствует билинейному элементу, рис. 2.11, *б* – биквадратичному элементу с девятью узлами, рис. 2.11, *в* – квадратичному серендипову элементу с восемью узлами. Как видно, билинейный элемент (рис. 2.11, *а*) обеспечивает полную линейную аппроксимацию и имеет один член из квадратичной аппроксимации; биквадратичный (рис. 2.11, *б*) и серендипов (рис. 2.11, *в*) элементы обеспечивают полную квадратичную аппроксимацию; при этом у биквадратичного элемента имеется еще три члена высших степеней, а у серендипова элемента таких членов только два. Таким образом, серендипов элемент можно признать более экономичным по сравнению с биквадратичным.

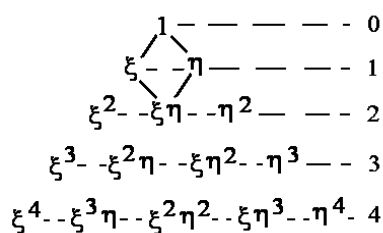


Рис. 2.11, а.

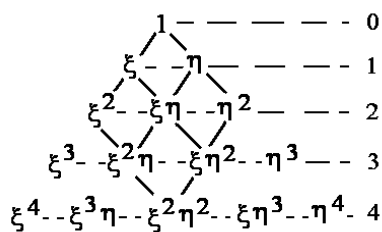


Рис. 2.11, б.

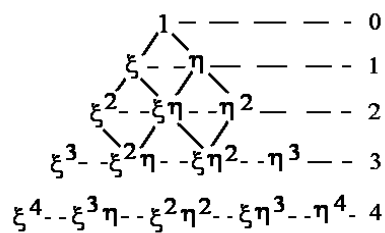


Рис. 2.11, в.

Билинейный и сирепдипов четырехугольные элементы нашли использование во многих современных конечно-элементных программных комплексах и реализованы для большого числа различных предметных приложений. Между тем, поскольку сложные геометрические объекты в некоторых областях удобно разбивать на треугольные элементы, то наряду с четырехугольными элементами широко используются и треугольные элементы, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

2.6. Двумерные треугольные лагранжевы конечные элементы

Треугольники являются наиболее простыми фигурами на плоскости. Поэтому не удивительно, что треугольный элемент с тремя узлами стал разрабатываться одним из первых еще на заре становления МКЭ. Треугольные элементы замечательны и тем, что для них можно задавать полиномиальные аппроксимации в виде полных многочленов различных степеней, не содержащих членов высших порядков. Как отмечалось в п. 2.5, для четырехугольников это не так, и полиномиальные аппроксимации для четырехугольников помимо полных многочленов определенной степени имели еще и дополнительные члены более высоких порядков.

Треугольники важны также для построения сеточных разбиений вблизи острых углов и границ с особенностями. Кроме того, построение конечно-элементных сеток из треугольников для плоских областей может быть осуществлено с применением автоматизированных методов триангуляций, причем поддерживающих заданное качество треугольников с точки зрения их аппроксимационных свойств. Методы триангуляции описаны во многих работах по вычислительной геометрии как безотносительно к методу ко-

нечных элементов, так и применительно к МКЭ (см., например, [25, 56, 60], и др.)

2.6.1. Треугольный лагранжев конечный элемент с тремя узлами

Рассмотрим некоторый треугольник (конечный элемент) $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ на плоскости Oxy с вершинами с номерами i, j, k , расположенными в порядке обхода против часовой стрелки (Рис. 2.12).

Введем треугольные координаты. Пусть P – произвольная точка внутри треугольника. Соединив эту точку с вершинами треугольника, получим разбиение треугольника $\Delta(ijk)$ на три меньших треугольника: $\Delta(Pij)$, $\Delta(Pjk)$ и $\Delta(Pki)$.

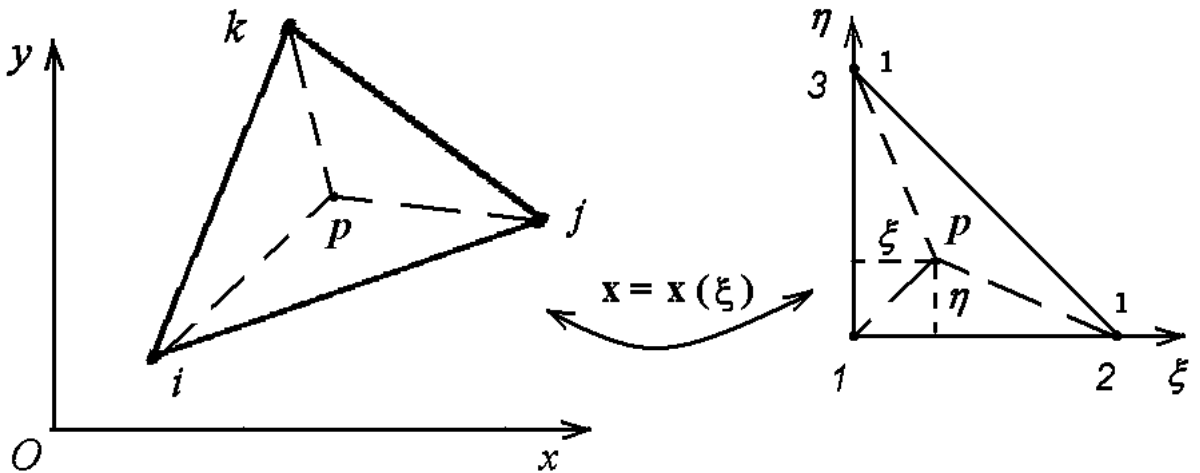


Рис. 2.12.

Определим следующие функции координат точки $P = P(x, y)$

$$L_i(P) = \frac{S_{\Delta(Pjk)}}{S_{\Delta(ijk)}}, \quad L_j(P) = \frac{S_{\Delta(Pki)}}{S_{\Delta(ijk)}}, \quad L_k(P) = \frac{S_{\Delta(Pij)}}{S_{\Delta(ijk)}}, \quad (2.99)$$

где $S_{\Delta(ijk)}$ – площадь треугольника $\Delta(ijk)$ и т.д.

Как видно, например, функция $L_i(P)$, ассоциированная с вершиной с номером i , определяется как отношение площади треугольника $\Delta(Pjk)$ со стороной jk , противоположной вершине i , к площади всего треугольника $\Delta(ijk)$. Аналогичный смысл имеют и остальные функции из (2.99).

Данные функции точки $L_i(P)$, $L_j(P)$, $L_k(P)$ и являются *треугольными координатами*. Поскольку эти координаты связаны с площадями, то они называются также *координатами площади*.

Естественно, что на плоскости логично иметь две координаты. Но в действительности для треугольных координат это так и есть, поскольку сумма всех трех функций, очевидно, равна единице:

$$L_i(P) + L_j(P) + L_k(P) = 1, \quad (2.100)$$

т.е. из введенных трех функций только две являются линейно независимыми.

У треугольных координат есть еще одно название, связанное с тем, что точка P , для которой $L_i(P) = L_j(P) = L_k(P) = 1/3$, является барицентром треугольника. В связи с этим треугольные координаты или координаты площади называются еще *барицентрическими координатами* (точнее говоря, приведенными барицентрическими координатами).

Можно заметить, что значения координат L_p , $p = i, j, k$, пропорциональны высоте, опущенной из точки P на соответствующую сторону, и изменяются линейно от нуля до единицы. При этом треугольная координата равна единице в ассоциированной с ней вершине, и равна нулю в остальных двух вершинах треугольника. Поэтому вершины треугольника можно считать его узлами, а треугольные координаты – функциями формы.

В связи с этим можно определить линейную аппроксимацию полевой функции θ_h непосредственно на треугольнике $\Omega^{em} = S_{\Delta(ijk)}$ на плоскости Oxy :

$$\theta_h(x, y) = \mathbf{N}_{\theta_g}^{em*}(x, y) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\theta_g}^{em*}(x, y) &= [L_i(P(x, y), L_j(P(x, y), L_k(P(x, y))), \\ \mathbf{T}^{em} &= \{T_i, T_j, T_k\}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

В принципе формулы (2.99), (2.101), (2.102) полностью определяют линейный треугольный плоский элемент, задавая лагранжеву аппроксимацию в виде полного полинома первой степени от x и y . Необходимы только более удобные выражения для вычислений функций формы (2.99) через координаты вершин треугольника. Здесь можно использовать формулу для площади треугольника $\Delta(ijk)$ с вершинами $\{x_i, y_i\}$, $\{x_j, y_j\}$, $\{x_k, y_k\}$, обходимыми в направлении против часовой стрелки:

$$S_{\Delta(ijk)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}. \quad (2.103)$$

Таким образом, для задания явных выражений для вычисления функций формы (2.99) можно взять (2.103) и соответствующие формулы для вычисления площадей меньших треугольников $\Delta(Pij)$, $\Delta(Pjk)$ и $\Delta(Pki)$. Нужно только смотреть за правилом обхода вершин этих треугольников. В результате получаем:

$$S_{\Delta(Pij)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j \\ y & y_i & y_j \end{vmatrix}, \quad S_{\Delta(Pjk)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_j & x_k \\ y & y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad S_{\Delta(Pki)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_k & x_i \\ y & y_k & y_i \end{vmatrix}. \quad (2.104)$$

Линейную аппроксимацию на треугольнике с тремя узлами можно записать также в рамках общей идеологии параметрического отображения и аппроксимации на канонической фигуре. Как и в случае одномерных лагранжевых элементов, польза от такой концепции не очевидна, и будет проявляться только при усложнении элемента.

В качестве канонической фигуры Ω_{ξ}^{em} возьмем прямоугольный треугольник на плоскости $\xi\eta$ со сторонами, равными единице (Рис. 2.12). Вершины будем считать узлами, и примем для них локальную нумерацию: $\xi_1 = \{0, 0\}$; $\xi_2 = \{1, 0\}$; $\xi_3 = \{0, 1\}$.

Зададим линейное представление функции θ_h на каноническом треугольнике стандартного вида

$$\theta_h^{em}(\xi) = \mathbf{N}_{\theta}^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{N}_{\theta}^{em*}(\xi) = [N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta)], \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_i, T_j, T_k\}. \quad (2.106)$$

Здесь N_s – базисные функции, являющиеся координатами площади (2.99) на каноническом треугольнике, причем соответствие между локальными и глобальными номерами узлов принимается следующим: $1 \leftrightarrow i$, $2 \leftrightarrow j$, $3 \leftrightarrow k$.

Координаты площади N_s на каноническом треугольнике легко вычисляются для $s = 2, 3$. Действительно, площади соответствующих треугольников равны следующим значениям: $S_{\Delta(123)} = 1/2$, $S_{\Delta(P31)} = \xi/2$, $S_{\Delta(P12)} = \eta/2$; и поэтому: $N_2 = L_2 = \xi$, $N_3 = L_3 = \eta$. Оставшуюся функцию $N_1 = L_1$ теперь можно найти, используя (2.99): $N_1 = L_1 = 1 - L_2 - L_3 = 1 - \xi - \eta$.

Итак, линейные функции формы для канонического треугольника имеют вид:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (2.107)$$

Несложно также убедиться, что канонический треугольник Ω_ξ^{em} может быть переведен в треугольник $\Omega_x^{em} = \Omega_x^{em} = \Delta(ijk)$ параметрическим отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.108)$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k\}. \quad (2.110)$$

Легко проверить, что при отображении (2.107) – (2.110) узлы с локальными номерами 1, 2, 3 канонического прямоугольного треугольника Ω_ξ^{em} переходят соответственно в узлы i, j, k исходного треугольника $\Omega_x^{em} = \Delta(ijk)$, а стороны одного треугольника переходят в стороны другого. Действительно, для проверки последнего положим, например, $\eta = 0$, что определяет сторону, связывающую узлы 1 и 2 канонического треугольника. Тогда, функции формы из (2.107) видоизменяются следующим образом:

$$N_1(\xi, 0) = 1 - \xi, \quad N_2(\xi, 0) = \xi, \quad N_3(\xi, 0) = 0. \quad (2.111)$$

Как видно, (2.108) – (2.111) при $\eta = 0$ дают параметрическое отображение стороны $\{\xi \in [0, 1], \eta = 0\}$ канонического треугольника на сторону с вершинами i, j исходного треугольника:

$$x = (1 - \xi)x_i + \xi x_j, \quad y = (1 - \xi)y_i + \xi y_j.$$

Аналогичные выкладки можно провести и для двух других сторон канонического треугольника: $\{\xi \in [0, 1], \eta = 1 - \xi\}$ и $\{\eta \in [0, 1], \xi = 0\}$.

Наконец, взаимная однозначность отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ будет гарантирована для любого невырожденного треугольника, так как определитель $\det \mathbf{J}$ матрицы Якоби для отображения (2.107) – (2.110) равен удвоенной площади треугольника в физической плоскости:

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 2S_{\Delta(ijk)}. \quad (2.112)$$

Поскольку обратное отображение $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ к (2.107) – (2.110) также есть линейное преобразование, то аппроксимация (2.105), (2.106) при подстановке зависимости $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ будет линейной и по переменным x и y . В итоге изопараметрический треугольный конечный элемент с тремя узлами (2.105) – (2.110) эквивалентен линейному треугольному элементу с

аппроксимацией поля температур (2.99), (2.101). В обоих случаях имеем полные линейные полиномы как по переменным x, y , так и по переменным ξ, η . Дополнительных слагаемых с членами высших степеней здесь нет, и в этом состоит существенное отличие линейного треугольного элемента от билинейного четырехугольного элемента из п. 2.5.1.

Может показаться неожиданным, но такая оптимальность линейного представления неизвестной функции θ_h на треугольнике оборачивается серьезным недостатком данного треугольного элемента. Причина состоит в том, что первые производные от θ_h по x или по y (или по ξ, η) будут постоянными на элементе. Следовательно, на треугольной сетке с линейными треугольными элементами функция θ_h будет кусочно-линейной, а ее первые производные – кусочно-постоянными. Это может приводить к существенным погрешностям для производных решения, что ограничивает практические возможности применения линейных треугольных элементов с тремя узлами.

2.6.2. Треугольный лагранжев конечный элемент с шестью узлами

Для повышения точности аппроксимации конечно-элементных решений на треугольных сетках можно использовать треугольные элементы высших степеней. Так, квадратичный треугольный элемент можно построить, введя дополнительные узлы на сторонах треугольника.

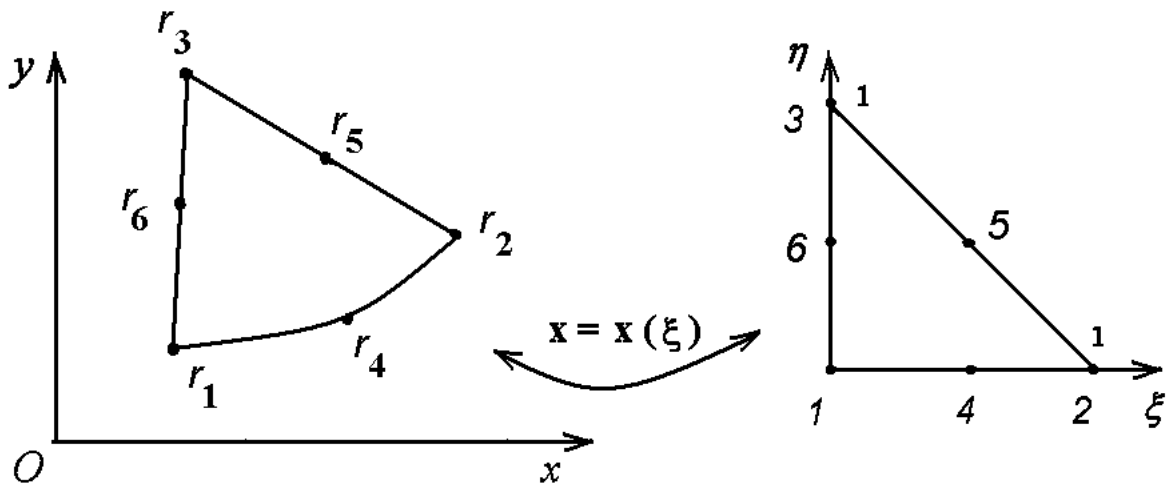


Рис. 2.13.

Рассмотрим на плоскости xy треугольник $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с узлами с глобальными номерами r_1, r_2, r_3 , совпадающими с вершинами треугольника, и с дополнительными узлами r_4, r_5, r_6 , расположенными на сторонах треугольника (Рис. 2.13). Здесь, как и ранее, узлы r_1, r_2, r_3 , а также r_4, r_5, r_6 пронумерованы в направлении против часовой стрелки. Как будет показано далее, стороны треугольника могут быть криволинейными и задаваться квадратичными полиномиальными параметрическими зависимостями. Таким образом, в общем случае треугольник может быть криволинейным со сторонами, задаваемыми квадратичными полиномами от некоторых естественных координат.

Введем также в рассмотрение канонический прямоугольный треугольник Ω_ξ^{em} на плоскости $\xi\eta$ со сторонами, равными единице (Рис. 2.13). Вершины будем считать узлами с локальной нумерацией: $\xi_1 = \{0, 0\}$; $\xi_2 = \{1, 0\}$; $\xi_3 = \{0, 1\}$. Три дополнительных узла расположим на серединах сторон канонического треугольника: $\xi_4 = \{1/2, 0\}$; $\xi_5 = \{1/2, 1/2\}$; $\xi_6 = \{0, 1/2\}$.

Необходимо построить квадратичные функции $N_s(\xi, \eta)$ с обычными для МКЭ свойствами: $N_s(\xi_q, \eta_q) = \delta_{sq}$.

Заметим, что координаты площади, определяемые для канонического треугольника формулами

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi, \eta) = \xi, \quad L_3(\xi, \eta) = \eta \quad (2.113)$$

постоянны на соответствующих линиях, параллельных его сторонам.

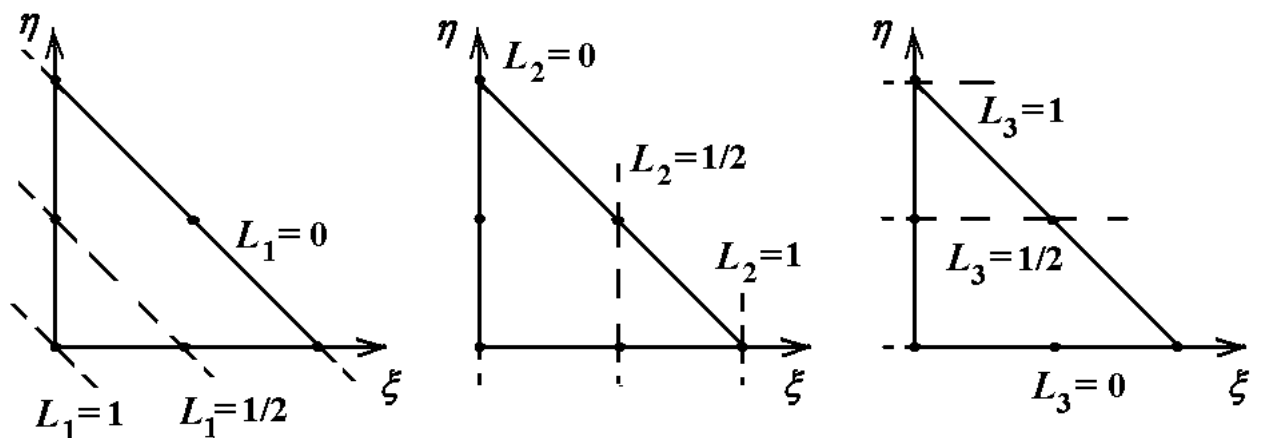


Рис. 2.14.

При этом, как видно из рис. 2.14, требуемые функции формы для узлов, расположенных в вершинах, могут быть построены как полиномы Лагранжа от переменных, совпадающих с соответствующими координатами площади:

$$N_s = \frac{(L_s - 1/2)(L_s - 0)}{(1 - 1/2)(1 - 0)} = (2L_s - 1)L_s, \quad s = 1, 2, 3. \quad (2.114)$$

Наконец, для узлов, расположенных в серединах сторон, можно взять просто произведения тех координат площади, которые принимают значения $(1/2)$ в данных узлах, и умножить их на коэффициент, равный четырем:

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_1L_3. \quad (2.115)$$

Заметим, что функции формы (2.114), (2.115) могут быть получены в результате рассуждений, аналогичных приведенным в п. 2.5.3 при построении функции формы четырехугольного серендипова конечного элемента. Именно, для функций формы, соответствующих узлам ξ_4, ξ_5, ξ_6 примем формулы (2.115). Далее, для функций формы N_s для узлов, совпадающих с вершинами треугольника ($s = 1, 2, 3$), действуем следующим образом. Рассмотрим функцию формы L_s линейного треугольного элемента, соответствующую узлу ξ_s в вершине ($s = 1, 2, 3$). Эта функция равна единице в вершине ξ_s и равна нулю на стороне, противоположной вершине ξ_s . В серединных узлах, соседствующих с ξ_s , эта функция равна $1/2$. Но функции формы (2.115) для соответствующих серединных узлов равны единице и равны нулю во всех остальных узлах. Поэтому, если отнять от L_s умноженные на $1/2$ функции формы (2.115) для двух серединных узлов, соседствующих с вершиной ξ_s , то получится искомая квадратичная функция для узла ξ_s ($s = 1, 2, 3$). Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 - (1/2)N_6 - (1/2)N_4, & N_2 &= L_2 - (1/2)N_4 - (1/2)N_5, \\ N_3 &= L_3 - (1/2)N_5 - (1/2)N_6, \end{aligned} \quad (2.116)$$

где N_4, N_5, N_6 определены по (2.115). Как легко проверить, формулы (2.114) и (2.116) дают в итоге идентичные выражения. Более компактными, конечно, выглядят формулы (2.114), но представления (2.116) можно использовать для получения треугольных элементов сопряжения для смешанных сеток из квадратичных и линейных элементов. Этот вопрос будет обсуждаться далее в разделе 2.7.

С учетом выражений (2.113) для координат площади, квадратичные функции формы N_s ($s = 1, 2, \dots, 6$) можно представить также в виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta), \quad N_2 = (2\xi - 1)\xi, \quad N_3 = (2\eta - 1)\eta, \\ N_4 &= 4(1 - \xi - \eta)\xi, \quad N_5 = 4\xi\eta, \quad N_6 = 4(1 - \xi - \eta)\eta. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Теперь можно записать обычные формулы для аппроксимации полевой функции θ_h на элементе

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.118)$$

$$\mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = [N_1, N_2, \dots, N_6], \quad \mathbf{T}^{em} = \{T_{r_1}, T_{r_2}, \dots, T_{r_6}\}, \quad (2.119)$$

где T_{r_s} – узловые температуры при глобальной нумерации узлов r_s , соответствующих локальной нумерации s , $s = 1, \dots, 6$.

Параметрическое отображение канонического прямоугольного треугольника на треугольник с криволинейными границами, описываемыми квадратичными полиномиальными параметризациями, также имеет стандартный вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.120)$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_6 \end{bmatrix}, \quad (2.121)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, \dots, x_{r_6}, y_{r_6}\}, \quad \mathbf{x} = \{x, y\}. \quad (2.122)$$

Формулы (2.117) – (2.119) дают полную квадратичную лагранжеву аппроксимацию функции θ_h по ξ , η без членов более высокого порядка.

По отображению (2.120) – (2.122), (2.117) канонический треугольник Ω_ξ^{em} переводится в треугольник Ω_x^{em} так, что узлы $\boldsymbol{\xi}_s$ переходят в узлы \mathbf{x}_{r_s} , а прямолинейные стороны канонического треугольника – в криволинейные стороны треугольника Ω_x^{em} , имеющие в общем случае форму кривых с квадратичными полиномиальными параметризациями.

Последнее легко проверить, подставляя в (2.120) – (2.122), (2.117) формулы, определяющие соответствующие стороны. Например, для $\eta = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, 0) &= (1 - 2\xi)(1 - \xi), \quad N_2(\xi, 0) = (2\xi - 1)\xi, \quad N_3(\xi, 0) = 0 \\ N_4(\xi, 0) &= 4(1 - \xi)\xi, \quad N_5(\xi, 0) = N_6(\xi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Функции $N_1(\xi, 0)$, $N_2(\xi, 0)$, $N_4(\xi, 0)$ являются квадратичными функциями формы одномерного элемента, только определенными не на $[-1, 1]$,

как ранее в п. 2.2, а на отрезке $[0, 1]$. Учитывая (2.123), убеждаемся, что параметрическое отображение (2.120) – (2.122), (2.117) действительно переводит прямолинейные стороны канонического треугольника Ω_ξ^{em} в стороны треугольника Ω_x^{em} , имеющие форму кривых с квадратичными полиномиальными параметризациями.

При этом, как и для квадратичных четырехугольников из пп. 2.5.2, 2.5.3, при отображении (2.120) – (2.122), (2.117) стороны канонического треугольника Ω_ξ^{em} будут переводиться в прямолинейные стороны треугольника Ω_x^{em} в тех наиболее часто встречающихся на практике случаях, когда средние узлы лежат на прямых, соединяющих соответствующие вершины треугольника Ω_x^{em} , т.е. в этих случаях квадратичные отображения сторон будут вырождаться в линейные.

Кроме этого, из (2.123), (2.118), (2.119), очевидно, что поведение поля θ_h на сторонах описывается квадратичными полиномами, точно также, как для биквадратичного и серендипова четырехугольных элементов.

Как и для всех рассмотренных ранее элементов, можно показать (задача 2.22), что данный треугольный элемент с шестью узлами обеспечивает на канонической фигуре Ω_ξ^{em} точное представление полинома с членами $\xi^p \eta^q$, содержащимися в базисных функциях $N_s(\xi)$. Именно, здесь в форме (2.118), (2.119) с соответствующими узлами и базисными функциями (2.114), (2.115) можно точно задать любой квадратичный полином вида $P_{2\Delta}(\xi, \eta) = \sum_{p,q=0}^{p+q \leq 2} c_{pq} \xi^p \eta^q$, что свидетельствует о лучших аппроксимационных свойствах данного элемента по сравнению с линейным треугольным элементом с тремя узлами.

2.7. Вопросы согласованности конечно-элементных разбиений. Элементы с редукцией срединных узлов на сторонах

При формировании конечно-элементных сеток, особенно, с различными типами элементов, логично задаться вопросом о допустимости того или иного вида конечно-элементного разбиения. Основное математическое требование состоит в использовании функций формы (базисных функций) из некоторого конечномерного подпространства V_h функционального пространства V допустимых функций из слабой (обобщенной, вариационной, энергетической) постановки задачи.

Для рассматриваемых задач теплопроводности с симметричным положительно определенным оператором второго порядка слабая постановка формулируется на пространстве $V = \{\eta \in W_2^1(\Omega); \eta = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\theta\}$. Таким образом, приближенное решение должно быть непрерывно и обладать интегрируемыми с квадратом в обобщенном смысле первыми производными. При этом на межэлементных границах первые производные могут иметь разрывы. Кусочно-полиномиальные функции формы и аппроксимации на изопараметрических элементах удовлетворяют этим требованиям, и нужно лишь проверить, что при переходе от одного элемента к другому сохраняется непрерывность приближенного решения. Естественно, что для этого прежде всего должна иметь место непрерывность геометрического перехода от одного элемента к другому.

Данные условия сформулируем в виде двух требований.

I) Для согласованности элементов требуется, чтобы конечные элементы соприкасались друг с другом без перекрытий и лагун. Данное требование назовем *условием согласованности по геометрии*.

II) Для согласованности элементов требуется, чтобы при переходе от одного элемента к другому выполнялись необходимые условия непрерывности для приближаемой полевой функции на общей границе элементов. Данное требование назовем *условием согласованности по полю*.

Рассмотрим конкретные примеры конечно-элементных разбиений.

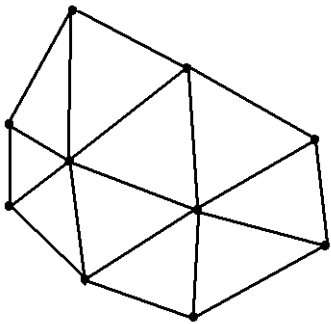


Рис. 2.15, а.

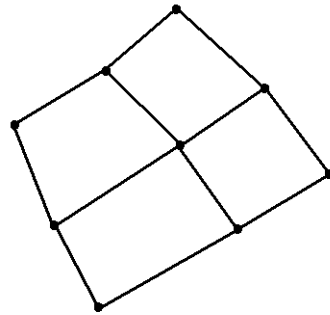


Рис. 2.15, б.

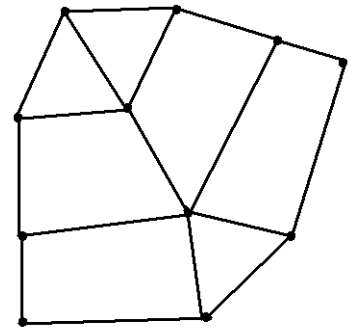


Рис. 2.15, в.

На рис. 2.15 показаны фрагменты конечно-элементной сетки из элементов с линейными аппроксимациями полевой функции: конечно-элементной сетки из линейных треугольных элементов (рис. 2.15, а), сетки из билинейных четырехугольных элементов (рис. 2.15, б) и смешанной сетки, состав-

ленной из линейных треугольных и билинейных четырехугольных элементов (рис. 2.15, в).

Все эти конечно-элементные сетки допустимы. Действительно, все элементы здесь очевидно согласованы по геометрии, так при общих узлах соседние элементы имеют совпадающие стороны (через две точки на плоскости можно провести только одну прямую). На общей стороне как линейные треугольные элементы, так и билинейные четырехугольные элементы будут иметь одинаковые линейные аппроксимации, т.е. имеется и согласованность по полю.

Также согласованы и квадратичные элементы различных типов. Например, на рис. 2.16 показаны фрагменты конечно-элементных сеток из квадратичных элементов: сетки из квадратичных треугольных элементов с шестью узлами (рис. 2.16, а), сетки из четырехугольных элементов серендипова типа с восемью узлами (рис. 2.16, б) и смешанной сетки, состоящей из квадратичных треугольных элементов, биквадратичных четырехугольных элементов и квадратичных четырехугольных элементов серендипова типа (рис. 2.16, в). Все эти конечно-элементные сетки являются согласованными.

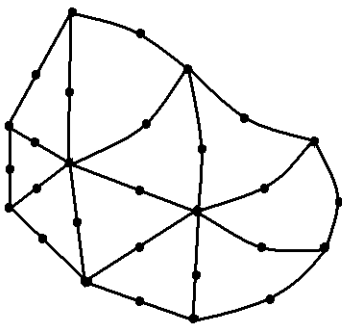


Рис. 2.16, а.

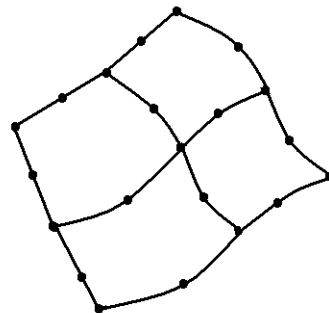


Рис. 2.16, б.

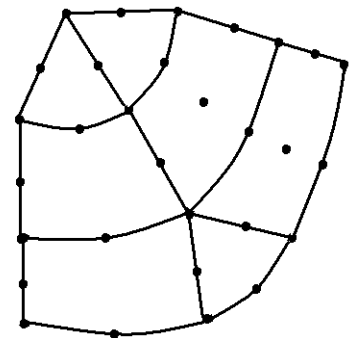


Рис. 2.16, в.

Действительно, все соприкасающиеся элементы согласованы по геометрии, так как при общих узлах соседние элементы имеют совпадающие стороны (через три точки на плоскости можно провести только одну кривую, заданную квадратичной полиномиальной параметризацией). Далее, на общей стороне квадратичные треугольные элементы, биквадратичные четырехугольные элементы и квадратичные четырехугольные элементы серендипова типа будут иметь одинаковые квадратичные лагранжевы аппроксимации по значениям полевой функции в трех узлах. Таким образом, имеется согласованность по полю.

Однако имеются и контрпримеры несогласованных сеток. На рис. 2.17, *а*, показан случай, когда нет согласованности по геометрии. Здесь при переходе от криволинейного квадратичного элемента серендипова типа к двум билинейным четырехугольным элементам наблюдается перекрытие областей, занимаемых данными конечными элементами. Рис. 2.17, *б*, демонстрирует более сложную ситуацию. Здесь при переходе от квадратичного элемента серендипова типа с прямолинейными границами к линейному треугольному и билинейному четырехугольному элементу согласованность по геометрии имеется, но нет согласованности по полю. Действительно, пусть общая граница квадратичного и линейных элементов имеет некоторую естественную координату x , и узлы элементов определяются вдоль этой координаты значениями x_i, x_j, x_k , причем x_k – среднее значение отрезка $[x_i, x_j]$: $x_k = (x_i + x_j)/2$. Тогда, со стороны квадратичного элемента поле θ_h по x изменяется квадратично, принимая значения T_i, T_j, T_k при $x = x_i, x = x_j, x = x_k$, соответственно. Но со стороны линейных элементов поле изменяется линейно от T_i при $x = x_i$ до T_k при $x = x_k$ (для треугольного линейного элемента) и от T_k при $x = x_k$ до T_j при $x = x_j$ (для четырехугольного билинейного элемента), т.е. поведение функции θ_h на всем отрезке $[x_i, x_j]$ со стороны линейных элементов кусочно-линейное. Понятно, что квадратичные и кусочно-линейные зависимости в общем случае различные (рис. 2.18, *а*), и здесь имеем разрыв полевой функции при переходе от квадратичного элемента к линейным.

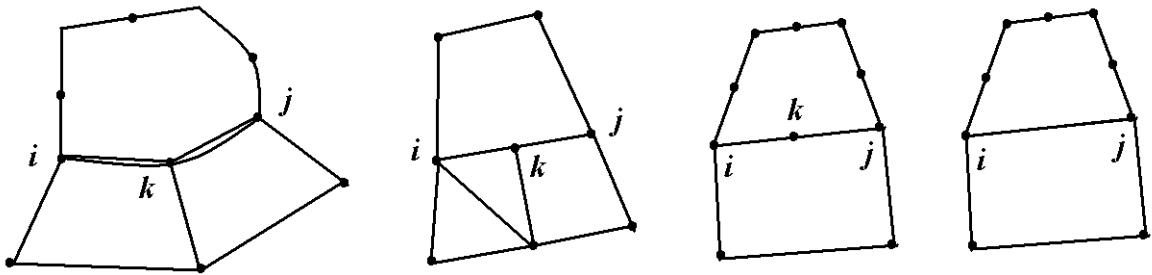


Рис. 2.17, *а*. Рис. 2.17, *б*. Рис. 2.17, *в*. Рис. 2.17, *г*.

Для варианта, показанного на рис. 2.17, *в*, также нет согласованности по полю. Здесь один квадратичный четырехугольный элемент граничит с билинейным четырехугольным элементом. Введя те же обозначения, что и для предыдущего примера, видим (рис. 2.18, *б*), что поведение функции θ_h на отрезке $[x_i, x_j]$ со стороны квадратичного элемента описывается параболическим законом, а со стороны билинейного элемента – линейным.

Снова в общем случае имеем разрыв полевой функции при переходе от квадратичного элемента к линейному.

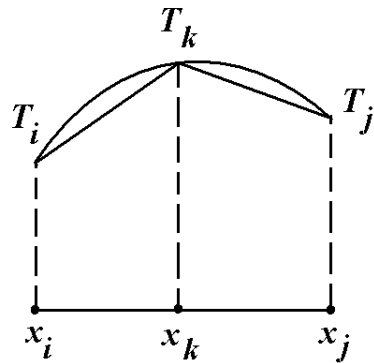


Рис. 2.18, а.

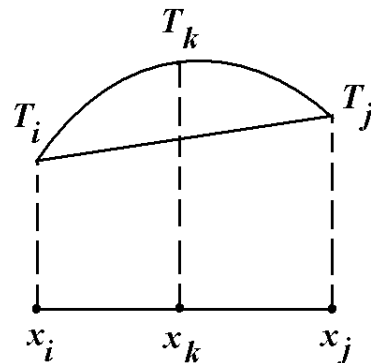


Рис. 2.18, б.

Для корректного перехода от квадратичного элемента к линейному нужна специальная модификация квадратичного элемента, заключающаяся в редукации внутреннего узла на пограничной стороне квадратичного элемента (рис. 2.17, г). При этом нужно использовать новые функции формы для узлов, расположенных в вершинах четырехугольника на стороне с редуцируемым узлом. Таким образом, фактически нужен специальный переходной элемент, имеющий на одних сторонах квадратичное поведение полевой функции, а на сторонах, пограничных с элементами низших порядков – линейное.

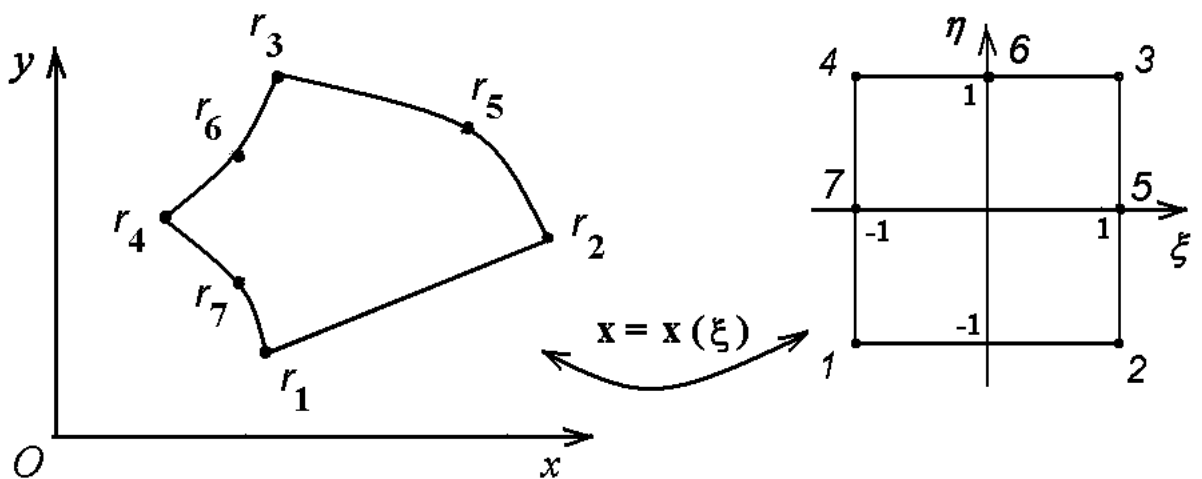


Рис. 2.19.

Например, построим переходной четырехугольный элемент (Рис. 2.19) из серендипова квадратичного четырехугольного элемента, показанного на рис. 2.10 из п. 2.5.3, но с прямолинейной стороной между узлами r_1 и r_2 , при редукции узла r_5 с локальным номером 5 и при соответствующей перенумерации оставшихся срединных узлов ($5 \leftrightarrow 6$, $6 \leftrightarrow 7$, $7 \leftrightarrow 8$). Базисные функции нового *конечного элемента с редуцированным узлом* будем помечать верхним индексом R .

Такой элемент имеет 7 узлов с координатами:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1\}, & \xi_3 &= \{1, 1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1\}, \\ \xi_5 &= \{1, 0\}, & \xi_6 &= \{0, 1\}, & \xi_7 &= \{-1, 0\}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Функции формы $N_j^R(\xi, \eta)$ для срединных узлов с номерами $j = 5, 6, 7$ остаются теми же, что и в (2.95) для срединных узлов 6, 7, 8 серендипова элемента:

$$\begin{aligned} N_5^R(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 + \xi)/2, & N_6^R(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2, \\ N_7^R(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 - \xi)/2. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Для функций формы $N_s^R(\xi, \eta)$, $s = 1, 2, 3, 4$, формулы аналогичны соответствующим для функций (2.96) серендипова элемента с учетом перенумерации срединных узлов и того, что для узлов 1 и 2 имеется только по одному соседствующему срединному узлу. Поэтому, в соответствие с идеологией построения серендиповых конечных элементов, можно записать:

$$\begin{aligned} N_1^R(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_7^R(\xi, \eta), \\ N_2^R(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_5^R(\xi, \eta), \\ N_3^R(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_5^R(\xi, \eta) - (1/2)N_6^R(\xi, \eta), \\ N_4^R(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_6^R(\xi, \eta) - (1/2)N_7^R(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.126)$$

В итоге рассматриваемый изопараметрический переходной элемент характеризуется узлами (2.124), функциями формы (2.125), (2.126) и общими формулами (2.90)–(2.94) для полевой функции и параметрического отображения при замене в (2.90)–(2.94) числа узлов с 8 на 7. Этот элемент обеспечивает линейное поведение поля θ_h на прямолинейной стороне, связывающей узлы 1 (r_1) и 2 (r_2), и квадратичное – на трех остальных сторонах, которые в общем случае могут быть криволинейными.

Заметим, что из изопараметрических элементов можно построить суперпараметрические и субпараметрические конечные элементы, проводя редукцию промежуточного узла на стороне только для представления полевой функции θ_h^{em} или только для параметрического отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$.

Однако такие конечные элементы могут иметь достаточно экзотические применения, и обычно единообразная редукция серединного узла требуется как для представления полевой функции, так и для параметрического отображения.

Другой подход к построению конечных элементов с редукцией степени свободы для промежуточных узлов заключается в принудительном задании значения исключаемой степени свободы для обеспечения требуемого поведения полевой функции на стороне.

Например, пусть снова для четырехугольного серендипового конечного элемента (Рис. 2.10, но при прямолинейной стороне между узлами r_1 и r_2) требуется исключить узел r_5 и обеспечить линейность функции θ_h^{em} на стороне с узлами r_1 и r_2 . Данная сторона для канонического квадрата Ω_ξ^{em} характеризуется условием $\eta = -1$, и на этой стороне

$$\theta_h^{em}(\xi, -1) = N_1(\xi, -1)T_{r_1} + N_5(\xi, -1)T_{r_5} + N_2(\xi, -1)T_{r_2}. \quad (2.127)$$

Для того, чтобы квадратичное представление (2.127) было линейным, очевидно нужно положить

$$T_{r_5} = (T_{r_1} + T_{r_2})/2. \quad (2.128)$$

С учетом (2.128) формула (2.90) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta_h^{em} = & (N_1 + N_5/2)T_{r_1} + (N_2 + N_5/2)T_{r_2} + \\ & + N_3T_{r_3} + N_4T_{r_4} + N_6T_{r_6} + N_7T_{r_7} + N_8T_{r_8}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Здесь имеем только семь узлов аппроксимации, и перенумеровав эти узлы в соответствие с (2.124), получим новые функции формы редуцированного элемента

$$\begin{aligned} N_1^R = N_1 + N_5/2, \quad N_2^R = N_2 + N_5/2, \\ N_3^R = N_3, \quad N_4^R = N_4, \quad N_5^R = N_6, \quad N_6^R = N_7, \quad N_7^R = N_8, \end{aligned} \quad (2.130)$$

где функции $N_j = N_j(\boldsymbol{\xi})$ определены в (2.95), (2.96) или в (2.97).

Как легко проверить, этот подход дает те же функции формы, что и описанный ранее, т.е. формулы (2.125), (2.126) и (2.130) эквивалентны.

В заключение данного раздела отметим, что несогласованные сетки на практике совсем не обязательно должны давать большие погрешности решений. *Использование согласованных конечно-элементных сеток является достаточным условием сходимости* при $h \rightarrow 0$ ($h = \max_m \text{diam} \Omega_x^{em}$)

аппроксимаций $\theta_h \in V_h$ к точному решению $\theta \in V$, если $V_h \subset V$ и последовательность базисов подпространств V_h обладает свойством полноты (см. п. 1.4). Однако *применение согласованных сеток конечных элементов не является необходимым условием сходимости*, и несогласованные (неконформные) конечные элементы также используются в расчетах, особенно для задач с дифференциальными уравнениями высоких порядков (например, в задачах для пластин и оболочек). Более подробно критерии сходимости будут рассмотрены далее в п. 2.10.

Кроме того, существуют и другие требования к конечным элементам, определяющие их качество. Так, для изопараметрических элементов обычно необходимо, чтобы применяемые параметрические отображения были взаимно-однозначными. Поэтому элементы с прямолинейными сторонами должны быть выпуклыми, узлы на сторонах квадратичных элементов не должны располагаться близко к вершинам, а в наиболее оптимальном варианте промежуточные узлы должны совпадать с серединами сторон. Заметим также, что для минимизации оценок погрешности аппроксимаций на элементе желательно, чтобы треугольные и четырехугольные элементы не содержали слишком острых или слишком тупых углов при вершинах, так как в оценки погрешности входят синусы углов в знаменателях соответствующих величин. В общем же случае, чем ближе форма элемента к равносторонней, тем лучше. Эти же соображения справедливы и для трехмерных элементов, которые рассматриваются в следующем разделе.

2.8. Основные трехмерные конечные элементы

2.8.1. Базовые обозначения. Конечные элементы в форме гексаэдров и тетраэдров

Конечные элементы для трехмерных по пространственным переменным задач могут быть построены по аналогии с плоскими элементами. Здесь добавляется еще одна переменная, и изменяется тип базовых фигур: гексаэдры (шестигранные элементы или "кирпичики") вместо четырехугольников, тетраэдры (треугольные пирамиды) вместо треугольников и другие объемные фигуры. В остальном же все основные идеи сохраняются.

Пусть $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ – некоторая простая фигура (тетраэдр, гексаэдр и др.) в пространстве xyz , $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. На данной фигуре задается набор узлов

\mathbf{x}_{r_s} с глобальной нумерацией r_1, r_2, \dots, r_n . Таким образом, общее число узлов у элемента Ω_x^{em} равно $n = n_e(m)$.

Будем считать, что существует параметрическое отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ некоторой канонической фигуры Ω_ξ^{em} (куба, канонического тетраэдра и др.) в пространстве $\xi\eta\zeta$ на область Ω_x^{em} . Для канонической фигуры существует набор узлов $\boldsymbol{\xi}_s = \{\xi_s, \eta_s, \zeta_s\}$ с локальной нумерацией узлов $s = 1, 2, \dots, n$.

Неизвестную приближенную функцию θ_h на элементе зададим в виде:

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}, \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) &= [N_1(\xi, \eta, \zeta), N_2(\xi, \eta, \zeta), \dots, N_n(\xi, \eta, \zeta)], \\ \mathbf{T}^{em} &= \{T_{r_1}, T_{r_2}, \dots, T_{r_n}\}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

где $N_s = N_s(\boldsymbol{\xi}) = N_s(\xi, \eta, \zeta)$ – функции формы, $s = 1, 2, \dots, n$.

Параметрическое отображение канонической фигуры Ω_ξ^{em} на область Ω_x^{em} представляем в аналогичной форме:

$$\mathbf{x} = \{x, y, z\} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.133)$$

где

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}, \quad (2.134)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, z_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, z_{r_2}, \dots, x_{r_n}, y_{r_n}, z_{r_n}\}. \quad (2.135)$$

Как и ранее, конкретизация области Ω_x^{em} , канонической фигуры Ω_ξ^{em} , числа и координат узлов, а также функций формы характеризует отдельные типы конечных элементов. При этом предполагается, что отображение (2.133) – (2.135) устанавливает соответствие между узлами с локальной и глобальной нумерациями по закону: $s \leftrightarrow r_s, s = 1, 2, \dots, n$.

Так, *гексаэдр* (шестигранный элемент, "кирпичик") с *линейной аппроксимацией по каждой из трех переменных* ξ, η, ζ имеет 8 узлов с координатами -1 или 1 по каждой переменной на каноническом кубе $\Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ (Рис. 20). Его функции формы получаются в результате произведений функций формы одномерного линейного элемента по ξ, η и ζ :

$$N_s(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_s \xi)(1 + \eta_s \eta)(1 + \zeta_s \zeta), \quad s = 1, 2, \dots, 8, \quad (2.136)$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\
 \xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, \\
 \xi_5 &= \{-1, -1, 1\}, & \xi_6 &= \{1, -1, 1\}, \\
 \xi_7 &= \{1, 1, 1\}, & \xi_8 &= \{-1, 1, 1\}.
 \end{aligned}
 \tag{2.137}$$

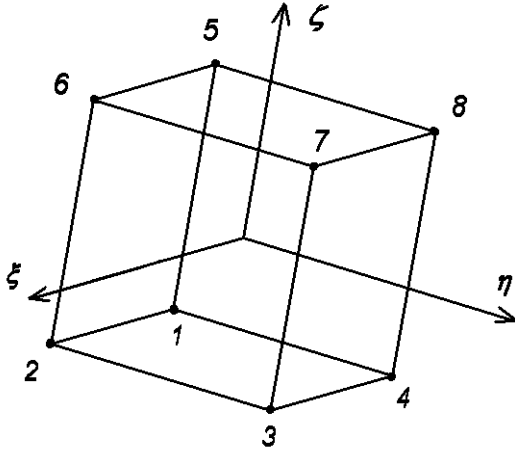


Рис. 2.20.

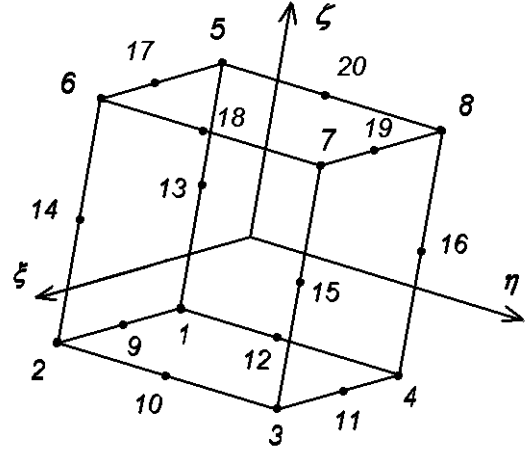


Рис. 2.21.

Гексаэдр серендипова типа с квадратичной аппроксимацией по каждой из трех переменных имеет 20 узлов с координатами $-1, 0$ или 1 по каждой переменной на каноническом кубе $\Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ (Рис. 21). Функции формы для гексаэдра серендипова типа с 20 узлами могут быть построены из тех же соображений, что и плоского четырехугольника.

Именно, для промежуточных узлов на сторонах берем квадратичную базисную функцию по соответствующей координате, равную единице в данном узле, и умножаем ее на линейные функции по двум другим координатам, также равные единице в данном узле. Например, для узла 9 с координатами $\xi_9 = \{0, -1, -1\}$ из рис. 2.21 нужная функция формы будет иметь вид: $N_9(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \xi^2)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$.

Далее, для узлов, расположенных в вершинах гексаэдра, берем функции формы "трилинейного" гексаэдра с 8 узлами и вычитаем из них половинные значения функций для промежуточных узлов, соседствующих с данным узлом. Например, для узла 1 из рис. 2.21 имеем:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) - \frac{1}{2}N_9 - \frac{1}{2}N_{12} - \frac{1}{2}N_{13}.$$

Итогом таких рассуждений будет следующий набор функций формы

$$\begin{aligned}
 N_s(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} & (3\xi_s^2\eta_s^2\zeta_s^2 - 2)[\xi_s^2\eta_s^2\zeta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta)(1 + \zeta_s\zeta) - \\
 & - \xi_s^2\eta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta)(1 - \zeta^2) - \\
 & - \eta_s^2\zeta_s^2(1 + \eta_s\eta)(1 + \zeta_s\zeta)(1 - \xi^2) - \\
 & - \xi_s^2\zeta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \zeta_s\zeta)(1 - \eta^2)],
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

где $s = 1, 2, \dots, 20$.

Здесь узлы $\xi_s = \{\xi_s, \eta_s, \zeta_s\}$ с первого номера по восьмой определяются по (2.137), а узлы с последующими номерами даются формулами:

$$\begin{aligned}
 \xi_9 &= \{0, -1, -1\}, & \xi_{10} &= \{1, 0, -1\}, & \xi_{11} &= \{0, 1, -1\}, \\
 \xi_{12} &= \{-1, 0, -1\}, & \xi_{13} &= \{-1, -1, 0\}, & \xi_{14} &= \{1, -1, 0\}, \\
 \xi_{15} &= \{1, 1, 0\}, & \xi_{16} &= \{1, -1, 0\}, & \xi_{17} &= \{0, -1, 1\}, \\
 \xi_{18} &= \{1, 0, 1\}, & \xi_{19} &= \{0, 1, 1\}, & \xi_{20} &= \{-1, 0, 1\}.
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

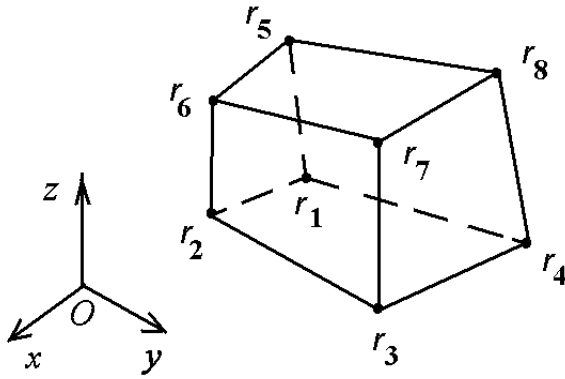


Рис. 2.22.

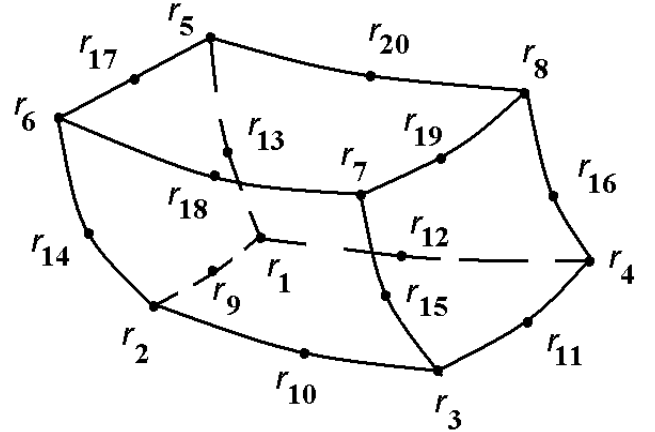


Рис. 2.23.

Примеры гексаэдров с восемью и двадцатью узлами в "физическом" пространстве показаны соответственно на рис. 2.22 и 2.23. Серендипов гексаэдральный элемент может быть криволинейным, при этом каждая его грань описывается квадратичным серендиповым параметрическим отображением, а каждая сторона может быть представлена квадратичной зависимостью от некоторой канонической координаты.

Четырехузловому тетраэдру $\Omega_x^{em} = T_{ijkl}$ с вершинами с номерами i, j, k и l ставится в соответствие канонический тетраэдр Ω_ξ^{em} в пространстве $\xi\eta\zeta$ с вершинами $\xi_1 = \{0, 0, 0\}$, $\xi_2 = \{1, 0, 0\}$, $\xi_3 = \{0, 1, 0\}$, $\xi_4 = \{0, 0, 1\}$ (Рис. 2.24).

Здесь принято, что вершины с номерами i, j, k обходятся против часовой стрелки, если смотреть на них со стороны вершины с номером l . Как видно из рис. 2.24, такой же порядок нумерации принят и для вершин 1, 2, 3, 4 канонического тетраэдра.

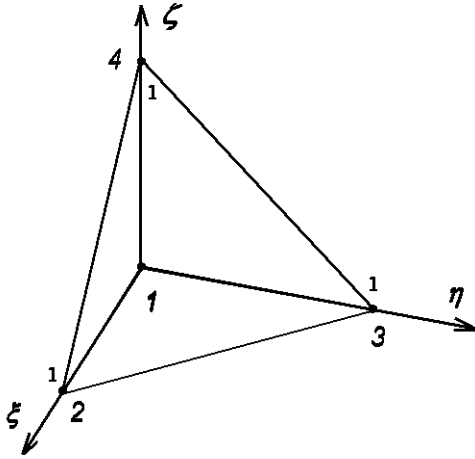


Рис. 2.24.

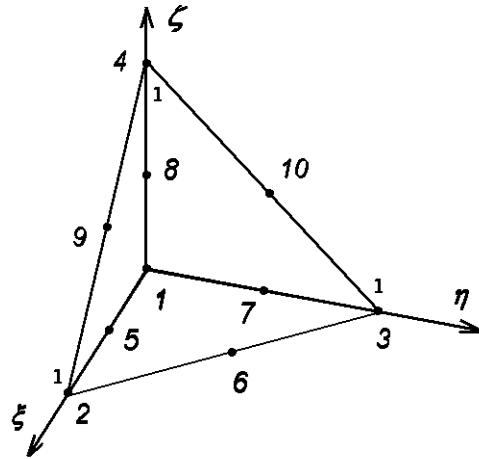


Рис. 2.25.

Для произвольной точки $P = P(x, y, z)$ тетраэдра T_{ijkl} можно ввести *тетраэдральные координаты* или *координаты объема*

$$\begin{aligned} L_i(P) &= V_{T(Pjkl)} / V_{T(ijkl)}, & L_j(P) &= V_{T(Pkli)} / V_{T(ijkl)}, \\ L_k(P) &= V_{T(Pijl)} / V_{T(ijkl)}, & L_l(P) &= V_{T(Pijk)} / V_{T(ijkl)}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

где

$$L_i(P) + L_j(P) + L_k(P) + L_l(P) = 1. \quad (2.141)$$

При этом, для вычисления объема V тетраэдра T_{ijkl} с вершинами $\{x_i, y_i, z_i\}$, $\{x_j, y_j, z_j\}$, $\{x_k, y_k, z_k\}$, $\{x_l, y_l, z_l\}$ удобно использовать формулу

$$V_{T(ijkl)} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k & x_l \\ y_i & y_j & y_k & y_l \\ z_i & z_j & z_k & z_l \end{vmatrix}. \quad (2.142)$$

Для канонического тетраэдра координаты объема (2.140) выражаются простыми соотношениями

$$L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad L_2 = \xi, \quad L_3 = \eta, \quad L_4 = \zeta. \quad (2.143)$$

Эти функции могут быть приняты функциями формы $N_s(\boldsymbol{\xi}) = L_s(\boldsymbol{\xi})$ в (2.131) – (2.135) для *линейного лагранжеева тетраэдрального элемента с четырьмя узлами*.

Квадратичный тетраэдр Ω_{ξ}^{em} будет иметь 10 узлов, которые можно занумеровать следующим образом: $\xi_1 = \{0, 0, 0\}$, $\xi_2 = \{1, 0, 0\}$, $\xi_3 = \{0, 1, 0\}$, $\xi_4 = \{0, 0, 1\}$, $\xi_5 = \{1/2, 0, 0\}$, $\xi_6 = \{1/2, 1/2, 0\}$, $\xi_7 = \{0, 1/2, 0\}$, $\xi_8 = \{0, 0, 1/2\}$, $\xi_9 = \{1/2, 0, 1/2\}$, $\xi_{10} = \{0, 1/2, 1/2\}$ (Рис. 2.25).

Аналогично двумерному квадратичному треугольному элементу функции формы *квадратичного лагранжеса тетраэдра с десятью узлами* можно записать в виде:

$$\begin{aligned} N_s &= (2L_s - 1)L_s, \quad s = 1, 2, 3, 4; \\ N_5 &= 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_2L_3, \quad N_7 = 4L_1L_3, \\ N_8 &= 4L_1L_4, \quad N_9 = 4L_2L_4, \quad N_{10} = 4L_3L_4. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Отметим, что как и для двумерного квадратичного треугольного элемента, функции формы N_s для узлов, расположенных в вершинах, могут быть получены тем же способом, что и для серендипового гексаэдра. Например, $N_1 = L_1 - (1/2)N_5 - (1/2)N_7 - (1/2)N_8$, и т.п.

Примеры тетраэдров с четырьмя и десятью узлами в "физическом" пространстве xuz показаны на рис. 2.26 и 2.27, соответственно. Здесь для тетраэдра с четырьмя узлами приняты дополнительные обозначения для глобальных номеров узлов ($i = r_1, j = r_2, k = r_3, l = r_4$), и показана также точка P для иллюстрации введенных в (2.140) координат объема. Тетраэдральный элемент с десятью узлами может быть криволинейным, при этом каждая его грань описывается квадратичным параметрическим отображением, а каждая сторона может быть представлена квадратичной полиномиальной зависимостью от некоторой естественной координаты.

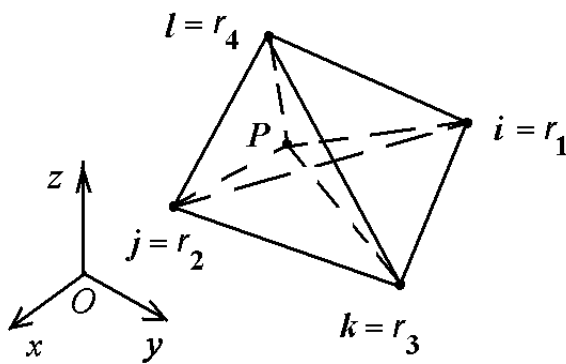


Рис. 2.26.

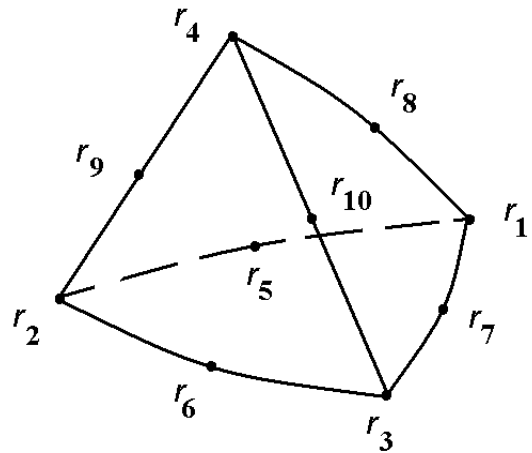


Рис. 2.27.

Итак, обобщениями на трехмерный случай четырехугольных биквадратичных и серендиповых элементов являются гексаэдры с восемью и двадцатью узлами, базисные функции которых обеспечивают полные линейные и квадратичные аппроксимации по каноническим переменным, соответственно (задачи 2.25, 2.26). Обобщениями на трехмерные задачи треугольных линейных и квадратичных элементов являются тетраэдральные элементы с четырьмя и десятью узлами. Базисные функции этих элементов также обеспечивают полные линейные и квадратичные аппроксимации (задача 2.27), соответственно.

Как можно проверить, конечно-элементные сетки, построенные из отдельных типов этих трехмерных элементов, допустимы, т.е. при общих узлах и при общих гранях соприкасающихся элементов гексаэдр с восемью узлами согласован с соседствующими гексаэдрами с восемью узлами, тетраэдр с четырьмя узлами согласован с соседствующими тетраэдрами с четырьмя узлами, и т.д.

2.8.2. Конечные элементы в форме четырехугольных пирамид. Построение элементов в результате коллапса вершин

Для использования смешанных сеток из тетраэдров и гексаэдров нужны специальные опции гексаэдральных элементов, вырождающихся в *пирамидальные элементы с четырехугольными основаниями*.

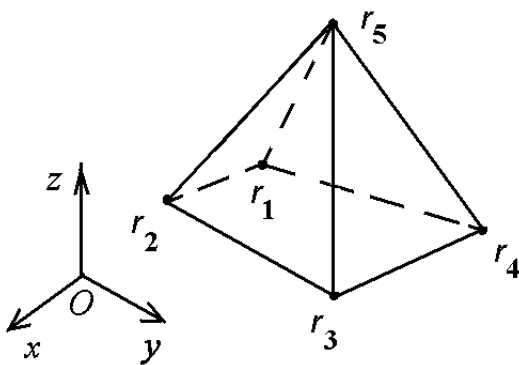


Рис. 2.28.

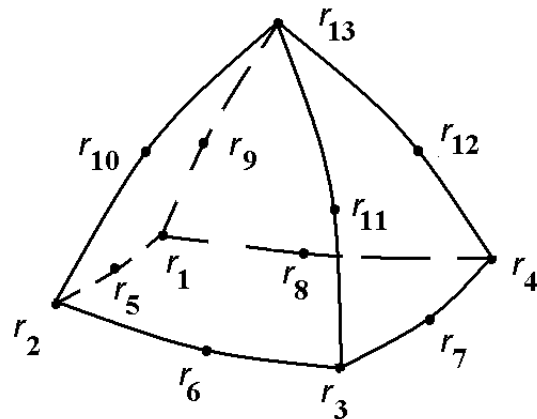


Рис. 2.29.

Для случая вырождения гексаэдров с восемью узлами (рис. 2.21) такие специальные элементы будут иметь только пять узлов и форму четырех-

угольной пирамиды в пространстве xyz (рис. 2.28). Будем считать, что узлы r_1, r_2, r_3, r_4 являются вершинами четырехугольника, лежащего в основании пирамиды, а узел r_5 совпадает с вершиной пирамиды. Данный элемент отличается от всех рассмотренных ранее тем, что при изопараметрическом подходе он может рассматриваться как вырожденный случай гексаэдра (рис. 2.21) с восемью узлами, когда узлы r_5, r_6, r_7, r_8 гексаэдра объединены в один узел r_5 . Для характеристики такого элемента положим

$$\mathbf{x}_{r_5} = \mathbf{x}_{r_6} = \mathbf{x}_{r_7} = \mathbf{x}_{r_8}, \quad T_{r_5} = T_{r_6} = T_{r_7} = T_{r_8}. \quad (2.145)$$

Тогда канонической фигурой Ω_ξ^{em} останется куб $\{[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]\}$, но всего лишь с пятью узлами. Четыре нижние узла этого элемента $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ будут теми же, что и в (2.137), а качестве узла ξ_5 можно будет взять любой узел, лежащий в плоскости $\zeta = 1$, например, $\xi_5 = \{0, 0, 1\}$. Если в (2.131)–(2.137) использовать условия (2.145), то новая функция формы N_5 будет равна сумме функций формы гексаэдра N_5, N_6, N_7, N_8 из (2.136). Выполнив это суммирование, получим: $N_5 = (1 + \zeta)/2$.

В результате функции формы $N_s(\xi, \eta, \zeta)$ для конечного элемента в виде *четырёхугольной пирамиды с пятью узлами* будут даваться формулами

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8, \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8, & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8, \\ N_5 &= (1 + \zeta)/2, \end{aligned} \quad (2.146)$$

при $\Omega_\xi^{em} = \{[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ и при узлах

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\ \xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, & \xi_5 &= \{0, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Для такого элемента отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ (2.133)–(2.135), переводящее канонический куб Ω_ξ^{em} в четырёхугольную пирамиду Ω_x^{em} с вершинами в точках $\mathbf{x}_{r_1}, \dots, \mathbf{x}_{r_5}$ очевидно не будет взаимно однозначным, поскольку все точки грани $\zeta = 1$ будут переводиться в одну вершину \mathbf{x}_{r_5} . Тем не менее, элемент описанной формы с успехом используется на практике.

Остается проверить совместимость четырёхугольной пирамиды с пятью узлами с восьмиузловым гексаэдром и с четырёхузловым тетраэдром. Совместимость с восьмиузловым гексаэдром по основанию пирамиды очевидна, так как при $\zeta = -1$ функции формы (2.146) те же, что и для соответствующей грани гексаэдра.

Рассмотрим теперь какую-нибудь грань пирамиды, например, с узлами r_1, r_2, r_5 . Эта грань в канонической системе координат определяется условием $\eta = -1$, и тогда функции формы (2.146) принимают вид

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \zeta)/4, \quad N_2 = (1 + \xi)(1 - \zeta)/4, \quad N_5 = (1 + \zeta)/2, \\ N_3 &= N_4 = 0, \quad \eta = -1. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Кроме того, поведение θ_h на грани пирамиды $\eta = -1$ описывается формулами

$$\begin{aligned} \theta_h(\xi, -1, \zeta) &= N_1(\xi, -1, \zeta)T_{r_1} + N_2(\xi, -1, \zeta)T_{r_2} + N_5(\zeta)T_{r_5}, \\ \mathbf{x}(\xi, -1, \zeta) &= N_1(\xi, -1, \zeta)\mathbf{x}_{r_1} + N_2(\xi, -1, \zeta)\mathbf{x}_{r_2} + N_5(\zeta)\mathbf{x}_{r_5}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Совокупность выражений (2.147) – (2.149) совсем не напоминает аппроксимации на линейном треугольном элементе. Однако, если перевести квадрат $(\xi, \zeta) \in \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ в канонический треугольник $\{\xi_\Delta \in [0, 1], \eta_\Delta \in [0, 1], 0 \leq \xi_\Delta + \eta_\Delta \leq 1\}$ по отображению $\boldsymbol{\xi}_\Delta = \boldsymbol{\xi}_\Delta(\xi, \zeta)$ ($\boldsymbol{\xi}_\Delta = \{\xi_\Delta, \eta_\Delta\}$)

$$\boldsymbol{\xi}_\Delta = N_5(\zeta) \boldsymbol{\xi}_{\Delta 1} + N_1(\xi, -1, \zeta) \boldsymbol{\xi}_{\Delta 2} + N_2(\xi, -1, \zeta) \boldsymbol{\xi}_{\Delta 3}, \quad (2.150)$$

то видно, что при трех узлах $\boldsymbol{\xi}_{\Delta 1} = \{0, 0\}$, $\boldsymbol{\xi}_{\Delta 2} = \{1, 0\}$, $\boldsymbol{\xi}_{\Delta 3} = \{0, 1\}$ канонического треугольника формула (2.150) дает

$$\xi_\Delta = N_1(\xi, -1, \zeta), \quad \eta_\Delta = N_2(\xi, -1, \zeta), \quad (2.151)$$

причем $N_5(\zeta) = 1 - N_1(\xi, -1, \zeta) - N_2(\xi, -1, \zeta)$.

Теперь ясно, что ξ_Δ, η_Δ можно считать треугольными координатами канонического треугольника:

$$L_2 = \xi_\Delta, \quad L_3 = \eta_\Delta, \quad L_1 = 1 - \xi_\Delta - \eta_\Delta, \quad (2.152)$$

и из (2.147), (2.151), (2.152) для боковой грани пирамиды имеем связь между естественными координатами ξ, ζ канонического квадрата и треугольными координатами ξ_Δ, η_Δ

$$\begin{aligned} L_2 &= \xi_\Delta = N_1(\xi, -1, \zeta) = (1 - \eta)(1 - \zeta)/4, \\ L_3 &= \eta_\Delta = N_2(\xi, -1, \zeta) = (1 + \eta)(1 - \zeta)/4, \\ L_1 &= 1 - L_2 - L_3 = N_5(\zeta) = (1 + \zeta)/2. \end{aligned} \quad (2.153)$$

С использованием треугольных координат (2.153) аппроксимации (2.149) принимают вид обычных формул для линейного треугольного элемента с

тремя узлами. Поэтому эти аппроксимации на треугольной боковой грани пирамиды будут совпадать с представлением функции θ_h со стороны тетраэдрального элемента с четырьмя узлами на этой же грани.

Таким образом, четырехугольная пирамида с пятью углами действительно может служить переходным элементом между четырехузловыми тетраэдрами и восьмиузловыми гексаэдрами.

При вырождении серендипова гексаэдра с двадцатью узлами специальный кривосторонний пирамидальный элемент будет иметь тринадцать узлов (рис. 2.29). Здесь условимся считать, что основание вырожденного элемента содержит узлы r_1, r_2, \dots, r_8 , переходящие соответственно в узлы 1, 2, ..., 8 основания канонической четырехугольной пирамиды, узел r_{13} вершины переходит в узел 13 канонической фигуры, а узлы $r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}$ на сторонах, выходящих из вершины, переходят в соответствующие узлы 9, 10, 11, 12.

Примем, что узлы канонической четырехугольной пирамиды имеют координаты:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\
\xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, \\
\xi_5 &= \{0, -1, -1\}, & \xi_6 &= \{1, 0, -1\}, \\
\xi_7 &= \{0, 1, -1\}, & \xi_8 &= \{-1, 0, -1\}, \\
\xi_9 &= \{-1, -1, 0\}, & \xi_{10} &= \{1, -1, 0\}, \\
\xi_{11} &= \{1, 1, 0\}, & \xi_{12} &= \{-1, 1, 0\}, \\
\xi_{13} &= \{0, 0, 1\}.
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Используя выбранные узлы и комбинируя серендиповы аппроксимации по ξ и η с квадратичной аппроксимацией по ζ , нужные функции формы для конечного элемента в виде четырехугольной пирамиды с тринадцатью узлами можно определить, например, следующим образом:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - q\xi - q\eta)q/4, \\
N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + q\xi - q\eta)q/4, \\
N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + q\xi + q\eta)q/4, \\
N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - q\xi + q\eta)q/4, \\
N_5 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)q^2/2, & N_6 &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)q^2/2, \\
N_7 &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)q^2/2, & N_8 &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)q^2/2, \\
N_9 &= (1 - \xi)(1 - \eta)q(1 - q), & N_{10} &= (1 + \xi)(1 - \eta)q(1 - q), \\
N_{11} &= (1 + \xi)(1 + \eta)q(1 - q), & N_{12} &= (1 - \xi)(1 + \eta)q(1 - q), \\
N_{13} &= (1 - q)(1 - 2q), & q &= (1 - \zeta)/2.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Построенные пирамидальные элементы с функциями формы (2.146) и (2.155) будут обеспечивать согласованность конечно-элементных сеток при переходе от тетраэдральных конечных элементов к гексаэдральным, и наоборот. При этом, как и для двумерных задач, линейные и квадратичные по отдельным каноническим пространственным переменным элементы будут в общем случае не согласованы, и для допустимости переходов от линейных элементов к квадратичным требуется дополнительная редукция узлов у элементов высших порядков. Эта редукция может быть осуществлена по тем же принципам, что и для двумерных квадратичных конечных элементов (см. п. 2.7), но здесь требуется исключить сразу все промежуточные узлы на сторонах грани квадратичного элемента, соприкасающегося с соответствующим линейным элементом.

2.8.3. Призмы с треугольными основаниями

При решении трехмерных задач для тел обобщенной цилиндрической формы возможен подход, при котором трехмерные сетки строятся трансляцией соответствующих плоских сеток вдоль оси z (или криволинейной аналогичной оси). Тогда можно использовать трехмерные конечные элементы, получающиеся трансляцией плоских элементов вдоль этой оси. При такой стратегии функции формы трехмерных элементов можно получить умножением соответствующих функций формы двумерных элементов на линейные или квадратичные функции по z или по ζ .

Например, трансляция линейного треугольного элемента вдоль оси z приводит к конечному элементу в форме *прямой призмы с треугольным основанием* (Рис. 2.30). При дополнительной линейной аппроксимации по переменной $\zeta \in [-1, 1]$ соответствующей канонической фигуры этот элемент будет иметь *шесть узлов*, и его функции формы можно записать в виде

$$N_s = L_s(1 - \zeta)/2, \quad N_{s+3} = L_s(1 + \zeta)/2, \quad s = 1, 2, 3, \quad (2.156)$$

где L_s – координаты площади (2.113) для плоского треугольника ($L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$, $L_2(\xi, \eta) = \xi$, $L_3(\xi, \eta) = \eta$), и считается, что параметрическое отображение (2.133) – (2.135) устанавливает соответствие между узлами с локальной и глобальной нумерациями по закону: $s \leftrightarrow r_s$, $s = 1, 2, \dots, 6$.

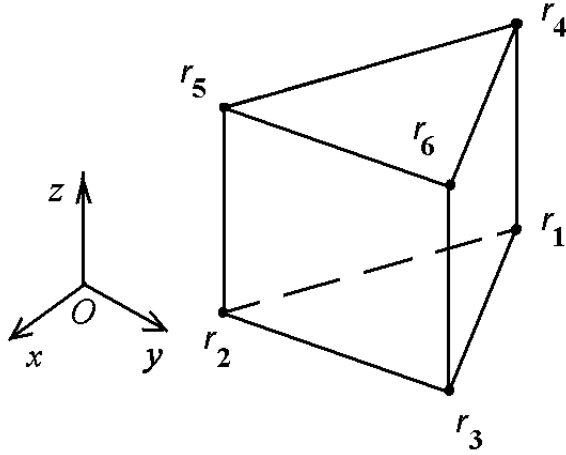


Рис. 2.30.

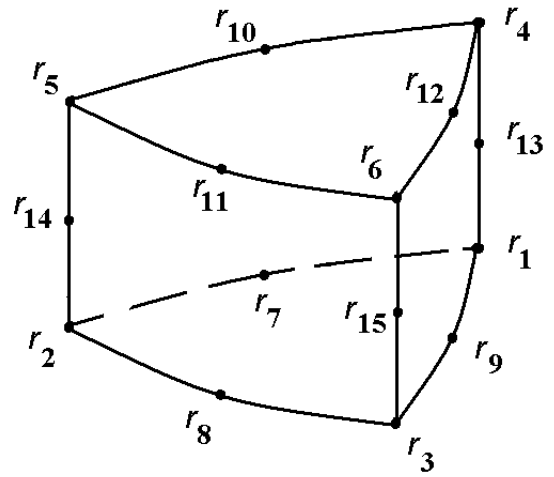


Рис. 2.31.

В случае трансляции квадратичного треугольного элемента вдоль оси z можно построить конечный элемент в форме прямой треугольной призмы с пятнадцатью узлами, лежащими только на ребрах, причем ребра оснований в общем случае могут описываться квадратичными полиномиальными параметрическими зависимостями (Рис. 2.31). Как и для серендиповых четырехугольников и гексаэдров, функции формы, обеспечивающие полное представление квадратичного полинома и выполнение условий согласованности и полноты, подобрать здесь не очень просто. Специальные комбинации линейных и квадратичных функций формы по ξ , η , ζ дают следующий результат

$$\begin{aligned}
 N_s &= [L_s(2L_s - 1)(1 - \zeta) - L_s(1 - \zeta^2)]/2, \\
 N_{s+3} &= [L_s(2L_s - 1)(1 + \zeta) - L_s(1 - \zeta^2)]/2, \quad s = 1, 2, 3, \\
 N_7 &= 2L_1L_2(1 - \zeta), \quad N_8 = 2L_2L_3(1 - \zeta), \quad N_9 = 2L_1L_3(1 - \zeta), \\
 N_{10} &= 2L_1L_2(1 + \zeta), \quad N_{11} = 2L_2L_3(1 + \zeta), \quad N_{12} = 2L_1L_3(1 + \zeta), \\
 N_{13} &= L_1(1 - \zeta^2), \quad N_{14} = L_2(1 - \zeta^2), \quad N_{15} = L_3(1 - \zeta^2),
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

где, как и для линейного призматического элемента, L_s – координаты площади (2.113) для плоского треугольника, $\zeta \in [-1, 1]$, и считается, что параметрическое отображение (2.133) – (2.135) устанавливает соответствие между узлами с локальной и глобальной нумерациями по закону: $s \leftrightarrow r_s$, $s = 1, 2, \dots, 15$.

Итак, как видно из изложенного выше, для трехмерных задач существует большое разнообразие форм базовых конечных элементов с линейной и квадратичной аппроксимациями по каждой из канонических переменных.

Основными элементами являются тетраэдральные и гексаэдральные элементы.

Можно отметить, что даже эти базовые элементы невысокого порядка содержат достаточно большое число узлов. В результате элементные объекты (матрицы и векторы внешних воздействий) могут иметь громоздкую структуру, а поскольку их порядки равны числу узлов элемента, умноженному на число степеней свободы в узле, то и размерности этих объектов достаточно велики. Так, конечный элемент в форме гексаэдра с квадратичными аппроксимациями серендипова типа имеет двадцать узлов. В связи с этим, например, элементная матрица теплопроводности будет иметь порядок, равный 20×20 . Для более сложной задачи с большим числом степеней свободы в узлах, например, для задачи теории упругости, где в каждом узле в трехмерном случае будет три неизвестных перемещения по осям координат, соответствующая элементная матрица жесткости для гексаэдра с двадцатью узлами будет уже иметь размер 60×60 .

Такие усложнения нормальны для трехмерных задач, но, как будет показано в следующем разделе, в методе конечных элементов имеется замечательная техника, позволяющая формировать компоненты элементных объектов численно чрезвычайно экономичным способом, причем с достаточной степенью точности.

2.9. Техника вычислений конечно-элементных объектов для изопараметрических элементов

При рассмотрении плоских и пространственных конечных элементов остались пока в стороне важнейшие вопросы, связанные с построением элементных объектов: элементных матриц и векторов внешних воздействий, действующих на элементы.

Например, для стационарных задач теплопроводности нужно уметь формировать элементные матрицы теплопроводности \mathbf{K}^{em} и элементные векторы \mathbf{F}_a^{em} активных тепловых источников. Согласно изложенному в первой главе (см. (1.129)–(1.133)) для отдельного конечного элемента требуется вычислять следующие конечно-элементные объекты:

$$\mathbf{K}^{em} = \mathbf{K}_k^{em} + \mathbf{K}_c^{em}, \quad \mathbf{F}_a^{em} = \mathbf{F}_b^{em} + \mathbf{F}_{sf}^{em} + \mathbf{F}_d^{em}, \quad (2.158)$$

$$\mathbf{K}_k^{em} = \int_{\Omega^{em}} \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}^{em*}, \quad (2.159)$$

$$\mathbf{K}_c^{em} = \int_{\Gamma_c^{em}} h_{fh} \mathbf{N}^{em} \mathbf{N}^{em*} d\Gamma, \quad (2.160)$$

$$\mathbf{F}_b^{em} = \int_{\Omega^{em}} W \mathbf{N}^{em} d\Omega, \quad (2.161)$$

$$\mathbf{F}_{sf}^{em} = \int_{\Gamma_q^{em}} q_{\Gamma h} \mathbf{N}^{em} d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{em}} h_{fh} \theta_{bh} \mathbf{N}^{em} d\Gamma. \quad (2.162)$$

(Здесь можно заметить, что главные граничные условия могут быть учтены по общей методике п. 1.8, согласно которой элементный вектор \mathbf{F}_d^{em} можно явно не строить.)

Для большинства конечных элементов, не выходящих на границы Γ_c и Γ_q области, из (2.158) – (2.162) остаются только два основных объекта: $\mathbf{K}^{em} = \mathbf{K}_k^{em}$ и $\mathbf{F}_a^{em} = \mathbf{F}_b^{em}$. Но для элементов с граничными условиями конвективного теплообмена и теплового потока нужны еще \mathbf{K}_c^{em} и \mathbf{F}_{sf}^{em} .

Сосредоточимся вначале на вычислении основных объектов: элементной матрице теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} и элементном векторе \mathbf{F}_b^{em} интенсивности источников тепла.

Проблема состоит в том, что изопараметрический конечный элемент Ω^{em} характеризуется параметрическим отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, связывающим область $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с некоторой канонической областью Ω_ξ^{em}

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.163)$$

и законом аппроксимации на канонической области

$$\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^{em}. \quad (2.164)$$

В связи с этим, для нахождения элементной матрицы теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} и элементного вектора \mathbf{F}_b^{em} интенсивности источников тепла желательно в интегралах (2.159), (2.161) осуществить замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$.

Для перехода к интегрированию по $\boldsymbol{\xi}$ в (2.159), (2.161) требуется матрица Якоби \mathbf{J} для отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, которая для трехмерного случая имеет вид ($\mathbf{x} = \{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta, \zeta\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix}, \quad J_{ij} = \partial x_j / \partial \xi_i, \quad (2.165)$$

а для двумерных задач на плоскости Oxy не содержит третьей строки и третьего столбца.

Из курсов математического анализа следует, что имеют место формулы ($\nabla_\xi = \{\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \partial/\partial\xi_3\}$, $d\Omega_\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$):

$$\nabla = \nabla_x = \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_\xi, \quad J_{ji}^{-1} = \partial\xi_i/\partial x_j, \quad (2.166)$$

$$d\Omega = d\Omega_x = \det \mathbf{J} d\Omega_\xi. \quad (2.167)$$

Тогда, используя (2.166), (2.167), интегралы (2.159), (2.161) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{K}_k^{em} = \int_{\Omega_\xi^{em}} \mathbf{B}_\xi^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_\xi \det \mathbf{J} d\Omega_\xi, \quad (2.168)$$

$$\mathbf{F}_b^{em} = \int_{\Omega_\xi^{em}} W \mathbf{N}^{em} \det \mathbf{J} d\Omega_\xi, \quad (2.169)$$

где

$$\mathbf{B}_\xi = \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_\xi \mathbf{N}^{em*}, \quad \mathbf{N}^{em} = \mathbf{N}^{em*}(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.170)$$

Хотя интегралы в (2.168), (2.169) задаются по достаточно простой канонической области Ω_ξ^{em} , подынтегральные функции в (2.168), (2.169) имеют достаточно громоздкую форму (если смотреть на аналитические выражения для подынтегральных функций). Действительно, при полиномиальном параметрическом отображении (2.163) функция $\det \mathbf{J}$ является полиномом, а \mathbf{J}^{-1} из (2.170) – функция, имеющая полиномы от ξ_j как в числителе, так и в знаменателе. Таким образом, аналитическое вычисление интегралов (2.168), (2.169) сопряжено со значительными трудностями, и результирующие аналитические формулы могут иметь чрезвычайно громоздкий вид.

Ключом к решению проблемы вычисления интегралов (2.168), (2.169) является применение простых формул численного интегрирования.

При численном вычислении интеграла

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} f(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_\xi \quad (2.171)$$

от некоторой подынтегральной функции $f(\boldsymbol{\xi})$ с использованием квадратурной (кубатурной) формулы имеем:

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} f(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_\xi \approx \sum_{m=1}^n W_m^{(q)} f(\boldsymbol{\xi}_m^{(q)}), \quad (2.172)$$

где $W_m^{(q)}$ – веса квадратурной формулы, а $\boldsymbol{\xi}_m^{(q)}$ – узлы квадратурной формулы (в общем случае отличающиеся от узлов конечного элемента).

Для МКЭ можно отметить некоторые особенности, касающиеся применения формул численного интегрирования. Поскольку в МКЭ вся область Ω_h разбивается на маленькие конечные элементы, на которых неизвестные функции изменяются не очень сильно, а аппроксимациями и параметрическими отображениями являются полиномиальные представления невысокого порядка, то можно надеяться, что для МКЭ подынтегральная функция $f(\xi)$ на области Ω_ξ^{em} также изменяется мало и может быть приближена полиномом невысокой степени. В связи с этим для численного вычисления интегралов по (2.172) можно выбирать квадратурные формулы с небольшим числом весов и узлов n . Кроме того, интегралы по (2.172) необходимо вычислять очень много раз для формирования элементных матриц и векторов для каждого конечного элемента. Поэтому для повышения скорости расчетов желательно минимизировать число узлов квадратурных формул.

Как известно из базовых курсов численных методов, имеются три основных класса (несоставных) квадратурных формул. Все эти формулы строятся таким образом, чтобы они были точны для многочленов как можно большей степени. В формулах Ньютона–Котеса фиксируются узлы (обычно они расположены равноотстоящими друг от друга), а ищутся веса. В формулах Чебышева, наоборот, фиксируются веса и находятся узлы. Наконец, формулы Гаусса–Лежандра строятся так, что ищутся как узлы, так и веса для достижения как можно большей точности интегрирования для полиномов. Существуют еще формулы промежуточного типа, как например, формулы Гаусса–Лобатто или формулы Маркова, в которых фиксируется некоторая часть узлов в вершинах области Ω_ξ^{em} , а определяются оставшиеся узлы и веса квадратурной формулы. Для МКЭ наилучшим решением признано использование формул Гаусса–Лежандра, имеющих при одинаковом числе узлов наибольший порядок точности в сравнении с другими квадратурными формулами. Это позволяет достичь наилучшего соотношения между быстротой и точностью вычислений. Некоторым недостатком формул Гаусса–Лежандра является то, что узлы для этих формул во многих случаях имеют иррациональные значения, и, следовательно, не точно представляются в численной арифметике, а также не совпадают с узлами конечных элементов. По этой причине получили также распространение (но в меньшей степени) и формулы Гаусса–Лобатто или формулы Маркова, в которых часть узлов интегрирования выбирается совпадающими с вершинами конечных элементов.

Применение квадратурных формул позволяет чрезвычайно упростить

процесс вычисления интегралов типа (2.168), (2.169). Основная стратегия заключается в том, что значения подынтегральных функций $f(\boldsymbol{\xi})$ для всех основных составляющих вычисляются в узлах квадратурных формул $\boldsymbol{\xi}_m^{(q)}$, и, следовательно, работа там, где это необходимо, идет не с аналитическими выражениями, а с численными. Так, матрица Якоби \mathbf{J} параметрического отображения является в узлах $\boldsymbol{\xi}_m^{(q)}$ просто числовой матрицей размера 3×3 для трехмерных задач или размера 2×2 – для двумерных. Поэтому обратная к ней матрица $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_m^{(q)})$ легко вычисляется на компьютере, как обратная к числовой матрице. Аналогично программируются и другие громоздкие для аналитических преобразований вычисления. В результате процедуры формирования элементных матриц и векторов внешних источников осуществляются численно очень быстро, и при этом численные расчеты имеют высокую точность. Данная численная техника вычисления элементных объектов для изопараметрических элементов является одной из основных при практической реализации МКЭ.

Опишем некоторые основные квадратурные формулы, используемые для численного интегрирования в (2.172) для базовых канонических областей Ω_ξ^{em} . При этом далее через n_p обозначена максимальная степень точно интегрируемого многочлена.

Для интегрирования по каноническому отрезку $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1]$ узлы интегрирования $\boldsymbol{\xi}_m^{(q)}$ имеют только одну координату $\xi_m^{(q)}$, и основные формулы Гаусса приводятся в таблице 2.1.

Таблица 2.1: Квадратурные формулы для отрезка

n	$\xi_m^{(q)}$	$W_m^{(q)}$	n_p
1	0	2	1
2	$\pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.577350269189626$	1	3
3	$\pm \sqrt{3/5} \approx \pm 0.774596669241483$	5/9	5
	0	8/9	

Для вычисления интегралов по каноническому квадрату $\{\xi, \eta\} \in \Omega_\xi^{em} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ можно использовать мультипликативные квадратурные формулы

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n W_m^{(q)} W_p^{(q)} f(\xi_m^{(q)}, \eta_p^{(q)}), \quad (2.173)$$

где $W_m^{(q)}$, $\xi_m^{(q)}$ – веса и узлы квадратурных формул для отрезка $[-1, 1]$ из таблицы 2.1; а $\eta_p^{(q)}$ – тот же набор узлов, что и $\xi_m^{(q)}$.

Общее число узлов здесь будет равняться n^2 , а точность данных квадратурных формул по каждой отдельной координате ξ и η будет такая же, что и для соответствующих квадратурных формул для отрезка. Таким образом, формула (2.173) с весами и узлами из таблицы 2.1 при $n = 1$ будет точна для многочленов первой степени по ξ и по η , при $n = 2$ – для многочленов третьей степени по ξ и по η , а при $n = 3$ – для многочленов пятой степени по ξ и по η .

Аналогично можно построить мультипликативные квадратурные формулы для вычисления интегралов по каноническому кубу $\{\xi, \eta, \zeta\} \in \Omega_\xi^{em} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n W_m^{(q)} W_p^{(q)} W_r^{(q)} f(\xi_m^{(q)}, \eta_p^{(q)}, \zeta_r^{(q)}) \quad (2.174)$$

с теми же аппроксимационными свойствами.

Существуют и немультимпликативные квадратурные формулы для квадрата и куба. Например, в вычислительном комплексе ANSYS [67] для двадцатиузловых серендиповых гексаэдров в различных задачах используются как мультипликативная формула Гаусса с $2 \times 2 \times 2$ узлами интегрирования, так и квадратурная формула с 14 узлами [76, 78], имеющая пятый порядок точности ($n_p = 5$). В этой формуле для получения приближенного значения интеграла по каноническому кубу Ω_ξ^{em} используется выражение (2.172) при $n = 14$. Первые восемь узлов интегрирования здесь имеют веса $W_m^{(q)} = 121/361$ и координаты $\xi_m^{(q)}, \eta_m^{(q)}, \zeta_m^{(q)} = \pm\sqrt{19/33}$, $m = 1, 2, \dots, 8$. Шесть других узлов интегрирования имеют веса $W_m^{(q)} = 320/361$ и координаты: $\{\xi_m^{(q)} = \pm\sqrt{19/30}, \eta_m^{(q)} = \zeta_m^{(q)} = 0\}$, $m = 9, 10$; $\{\xi_m^{(q)} = 0, \eta_m^{(q)} = \pm\sqrt{19/30}, \zeta_m^{(q)} = 0\}$, $m = 11, 12$; $\{\xi_m^{(q)} = 0, \eta_m^{(q)} = 0, \zeta_m^{(q)} = \pm\sqrt{19/30}\}$, $m = 13, 14$. Данная формула имеет минимальное число узлов в классе кубатурных формул пятого порядка точности, у которых начало координат не является узлом интегрирования (см. формулу 22 на стр. 280 в [32]).

Заметим, в мультипликативной формуле Гаусса пятого порядка точности имеется $3 \times 3 \times 3 = 27$ узлов, что в два раза больше, чем в приведенной выше немультимпликативной кубатурной формуле с 14 узлами. Поэтому с точки зрения быстроты вычислений элементных матриц для канонического куба формула с 14 узлами предпочтительнее, чем формула с $3 \times 3 \times 3 = 27$ узлами. Правда, одинаковый порядок точности, равный пяти, еще не означает, что эти формулы одинаково точны. Мультипликативная формула

Гаусса обеспечивает точное вычисление трехмерных интегралов по каноническому кубу для любого полинома $\xi^i \eta^j \zeta^k$ со степенями $0 \leq i, j, k \leq 5$, в то время как немультимпликативная формула с 14 узлами точно вычисляет интегралы по кубу для полиномов $\xi^i \eta^j \zeta^k$ при $0 \leq i + j + k \leq 5$.

Квадратурные формулы для канонического треугольника Ω_ξ^{em} традиционно (но не всегда) приводятся с весами, сумма которых равна единице. Поскольку площадь канонического треугольника равна одной второй, то в соответствии с принятым правилом квадратурные формулы для треугольника представим в виде

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n W_m^{(q)} f(\xi_m^{(q)}, \eta_m^{(q)}), \quad (2.175)$$

где Ω_ξ^{em} – канонический прямоугольный треугольник с катетами, равными единице.

Для вычисления интегралов по каноническому треугольнику Ω_ξ^{em} здесь удобно использовать формулу

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma d\xi d\eta \approx \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!}, \quad (2.176)$$

где $L_1 = 1 - \xi - \eta$, $L_2 = \xi$, $L_3 = \eta$.

Среди множества известных квадратурных формул в таблице 2.2 приведены только некоторые из наиболее употребительных формул. В частности, в конечно-элементном комплексе ANSYS [67] для треугольника используются формулы под номерами 1, 2, 5 из данной таблицы.

Для канонического тетраэдра Ω_ξ^{em} кубатурные формулы также традиционно записываются с весами, сумма которых равна единице. С учетом этого, кубатурные формулы для канонического тетраэдра (его объем $V = 1/6$) представим в виде:

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \frac{1}{6} \sum_{m=1}^n W_m^{(q)} f(\xi_m^{(q)}, \eta_m^{(q)}, \zeta_m^{(q)}), \quad (2.177)$$

где теперь Ω_ξ^{em} – канонический тетраэдр.

Наиболее употребительные кубатурные формулы для тетраэдра собраны в таблицу 2.3.

Заметим, что для вычисления интегралов по каноническому тетраэдру Ω_ξ^{em} может быть использована формула

$$I = \int_{\Omega_\xi^{em}} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta d\xi d\eta d\zeta \approx \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!}, \quad (2.178)$$

Таблица 2.2: Квадратурные формулы для треугольника

N_o	n	$\xi_m^{(q)}$	$\eta_m^{(q)}$	$W_m^{(q)}$	n_p
1	1	1/3	1/3	1	1
2	3	2/3	1/6	1/3	2
		1/6	2/3	1/3	
		1/6	1/6	1/3	
3	3	1/2	1/2	1/3	2
		1/2	0	1/3	
		0	1/2	1/3	
4	4	1/3	1/3	-27/48	3
		0.6	0.2	25/48	
		0.2	0.6	25/48	
		0.2	0.2	25/48	
5	6	0.091576213509661	0.091576213509661	0.109951743655322	4
		0.091576213509661	0.816847572980459	0.109951743655322	
		0.816847572980459	0.091576213509661	0.109951743655322	
		0.445948490915965	0.445948490915965	0.223381589678011	
		0.445948490915965	0.108103018168070	0.223381589678011	
		0.108103018168070	0.445948490915965	0.223381589678011	

где $L_1 = 1 - \xi - \eta$, $L_2 = \xi$, $L_3 = \eta$, $L_4 = \delta$.

Для интегрирования по канонической четырехугольной пирамиде с функциями формы (??) или (2.155) можно использовать те же кубатурные формулы, что и для гексаэдра. Например, ANSYS использует мультипликативную формулу Гаусса с $2 \times 2 \times 2$ узлами интегрирования [67].

В завершение данного раздела остановимся на вычислении элементных объектов, выражающихся через интегралы по границам конечных элементов. В задачах теплопроводности такими объектами являются матрицы \mathbf{K}_c^{em} и векторы \mathbf{F}_{sf}^{em} , определенные по (2.160), (2.162). Для подобных объектов в трехмерных задачах требуется вычислять интегралы вида

$$I_\Gamma = \int_{\Gamma_{bx}^{em}} f(\mathbf{N}^{em}) d\Gamma, \quad (2.179)$$

где Γ_{bx}^{em} – какая-то из граней конечного элемента Ω_x^{em} , \mathbf{N}^{em} – вектор функций формы конечного элемента.

Пусть грань Γ_{bx}^{em} при параметрическом отображении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$: $\Omega_\xi^{em} \rightarrow \Omega_x^{em}$ является прообразом грани $\Gamma_{b\xi}^{em}$ канонического конечного элемента. Обозначим через u, v – координаты для грани $\Gamma_{b\xi}^{em}$, которые являются также криволинейными координатами для грани Γ_{bx}^{em} . Пусть $\mathbf{N}_b^{em} = \mathbf{N}_b^{em}(u, v)$ – сужение вектор-функций формы на $\Gamma_{b\xi}^{em}$.

Таблица 2.3: Кубатурные формулы для тетраэдра

No	n	$\xi_m^{(q)}$	$\eta_m^{(q)}$	$\zeta_m^{(q)}$	$W_m^{(q)}$	n_p
1	1	1/4	1/4	1/4	1	1
2	4	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	1/4	2
		$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + 3\sqrt{5})/20$	1/4	
		$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + 3\sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	1/4	
		$(5 + 3\sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	1/4	
3	5	1/4	1/4	1/4	-4/5	3
		1/6	1/6	1/6	9/20	
		1/6	1/6	1/3	9/20	
		1/6	1/3	1/6	9/20	
		1/3	1/6	1/3	9/20	
4	11	1/4	1/4	1/4	-1184/(125 · 6!)	4
		1/14	1/14	1/14	686/(125 · 6!)	
		1/14	1/14	11/14	686/(125 · 6!)	
		1/14	11/14	1/14	686/(125 · 6!)	
		11/14	1/14	1/14	686/(125 · 6!)	
		$(14 - \sqrt{70})/56$	$(14 - \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	
		$(14 - \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	
		$(14 - \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	$14 - \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	
		$(14 + \sqrt{70})/56$	$14 - \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	
		$(14 + \sqrt{70})/56$	$(14 + \sqrt{70})/56$	$(14 - \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	
		$(14 + \sqrt{70})/56$	$(14 - \sqrt{70})/56$	$(14 - \sqrt{70})/56$	448/(25 · 6!)	

Как известно из курсов математического анализа и дифференциальной геометрии, риманова метрика на поверхности Γ_{bx}^{em} задается формулами

$$g_{11} = E = \mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,u}, \quad g_{22} = G = \mathbf{x}_{,v} \cdot \mathbf{x}_{,v}, \quad g_{12} = F = \mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,v}, \quad (2.180)$$

и для дифференциала площади поверхности справедливо выражение

$$d\Gamma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \quad (2.181)$$

С учетом (2.180), (2.181), интегралы (2.179) могут быть вычислены по грани $\Gamma_{b\xi}^{em}$ канонического конечного элемента следующим образом:

$$I_\Gamma = \int_{\Gamma_{b\xi}^{em}} f(\mathbf{N}_b^{em}(u, v)) \sqrt{(\mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,u})(\mathbf{x}_{,v} \cdot \mathbf{x}_{,v}) - (\mathbf{x}_{,u} \cdot \mathbf{x}_{,v})^2} dudv. \quad (2.182)$$

Для рассмотренных базовых трехмерных конечных элементов грани $\Gamma_{b\xi}^{em}$ канонических фигур Ω_ξ^{em} являются канонические треугольники и квадраты. Поэтому для вычисления интегралов (2.182) можно с успехом использовать квадратурные формулы, представленные выше.

Для двумерных задач интегралы (2.179) являются криволинейными одномерными интегралами, и для границы Γ_ξ^{em} достаточно одной координаты. Обозначим такую координату через s , а через $\mathbf{N}_b^{em}(s)$ – параметрическое представление сужения вектор-функций формы на границу $\Gamma_{b\xi}^{em}$. Тогда, $d\Gamma = |\mathbf{x},s| ds$, и, следовательно,

$$I_\Gamma = \int_{\Gamma_{b\xi}^{em}} f(\mathbf{N}_b^{em}(s)) |\mathbf{x},s| ds. \quad (2.183)$$

Для вычисления интегралов (2.183) можно использовать квадратурные формулы Гаусса–Лежандра для отрезка с узлами и весами из таблицы 2.1.

Таким образом, численное интегрирование оказывается эффективным инструментом для вычисления различных элементных матриц и векторов, представленных объемными, поверхностными и криволинейными интегралами.

2.10. Критерии и оценки сходимости

Дополнительные требования связаны с полнотой конечно-элементных аппроксимаций.

Из требования полноты следует, что приближенная функция на отдельном конечном элементе должна точно воспроизводить постоянную функцию, как для задач стационарной теплопроводности, или точно воспроизводить деформации тела как жесткого целого, как для задач теории упругости (см. главу 3).

Если $\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = T = \text{const}$ на Ω_ξ^{em} , то для всех узлов $\boldsymbol{\xi}_j$ лагранжевых и серендиповых конечных элементов с n узлами $T_{r_j} = T$, $j = 1, 2, \dots, n$; и аппроксимация $\theta_h^{em}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\theta^{em}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T} = \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) T_{r_j}$ дает $T = \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) T$, т.е. должно выполняться равенство*

$$\sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) = 1, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega_\xi^{em}. \quad (2.184)$$

Очевидно, что для задач теплопроводности все рассмотренные ранее лагранжевы и серендиповы элементы удовлетворяют этому требованию.

Для изопараметрических конечных элементов справедливо также следующее утверждение.

Если аппроксимация θ_h полевой функции $\theta(\mathbf{x})$ дается на Ω_x^{em} изопараметрическим представлением

$$\theta_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) T_{r_j}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em} \quad (2.185)$$

при взаимно-однозначном отображении $\Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em} \rightarrow \Omega_x^{em}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ вида

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_{r_j}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em}, \quad (2.186)$$

где n – количество узлов $\boldsymbol{\xi}_j \in \Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em}$, $\mathbf{x}_{r_j} = \mathbf{x}_{r_j}(\boldsymbol{\xi}_j)$ – узлы конечного элемента на Ω_x^{em} , и выполнены условия полноты (2.184), то произвольная линейная функция на Ω_x^{em} может быть точно представлена по (2.185), (2.186).

◀ Пусть $\theta_l(\mathbf{x})$ – произвольная линейная функция на Ω_x^{em} , т.е. $\theta_l(\mathbf{x}) = c_0 + \mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{x}$, где c_0 , \mathbf{c}_1 – некоторые постоянные. Тогда в узлах \mathbf{x}_{r_j} конечного элемента функция $\theta_l(\mathbf{x})$ принимает значения $T_{r_j} = \theta_l(\mathbf{x}_{r_j}) = c_0 + \mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{x}_{r_j}$. Построим функцию $\theta_h(\boldsymbol{\xi})$ с использованием данных значений:

$$\theta_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) T_{r_j} = c_0 \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{c}_1^* \cdot \sum_{j=1}^n N_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_{r_j}.$$

Используя (2.184), (2.186), имеем: $\theta_h(\boldsymbol{\xi}) = c_0 + \mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{x} = \theta_l(\mathbf{x})$. ▶

Из приведенного доказательства видно, что данное утверждение справедливо как для двумерных, так и для одномерных и трехмерных изопараметрических конечных элементов.

Другие требования (иногда, эвристические) к конечным элементам изложены, например, в [35].

Задачи к главе 2

2.1. Используя (1.84), найдите коэффициенты элементной матрицы теплопроводности K_{krq}^{em} ($p, q = 1, 2$) для одномерного линейного лагранжева конечного элемента в случае постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и коэффициента теплопроводности, линейно изменяющегося от $k_i = k(x_i)$ до $k_j = k(x_j)$.

2.2. Найдите коэффициенты элементной матрицы теплопроводности K_{krq}^{em} ($p, q = 1, 2$) и элементного вектора F_{Wp}^{em} ($p = 1, 2$) для одномерного линейного лагранжева конечного элемента в случае постоянного коэффициента теплопроводности $k = k_m$ и

линейно изменяющейся функции площади поперечного сечения A от $A_i = A(x_i)$ до $A_j = A(x_j)$. При вычислениях коэффициентов K_{kpq}^{em} можно использовать представление (1.84), а при вычислениях коэффициентов F_{Wp}^{em} – первое из равенств (1.86).

2.3. Выведите формулы (2.16) для элементной матрицы теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} и (2.17) для элементного вектора \mathbf{F}_W^{em} активных тепловых источников для квадратичного лагранжева элемента при постоянных $A = A_m$, $k = k_m$ и $W = W_m$.

2.4. Используя (1.84) и (2.11), найдите коэффициенты элементной матрицы теплопроводности K_{kpq}^{em} ($p, q = 1, 2, 3$) для одномерного квадратичного лагранжева конечного элемента в случае постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и коэффициента теплопроводности, линейно изменяющегося от $k_i = k(x_i)$ до $k_j = k(x_j)$.

2.5. Используя первое из равенств (1.86) и (2.11), найдите компоненты элементного вектора F_{Wp}^{em} ($p = 1, 2, 3$) для одномерного квадратичного лагранжева конечного элемента в случае постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и линейно изменяющейся от $W_i = W(x_i)$ до $W_j = W(x_j)$ функции W объемной плотности интенсивности тепловых источников.

2.6. Выведите формулы (2.24) для элементной матрицы теплопроводности \mathbf{K}_k^{em} и (2.25) для элементного вектора \mathbf{F}_W^{em} активных тепловых источников для кубического лагранжева элемента при постоянных $A = A_m$, $k = k_m$ и $W = W_m$.

2.7. Используя первое из равенств (1.86) и (2.20), найдите компоненты элементного вектора F_{Wp}^{em} ($p = 1, 2, 3, 4$) для одномерного кубического лагранжева конечного элемента в случае постоянной площади поперечного сечения $A = A_m$ и линейно изменяющейся от $W_i = W(x_i)$ до $W_j = W(x_j)$ функции W объемной плотности интенсивности тепловых источников.

2.8. Дайте слабую постановку задачи на отдельном элементе для обыкновенного дифференциального уравнения $-p \partial^2 u / \partial x^2 + qu = f$, $p = p(x) \geq p_0 > 0$, $q = q(x) \geq q_0 > 0$. Вычислите элементную матрицу \mathbf{K}^{em} для одномерного линейного лагранжева конечного элемента в случае постоянных $p = p_m$ и $q = q_m$. Будет ли положительно определенной элементная матрица \mathbf{K}^{em} ?

2.9. Покажите, что для двумерного четырехугольного лагранжева конечного элемента с четырьмя узлами из п. 2.3.1 параметрическое отображение (2.58) переводит стороны $\xi = 1$, $\eta = 1$ и $\xi = -1$ канонического квадрата $(\xi, \eta) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$ на плоскости $\xi\eta$ в стороны четырехугольника Ω^{em} на плоскости xy , связывающие вершины j и k , k и l , l и i , соответственно.

2.10. Докажите, что формула (2.67) для значения якобиана преобразования канонического квадрата в четырехугольник в его вершине ($\xi = -1$, $\eta = -1$) может быть преобразована к виду (2.68) – (2.70). Для доказательства, можно, например, выразить синус угла $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} через косинус, использовать формулу $\cos \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|)$, а в качестве векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} взять стороны четырехугольника, сходящиеся в вершине i : $\mathbf{a} = \{x_j - x_i, y_j - y_i\}$, $\mathbf{b} = \{x_l - x_i, y_l - y_i\}$.

2.11. Покажите, что точка треугольника, для которой все три треугольные координаты равны, является точкой пересечения медиан.

2.12. Докажите, что определитель матрицы Якоби $\det \mathbf{J}$ (2.64) для отображения (2.107) – (2.110) равен удвоенной площади треугольника $\Delta(ijk)$, т.е. докажите формулу (2.112).

2.13. Получите явное выражение в виде полиномов от x и y для обратного преоб-

разования $\xi = \xi(\mathbf{x})$ к параметрическому отображению (2.107) – (2.110), связывающему канонический прямоугольный треугольник и треугольник $\Delta(ijk)$ с прямолинейными сторонами. Покажите, что отображение $\xi = \xi(\mathbf{x})$ является полным линейным полиномом от переменных x, y .

2.14. Постройте функции формы четырехугольного серендипова конечного элемента с двенадцатью узлами, обеспечивающего полную кубическую аппроксимацию на каноническом квадрате $\{\xi, \eta\} \in [-1, 1]$. Проверьте, что для узлов с координатами $\{-1, -c_0, c_0, 1\}$ по ξ и по η функции формы можно представить в едином виде ($0 < c_0 < 1$) :

$$N_p = \frac{(\xi_p + \xi)(\eta_p + \eta)}{4\xi_p\eta_p(1 - c_0^2)} \left[\frac{(\eta_p^2 - c_0^2)(1 - \xi^2) + (\xi_p^2 - c_0^2)(1 - \eta^2)}{1 - 2\xi_p^2\eta_p^2 + c_0^2} + \xi_p^2\eta_p^2 - c_0^2 \right].$$

2.15. Постройте функции формы треугольного конечного элемента с десятью узлами (один из которых – внутренний), обеспечивающие полную кубическую аппроксимацию на каноническом прямоугольном треугольнике с катетами, равными единице.

2.16. Постройте изопараметрический треугольный конечный элемент с четырьмя узлами (три узла – в вершинах канонического треугольника, один – промежуточный на стороне, соответствующей гипотенузе канонического треугольника), обеспечивающий линейное поведение аппроксимируемой функции на двух сторонах и квадратичное – на стороне с промежуточным узлом.

2.17. Постройте изопараметрический треугольный конечный элемент с четырьмя узлами (три узла – в вершинах канонического треугольника, один – промежуточный на стороне, соответствующей одному из катетов канонического треугольника), обеспечивающий линейное поведение аппроксимируемой функции на двух сторонах и квадратичное – на стороне с промежуточным узлом.

2.18. Постройте изопараметрический четырехугольный конечный элемент с шестью узлами (четыре узла – в вершинах четырехугольника, два – промежуточные на двух сторонах с общей вершиной), обеспечивающий линейное поведение аппроксимируемой функции на двух сторонах без промежуточных узлов и квадратичное – на сторонах с промежуточными узлами.

2.19. Постройте изопараметрический четырехугольный конечный элемент с шестью узлами (четыре узла – в вершинах четырехугольника, два – промежуточные на двух противоположных сторонах), обеспечивающий линейное поведение аппроксимируемой функции на двух сторонах без промежуточных узлов и квадратичное – на сторонах с промежуточными узлами.

2.20. Постройте изопараметрический четырехугольный конечный элемент с пятью узлами (четыре узла – в вершинах четырехугольника, один – промежуточный на одной из сторон), обеспечивающий линейное поведение аппроксимируемой функции на трех сторонах и квадратичное – на стороне с промежуточным узлом.

2.21. Получите явное выражение в виде полиномов от x, y и z для обратного преобразования $\xi = \xi(\mathbf{x})$ к параметрическому отображению (2.133) – (2.135), (2.143), $N_s(\xi) = L_s(\xi)$, связывающему канонический гексаэдр и гексаэдр $T(ijkl)$ с прямолинейными сторонами. Покажите, что отображение $\xi = \xi(\mathbf{x})$ является полным линейным полиномом от переменных x, y и z .

2.22. Покажите, что конечный элемент в форме прямой треугольной призмы с шестью узлами и с функциями формы (2.156) совместим по боковым граням с подобными элементами и с восьмиузловыми гексаэдрами.

2.23. Покажите, что конечный элемент в форме прямой треугольной призмы с пятнадцатью узлами и с функциями формы (2.157) совместим по боковым граням с подобными элементами и с двадцатиузловыми серендиповыми гексаэдрами.

2.24. Докажите, что биквадратичный четырехугольный конечный элемент с девятью узлами обеспечивает точное представление любого биквадратичного полинома

$$P_{2b}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^2 c_{pq} \xi^p \eta^q,$$

поскольку для узлов (2.80) и базисных функций (2.81) или (2.82) выполнены равенства

$$\xi^p \eta^q = \sum_{s=1}^9 N_s(\xi, \eta) \xi_s^p \eta_s^q, \quad \forall p, q : 0 \leq p, q \leq 2.$$

2.25. Докажите, что четырехугольный серендипов конечный элемент с восемью узлами обеспечивает точное представление любого полинома вида

$$P_{2s}(\xi, \eta) = \sum_{p,q=0}^{p+q \leq 2} c_{pq} \xi^p \eta^q + c_{21} \xi^2 \eta + c_{12} \xi \eta^2,$$

поскольку для узлов (2.89) и базисных функций (2.95), (2.96) или (2.97) выполнены равенства

$$\xi^p \eta^q = \sum_{s=1}^8 N_s(\xi, \eta) \xi_s^p \eta_s^q, \quad \forall p, q : 0 \leq p, q; (p+q \leq 2) \vee (p=2, q=1) \vee (p=1, q=2).$$

2.26. Докажите, что треугольный элемент с шестью узлами обеспечивает на каноническом треугольнике Ω_ξ^{em} точное представление любого квадратичного полинома вида

$$P_{2\Delta}(\xi, \eta) = \sum_{p,q=0}^{p+q \leq 2} c_{pq} \xi^p \eta^q,$$

поскольку для его узлов и базисных функций (2.114), (2.115) имеют место следующие равенства

$$\xi^p \eta^q = \sum_{s=1}^6 N_s(\xi, \eta) \xi_s^p \eta_s^q, \quad \forall p, q : 0 \leq p, q; p+q \leq 2.$$

2.27. Допустимы ли сетки из квадратичных конечных элементов, показанные на рис. 2.32, когда узловые вершины одних конечных элементов совпадают с серединными узлами других элементов?

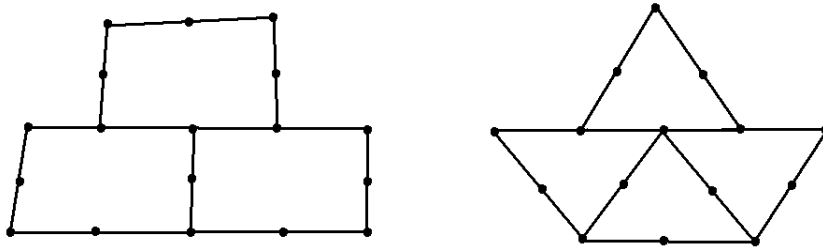


Рис. 2.32, а.

Рис. 2.32, б.

2.28. Рассмотрим семиузловой четырехугольный конечный элемент, полученный в разделе 2.7 из серендипова четырехугольного восьмиузлового элемента путем редукции узла $\xi_5 = \{0, -1\}$. Докажите, что этот элемент обеспечивает на каноническом квадрате точное представление любого полинома вида

$$P_{1r2b}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^2 c_{pq} \xi^p \eta^q,$$

поскольку для его узлов (2.124) и базисных функций (2.125), (2.126) или (2.130) выполнены равенства

$$\xi^p \eta^q = \sum_{s=1}^9 N_s(\xi, \eta) \xi_s^p \eta_s^q, \quad \forall 0 \leq p \leq 1; 0 \leq q \leq 2.$$

Таким образом, редукция хотя бы одного из срединных узлов квадратичного элемента сужает его возможности по точному представлению полного полинома от ξ и η со второй степени до первой.

2.29. Докажите, что "трилинейный" гексаэдральный конечный элемент с восемью узлами обеспечивает точное представление любого "трилинейного" полинома

$$P_{1h}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 c_{pqr} \xi^p \eta^q \zeta^r,$$

поскольку для его базисных функций (2.136) и узлов (2.137) выполнены равенства

$$\xi^p \eta^q \zeta^r = \sum_{s=1}^8 N_s(\xi, \eta, \zeta) \xi_s^p \eta_s^q \zeta_s^r, \quad \forall p, q, r = 0, 1.$$

2.30. Докажите, что гексаэдральный серендипов конечный элемент с двадцатью узлами обеспечивает точное представление любого полинома вида

$$P_{2s}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p,q,r=0}^{p+q+r \leq 2} c_{pqr} \xi^p \eta^q \zeta^r + c_{210} \xi^2 \eta + c_{201} \xi^2 \zeta + c_{120} \xi \eta^2 + c_{021} \eta^2 \zeta + c_{102} \xi \zeta^2 + c_{012} \eta \zeta^2,$$

поскольку для узлов (2.137), (2.139) и базисных функций (2.138) выполнены равенства

$$\xi^p \eta^q \zeta^r = \sum_{s=1}^2 N_s(\xi, \eta, \zeta) \xi_s^p \eta_s^q \zeta_s^r,$$

$$0 \leq p, q, r; (p+q+r \leq 2) \vee (p=2, q=1, r=0) \vee (p=2, q=0, r=1) \vee (p=1, q=2, r=0) \\ \vee (p=0, q=2, r=1) \vee (p=1, q=0, r=2) \vee (p=0, q=1, r=2).$$

2.31. Докажите, что тетраэдральный элемент с десятью узлами обеспечивает на каноническом тетраэдре Ω_ξ^{em} точное представление любого квадратичного полинома вида

$$P_{2T}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p,q,r=0}^{p+q+r \leq 2} c_{pqr} \xi^p \eta^q \zeta^r,$$

поскольку для его узлов и базисных функций (2.144) имеют место равенства

$$\xi^p \eta^q \zeta^r = \sum_{s=1}^1 N_s(\xi, \eta, \zeta) \xi_s^p \eta_s^q \zeta_s^r, \quad \forall p, q, r : 0 \leq p, q, r; p + q + r \leq 2.$$

Глава 3

МКЭ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Классическая постановка статических задач теории упругости

В данном разделе будут даны постановки линейных статических задач теории упругости. Основное отличие от задач теплопроводности здесь связано с тем, что неизвестной функцией является уже не скалярная, а векторная функция – функция перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. В \mathbb{R}^3 в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$, вектор перемещений имеет три компоненты $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$; $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$, $u_3 = u_z$. Будем считать, что упругое тело занимает ограниченную в \mathbb{R}^3 область Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$.

По вектору перемещений \mathbf{u} можно определить тензор малых линейных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^*)/2, \quad (3.1)$$

причем компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ очевидно даются формулами

$$\varepsilon_{jj} = u_{j,j}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (3.2)$$

Диагональные компоненты тензора деформаций ε_{jj} определяют относительные удлинения, а недиагональные компоненты $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$ – сдвиги.

Закон Гука связывает тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ с тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через тензор упругих модулей \mathbf{c} четвертого ранга

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.3)$$

или, в компонентной записи

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.4)$$

где здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам (в данном случае – k и l).

Упругие модули c_{ijkl} называются также модулями жесткости, так как они определяют жесткостные свойства материала. Тензор \mathbf{c} является полусимметричным тензором четвертого ранга:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, \quad (3.5)$$

Положительная определенность упругого потенциала деформаций $U_p = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ на тензорном поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$) обуславливает свойство положительной определенности тензора \mathbf{c} :

$$\exists c_0 > 0 : \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad 2U_p(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \geq c_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ выполняется уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad (3.7)$$

где ρ – плотность материала, \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил.

В компонентной записи с учетом (3.2), (3.4), (3.5) уравнение равновесия (3.7) можно переписать в виде:

$$(c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.8)$$

Система уравнений линейной статической теории упругости (3.8) является в \mathbb{R}^3 системой трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа.

К этой системе дифференциальных уравнений необходимо добавить граничные условия. Рассмотрим два основных типа граничных условий. Предположим, что граница области $\Gamma = \partial\Omega$ подразделяется на два подмножества Γ_u и Γ_σ : $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$.

Будем считать, что на границе Γ_u задан вектор перемещений $\mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (3.9)$$

а на границе Γ_σ с вектором внешней единичной нормали \mathbf{n} задан вектор напряжений $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma(\mathbf{x})$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (3.10)$$

Граничное условие (3.9) называется *условием первого рода*, условием типа Дирихле, кинематическим (геометрическим, вынужденным) граничным

условием или *главным граничным условием*. В случае $\mathbf{u}_\Gamma = 0$ имеем однородное главное граничное условие. С механической точки зрения граница Γ_u при $\mathbf{u}_\Gamma = 0$ является границей жесткого закрепления. Условие жесткого закрепления для упругого тела является наиболее распространенным типом главного граничного условия (3.9).

Граничное условие (3.10) называется *условием второго рода*, условием типа Неймана, динамическим граничным условием или *естественным граничным условием*. В случае $\mathbf{p}_\Gamma = 0$ говорится о свободной от механических напряжений части границы Γ_σ или просто о свободной границе.

Системой уравнений (3.7), (3.3), (3.1) или (3.8) вместе с граничными условиями (3.9), (3.10) определяется классическая постановка задач линейной теории упругости.

Как и в задачах теплопроводности, при постановках задач теории упругости для вопросов единственности следует различать случаи наличия и отсутствия главных граничных условий (3.9).

Если подмножество Γ_u границы Γ отсутствует, т.е. упругое тело нигде не закреплено, то однородная краевая задача статической теории упругости (3.7), (3.3), (3.1), (3.10) при $\Gamma = \Gamma_\sigma$, $\mathbf{p}_\Gamma = 0$, $\mathbf{f} = 0$ имеет нетривиальные решения в виде смещений тела как жесткого целого:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rigid}} = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{r}, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{u}_c = \text{const}$, $\boldsymbol{\omega}_c = \text{const}$, \mathbf{r} – радиус-вектор относительно центра некоторой декартовой системы координат.

Действительно, для смещений тела как жесткого целого (3.11) деформации отсутствуют, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ (задача 3.5). Поэтому равны нулю и механические напряжения $\boldsymbol{\sigma} = 0$, и тождественно удовлетворяются как уравнения равновесия (3.7), так и граничные условия (3.10) при $\Gamma = \Gamma_\sigma$, $\mathbf{p}_\Gamma = 0$.

Следовательно, в случае отсутствия главных граничных условий решение статической теории упругости неединственно и определено с точностью до смещений тела как жесткого целого $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rigid}}$. Кроме того, для разрешимости неоднородной задачи при $\Gamma = \Gamma_\sigma$, $\mathbf{p}_\Gamma \neq 0$ или $\mathbf{f} \neq 0$ главный вектор и главный момент внешних воздействий должны равняться нулю, т.е. должны быть выполнены равенства (задача 3.6):

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}_\Gamma d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega = 0, \quad \Gamma = \Gamma_\sigma, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\Gamma d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} d\Omega = 0, \quad \Gamma = \Gamma_\sigma. \quad (3.13)$$

Если выполнены условия разрешимости (3.12), (3.13), то решение краевой задачи статической теории упругости при $\Gamma = \Gamma_\sigma$ будут единственным в фактор-классе функций перемещений, удовлетворяющих условиям:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (3.14)$$

Для доказательства достаточно показать, что при выполнении равенств (3.14) смещения тела как жесткого целого (3.11) могут быть только нулевыми. Действительно, считая без ограничения общности, что за оси координат выбраны главные центральные оси инерции тела Ω , и подставляя в (3.14) смещения тела как жесткого целого (3.11), имеем:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{r}) d\Omega = 0, \quad (3.15)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u}_c d\Omega + \int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega}_c r^2 - (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] d\Omega = 0. \quad (3.16)$$

Так как для центральных осей инерции $\int_{\Omega} \mathbf{r} d\Omega = 0$, то из (3.15) получаем, что $\mathbf{u}_c = 0$. Тогда, из (3.16) имеем:

$$\int_{\Omega} (\omega_{ck} r^2 - \omega_{cj} x_j x_k) d\Omega \mathbf{e}_k = 0,$$

и поскольку для главных осей инерции $J_{jk} = \int_{\Omega} x_j x_k d\Omega = 0$ при $j \neq k$, а $J_{kk} = \int_{\Omega} (r^2 - x_k^2) d\Omega \geq 0$ (суммирование по k здесь нет), то $\omega_{ck} = 0$, $k = 1, 2, 3$. Итак, в (3.11) $\mathbf{u}_c = 0$ и $\boldsymbol{\omega}_c = 0$, т.е. при выполнении (3.14) смещения тела как жесткого целого равны нулю: $\mathbf{u}_{rigid} = 0$.

В завершение данного раздела остановимся более подробно на случаях изотропных и ортотропных сред.

Выше закон Гука (3.3) был записан для упругой среды с произвольной анизотропией. В наиболее простом и часто встречающемся случае изотропной среды, когда все направления с точки зрения упругих свойств эквивалентны, имеется только два независимых модуля. Так, например, коэффициенты c_{ijkl} для изотропной среды можно выразить через коэффициенты Ламе λ и μ

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.17)$$

и тогда закон Гука принимает форму

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3.18)$$

где $e = \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_{kk}$ – первый инвариант тензора деформаций, определяющий относительное изменение объема ($\varepsilon_{kk} \equiv \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}$). Через объемное расширение e и объемный модуль $K = \lambda + (2/3)\mu$ можно выразить среднее напряжение $p = \sigma_{kk}/3$ ($\sigma_{kk} \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}$):

$$p = Ke. \quad (3.19)$$

Действительно, проведя свертку (3.18), легко найти, что (3.19) имеет место при $K = \lambda + (2/3)\mu$. Наоборот, пропорциональность относительного изменения объема e среднему давлению p обычно записывается через коэффициент объемного сжатия k в виде: $e = 3kp$, где $k = 1/(3K)$.

Из (3.18) видно, что недиагональные сдвиговые компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны только через модуль μ : $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = \mu\gamma_{ij}$; $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$; $i \neq j$. В связи с этим коэффициент Ламе μ носит также название модуля сдвига. Другое его общепринятое обозначение – G , т.е. $\mu = G$.

Закон Гука (3.3) можно обратить для произвольной анизотропной среды, введя тензор упругих податливостей \mathbf{s} четвертого ранга:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.20)$$

Тензоры упругих модулей \mathbf{c} и податливостей \mathbf{s} взаимно обратные, т.е. $c_{ijkl}s_{klmn} = s_{ijkl}c_{klmn} = \Delta_{ijmn}$, где $\Delta_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ – единичный тензор четвертого ранга.

В случае изотропного тела компоненты тензора упругих податливостей можно записать в виде, аналогичном (3.17)

$$s_{ijkl} = \lambda_s \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_s (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.21)$$

где

$$\lambda_s = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \mu_s = \frac{1}{4\mu}. \quad (3.22)$$

С учетом (3.21) закон Гука в форме (3.20) для изотропного тела представим следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_s \sigma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_s \sigma_{ij}. \quad (3.23)$$

Если определить модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν через λ_s и μ_s , исходя из формул

$$\lambda_s = -\frac{\nu}{E}, \quad \mu_s = \frac{(1 + \nu)}{2E}, \quad (3.24)$$

то определяющее соотношение (3.23) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{ij}. \quad (3.25)$$

Для отдельных компонент формула (3.25) очевидно дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij}, \quad i \neq j.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Используя формулы (3.26), можно выявить механический смысл модуля Юнга и коэффициент Пуассона. При однородном напряженном состоянии одноосного растяжения, когда $\sigma_{11} = P$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ из (3.26) имеем: $\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$; $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\sigma_{11}/E = -\nu\varepsilon_{11}$.

Таким образом, модуль Юнга E есть множитель пропорциональности в законе Гука при одноосном напряженном состоянии ($\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$), а коэффициента Пуассона ν есть отношение поперечного сужения к продольному удлинению ($\nu = -\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$).

Между парами упругих модулей λ , μ , K , E и ν для изотропного тела существуют соотношения взаимосвязи, вытекающие из (3.22), (3.24) и представления для K . Эти формулы можно представить в виде таблицы 3.1.

Таблица 3.1.

Соотношения между упругими постоянными для изотропной среды.

	$(\lambda, \mu = G)$	(E, ν)	(E, G)	(G, ν)	(K, G)
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{2G-E}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$K - \frac{2}{3}G$
$\mu = G$	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G	G	G
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	E	$2(1+\nu)G$	$\frac{9KG}{3K+G}$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{E}{2G} - 1$	ν	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$
K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	K

Итак, упругие свойства изотропной среды определяются какой-либо из пар: (λ, μ) , (E, ν) и т.п.

Замечание. Следуя классическим руководствам по механике деформируемого твердого тела, здесь через ε_{ij} обозначены компоненты тензора деформаций по формулам (3.1) или (3.2). В некоторой технической литературе и в некоторых работах по МКЭ через ε_{ij} обозначены те же компоненты при $i = j$ и удвоенные значения при

$i \neq j$, т.е. сдвиги $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$. Тогда, например, последняя формула (3.26) закона Гука в этих литературных источниках будет выглядеть следующим образом: $\varepsilon_{ij} = [2(1 + \nu)/E]\sigma_{ij} = (1/G)\sigma_{ij}$, $i \neq j$.

Ортотропное упругое тело характеризуется тремя ортогональными плоскостями симметрии. Определяющие соотношения (3.20) для ортотропного тела в главных (кристаллографических) осях $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, связанных с плоскостями симметрии, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

В силу свойств симметрии тензора податливостей, аналогичных свойствам симметрии (3.5), должны выполняться равенства

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2, \quad \nu_{32}E_2 = \nu_{23}E_3, \quad \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1,\tag{3.28}$$

и поэтому первые три формулы из (3.27) можно переписать также следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

С учетом (3.28) число независимых модулей для ортотропного тела в общем случае оказывается равным 9. Очевидно, что изотропный материал является частным случаем ортотропного, когда $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu$, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G = E/[2(1 + \nu)]$.

Частным случаем ортотропных сред можно считать и трансверсально-изотропные материалы, у которых имеется ось симметрии, расположенная так, что любая перпендикулярная ей плоскость является плоскостью изотропии упругих свойств. Если осью симметрии является ось Ox_3 , то для

трансверсально-изотропного тела в определяющих соотношениях (3.27) надо положить $E_1 = E_2$, $\nu_{13} = \nu_{23}$, $G_{13} = G_{23}$.

3.2. Векторно-матричная форма основных уравнений теории упругости

В технических приложениях при моделировании анизотропных упругих материалов широко применяются векторно-матричные формулировки для описания упругих модулей и компонент тензоров деформаций и напряжений. Эти же обозначения полезны и для записи конечно-элементных соотношений в виде, удобном для программирования.

Согласно (3.5), тензор упругих модулей c_{ijkl} симметричен по парам индексов $(ij) \leftrightarrow (ji)$, $(kl) \leftrightarrow (lk)$. Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} также симметричны, и, следовательно, можно делать перестановки $(ij) \leftrightarrow (ji)$. В связи с такой симметрией можно ввести соответствия между парами индексов (ij) и одномерными индексными массивами $\alpha = \{1, 2, \dots, 6\}$. В технической литературе принят следующий порядок соотношений соответствия: $(ij) \leftrightarrow \alpha$: (11) \leftrightarrow 1; (22) \leftrightarrow 2; (33) \leftrightarrow 3; (23) = (32) \leftrightarrow 4; (13) = (31) \leftrightarrow 5; (12) = (21) \leftrightarrow 6.

Тогда из компонент тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} можно составить шестимерные векторы \mathbf{T} и \mathbf{S}

$$\mathbf{T}^* = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}], \quad \mathbf{S}^* = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}]. \quad (3.30)$$

(Причина, по которой у недиагональных компонент тензора деформаций добавлен множитель 2, будет ясна несколько позже.)

Компоненты тензора упругих модулей (жесткостей) c_{ijkl} расположим в виде матрицы $c_{\alpha\beta}$ размера 6×6 при соответствии $(ij) \leftrightarrow \alpha$, $(kl) \leftrightarrow \beta$

$$c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \text{sym} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Как оказывается, в этом случае закон Гука (3.3) в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{S}. \quad (3.32)$$

Легко заметить, что суммирование $T_\alpha = c_{\alpha\beta}S_\beta$ эквивалентно суммированию по k и l в (3.4): $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Действительно, поскольку различные индексы k и l при суммировании встречаются дважды, то имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sum_{k=1}^3 c_{ijkk}\varepsilon_{kk} + c_{ij23}\varepsilon_{23} + c_{ij13}\varepsilon_{13} + c_{ij12}\varepsilon_{12} + c_{ij32}\varepsilon_{32} + c_{ij31}\varepsilon_{31} + c_{ij21}\varepsilon_{21} = \\ &= \sum_{k=1}^3 c_{ijkk}\varepsilon_{kk} + 2c_{ij23}\varepsilon_{23} + 2c_{ij13}\varepsilon_{13} + 2c_{ij12}\varepsilon_{12} = c_{\alpha\beta}S_\beta,\end{aligned}$$

показывающая необходимость добавления множителя 2 для недиагональных компонент ε_{kl} при $k \neq l$ в (3.30).

Обращая (3.32), находим представление для деформаций \mathbf{S} через напряжения \mathbf{T} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{T}, \quad S_\alpha = s_{\alpha\beta}T_\beta, \quad \mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1}, \quad (3.33)$$

где \mathbf{s} – матрица упругих податливостей.

Как можно проверить, связь между компонентами $s_{\alpha\beta}$ матрицы и компонентами s_{ijkl} тензора упругих податливостей дается формулой

$$s_{\alpha\beta} = 2^{[\alpha/4]+[\beta/4]}s_{ijkl}, \quad (3.34)$$

где $[\gamma]$ – целая часть числа γ (задача 3.10).

Таким образом, компоненты матрицы $s_{\alpha\beta}$ отличаются от компонент тензора s_{ijkl} на множитель 2^m , где m – число индексов, превосходящих 3, в паре $(\alpha\beta)$.

Приведем вид матриц жесткостей и податливостей для наиболее распространенного и наиболее простого случая изотропной среды.

Для упругих жесткостей изотропной среды из (3.18) получаем следующее представление $c_{\alpha\beta}$ через коэффициенты Ламе:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

При использовании в качестве основных модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν матрица \mathbf{c} из (3.35) с учетом соответствующих формул

таблицы 3.1 принимает вид:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Учитывая (3.26), получаем представления для коэффициентов матрицы $s_{\alpha\beta}$ упругих податливостей изотропной среды через E и ν :

$$\mathbf{s} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Продолжим преобразования уравнений теории упругости в новых обозначениях. Заметим, что соотношения Коши (3.1), определяющие деформации через вектор напряжений \mathbf{u} , можно записать в векторно-матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad (3.38)$$

где

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

что проверяется непосредственным умножением матрицы $\mathbf{L}(\nabla)$ на вектор \mathbf{u} и сравнением с (3.1).

Наконец, скалярное умножение вектора на тензор второго ранга, входящее в (3.7) и в (3.10), также записывается в векторно-матричной форме, причем через ту же матрицу \mathbf{L} :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}. \quad (3.40)$$

Таким образом, постановка задач теории упругости (3.1), (3.3), (3.7), (3.9), (3.10) может быть представлена в векторно-матричном виде через (3.30)–(3.32), (3.38)–(3.40) и формулы, следующие из (3.40), (3.7)–(3.10)

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (3.43)$$

Введенные здесь шестимерные векторы напряжений и деформаций, строго говоря, не являются векторами, их можно назвать *псевдовекторами*, поскольку при замене базиса компоненты T_α , S_α изменяются не по законам преобразований компонент векторов, а по законам, следующим из формул преобразований компонент тензоров второго ранга. Компоненты матриц упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}$ и податливостей $s_{\alpha\beta}$ также изменяются не по законам преобразований матриц размера 6×6 , а по законам, следующим из формул преобразований тензоров четвертого ранга.

3.3. Теоретические основы векторно-матричных форм. Ортогональные преобразования координат

Для введенных в предыдущем разделе условно векторно-матричных величин (псевдовекторов и псевдоматриц) можно дать более строгие математические определения.

Для произвольных симметричных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^*$ введем векторные базисы в шестимерном пространстве

$$\mathbf{h}_j^\sigma = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \mathbf{h}_4^\sigma = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{h}_5^\sigma = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{h}_6^\sigma = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1,$$

где \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 — орты основной декартовой системы координат.

В базисе (3.44) тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ очевидно представим в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{T} = T_\alpha \mathbf{h}_\alpha^\sigma, \quad (3.45)$$

где

$$T_j = \sigma_{jj}, \quad j = 1, 2, 3; \quad T_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}; \quad T_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}; \quad T_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

Для тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ удобно ввести свой немного измененный векторный базис

$$\mathbf{h}_j^\varepsilon = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \mathbf{h}_4^\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{h}_5^\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1); \quad \mathbf{h}_6^\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1).$$

В базисе (3.46) тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ записывается в форме

$$\boldsymbol{\varepsilon} \leftrightarrow \mathbf{S} = S_\alpha \mathbf{h}_\alpha^\varepsilon, \quad (3.47)$$

где

$$S_j = \varepsilon_{jj}, \quad j = 1, 2, 3; \quad S_4 = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}; \quad S_5 = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}; \quad S_6 = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}.$$

Между введенными векторными базисами (3.44), (3.46) в шестимерном пространстве имеются простые зависимости, и несложно установить соотношения "ортогональности", через которые можно ввести и специальные "скалярные" произведения

$$\mathbf{h}_\alpha^\varepsilon = 2^{-[\alpha/4]} \mathbf{h}_\alpha^\sigma, \quad \mathbf{h}_\alpha^\varepsilon \cdot \mathbf{h}_\beta^\sigma = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{h}_\alpha^\sigma \cdot \mathbf{h}_\beta^\sigma = 2^{[\alpha/4]} \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{h}_\alpha^\varepsilon \cdot \mathbf{h}_\beta^\varepsilon = 2^{-[\alpha/4]} \delta_{\alpha\beta},$$

где [...], как и в (3.40) и далее, есть целая часть числа.

Для вывода формул преобразований псевдовекторов \mathbf{T} и \mathbf{S} и псевдоматриц \mathbf{c} и \mathbf{s} при переходе к другой системе координат рассмотрим два ортонормированных базиса в \mathbb{R}^3 : исходный декартов базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и некоторый другой ортонормированный базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Для анизотропных материалов базисом $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ может являться, например, базис кристаллографической системы координат. Тогда материальные свойства, и, в частности, упругие модули первоначально задаются в кристаллографической системе координат, а затем требуется пересчет этих величин в основной декартовой системе координат.

Если \mathbf{Q} – матрица направляющих косинусов

$$[\mathbf{Q}]_{ik} = q_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k), \quad (3.49)$$

то имеют место следующие формулы перехода

$$\mathbf{e}'_i = q_{ik} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_k = q_{ik} \mathbf{e}'_i, \quad (3.50)$$

причем в силу ортонормированности базисов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ матрица \mathbf{Q} является ортогональной

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \quad \rightarrow \quad q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij}, \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}.$$

Выражения (3.50) позволяют записать формулы связи между координатами произвольного вектора \mathbf{a} в базисах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Действительно, если

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = a'_i \mathbf{e}'_i, \quad (3.51)$$

то, используя (3.50), имеем

$$a'_k = q_{ki} a_i, \quad a_i = q_{ki} a'_k. \quad (3.52)$$

Аналогично, для произвольных тензоров второго ранга из (3.52) имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j, \quad (3.53)$$

$$\sigma'_{ij} = q_{ik} q_{jm} \sigma_{km}, \quad \sigma_{ij} = q_{ki} q_{mj} \sigma'_{km}$$

а для тензоров четвертого ранга –

$$\mathbf{c} = c_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = c'_{ijkl} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_l, \quad (3.54)$$

$$c'_{ijkl} = q_{im} q_{jn} q_{kr} q_{ls} c_{mnr}, \quad c_{ijkl} = q_{mi} q_{nj} q_{rk} q_{sl} c'_{mnr}.$$

Из формул (3.51)–(3.54) следуют и формулы пересчета компонент векторов напряжений \mathbf{T} , деформаций \mathbf{S} и матриц упругих модулей в различных ортонормированных базисах.

Например, пусть матрица упругих жесткостей \mathbf{c} в двух ортонормированных базисах имеет представления

$$\mathbf{c} = c_{\gamma\zeta} \mathbf{h}_\gamma^\sigma \mathbf{h}_\zeta^\sigma = c'_{\gamma\zeta} \mathbf{h}'_\gamma \mathbf{h}'_\zeta. \quad (3.55)$$

Введем матрицу $\mathbf{H} = \{H_{\gamma\zeta}\}$, $\gamma, \zeta = 1, 2, \dots, 6$, по формуле

$$H_{\gamma\zeta} = \mathbf{h}'_{\gamma'} \cdot \mathbf{h}_\zeta^\sigma. \quad (3.56)$$

Компоненты этой матрицы выражаются через компоненты матрицы направляющих косинусов q_{ik} , причем формулы будут значительно отличаться для различных индексов γ и ζ :

$$H_{ij} = \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{h}_j^\sigma = (\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_i) \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = q_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$H_{i4} = \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{h}_4^\sigma = (\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_i) \cdot (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) = (q_{ik} q_{im} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m) \cdot (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) = 2q_{i2} q_{i3},$$

$$\begin{aligned}
H_{i5} &= 2q_{i1}q_{i3}, & H_{i6} &= 2q_{i1}q_{i2}, & i &= 1, 2, 3, \\
H_{4i} &= \mathbf{h}_4^{\varepsilon'} \cdot \cdot \mathbf{h}_i^{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_2) \cdot \cdot \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = q_{2i}q_{3i}, & i &= 1, 2, 3, \\
H_{5i} &= q_{1i}q_{3i}, & H_{6i} &= q_{1i}q_{2i}, & i &= 1, 2, 3, \\
H_{44} &= q_{22}q_{33} + q_{23}q_{32}, & H_{55} &= q_{11}q_{33} + q_{13}q_{31}, & H_{66} &= q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21}, \\
H_{45} &= q_{21}q_{33} + q_{23}q_{31}, & H_{54} &= q_{12}q_{33} + q_{32}q_{13}, \\
H_{46} &= q_{31}q_{22} + q_{32}q_{21}, & H_{64} &= q_{13}q_{22} + q_{23}q_{12}, \\
H_{56} &= q_{11}q_{32} + q_{12}q_{31}, & H_{65} &= q_{11}q_{23} + q_{21}q_{13},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

где суммирование по индексу i в первых соотношениях (3.57) нет.

Проведя двойную свертку (3.55) с $\mathbf{h}_\alpha^{\varepsilon'}$ и $\mathbf{h}_\beta^{\varepsilon'}$, получаем искомую формулу перехода для компонент упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}$

$$c'_{\alpha\beta} = H_{\alpha\gamma}H_{\beta\zeta}c_{\gamma\zeta}. \tag{3.58}$$

Аналогично, для матрицы \mathbf{s} упругих податливостей имеем:

$$\mathbf{s} = s_{\gamma\zeta}\mathbf{h}_\gamma^\varepsilon\mathbf{h}_\zeta^\varepsilon = s'_{\gamma\zeta}\mathbf{h}_\gamma^{\varepsilon'}\mathbf{h}_\zeta^{\varepsilon'}. \tag{3.59}$$

Двойное скалярное умножение (3.59) с $\mathbf{h}_\alpha^{\sigma'}$ и $\mathbf{h}_\beta^{\sigma'}$ дает формулу преобразования для компонент матрицы \mathbf{s} :

$$s'_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma}R_{\beta\zeta}s_{\gamma\zeta}, \tag{3.60}$$

где

$$R_{\gamma\zeta} = \mathbf{h}_\gamma^{\sigma'} \cdot \cdot \mathbf{h}_\zeta^\varepsilon. \tag{3.61}$$

Формулы перехода (3.58), (3.60) для компонент $c_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$ можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{H} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{s}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{R}^*. \tag{3.62}$$

С учетом того, что $\mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1}$, $\mathbf{c}' = (\mathbf{s}')^{-1}$, из (3.60) находим связь между матрицами \mathbf{H} и \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{H}^{-1}. \tag{3.63}$$

Используя (3.63), получаем также формулы для пересчета модулей жесткостей и податливостей при переходе от системы координат с базисом \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 к системе координат с базисом \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{c}' \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{s}' \cdot \mathbf{H}. \tag{3.64}$$

Наконец, записывая векторы напряжений и деформаций в различных системах координат

$$\mathbf{T} = T_\alpha \mathbf{h}_\alpha^\sigma = T_\alpha \mathbf{h}_\alpha^{\sigma'}, \quad \mathbf{S} = S_\alpha \mathbf{h}_\alpha^\varepsilon = S_\alpha \mathbf{h}_\alpha^{\varepsilon'} \quad (3.65)$$

и проведя свертку первых формул (3.65) с $\mathbf{h}_\beta^{\varepsilon'}$ или с $\mathbf{h}_\beta^\varepsilon$, а вторых формул – с $\mathbf{h}_\beta^{\sigma'}$ или с \mathbf{h}_β^σ , находим формулы для преобразований компонент псевдовекторов напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}, & \mathbf{T} &= \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{T}', \\ \mathbf{S}' &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}, & \mathbf{S} &= \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{S}'. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Прикладное значение для МКЭ приведенных здесь формул состоит в том, что они позволяют осуществить переход от векторно-матричных величин, заданных первоначально в некоторой элементной системе координат $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, к векторно-матричным величинам в основной декартовой системе координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Это важно, например, для анизотропных сред с известными модулями упругости в кристаллографических системах координат $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ или для функционально неоднородных материалов, модули которых зависят от пространственных переменных в локальных системах координат $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

3.4. Обобщенная постановка статических задач теории упругости. Вариационная трактовка

С целью применения МКЭ для решения статических задач теории упругости сформулируем их слабые или обобщенные постановки.

Пусть \mathbf{v} – некоторая достаточно гладкая вектор-функция, удовлетворяющая однородному главному граничному условию на Γ_u , т.е.

$$\mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (3.67)$$

Для проведения дальнейших преобразований предварительно заметим, что имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) &= \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Справедливость (3.68) легко проверить, если использовать покомпонентные записи: $v_i \sigma_{ij,j} = (v_i \sigma_{ij})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ij}$, и т.д. (Здесь важно, что тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ симметричен, т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.)

Умножая теперь уравнение равновесия (3.7) скалярно на \mathbf{v} , интегрируя по области Ω и используя (3.68) и формулу Гаусса – Остроградского, получаем интегральное соотношение вида:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) d\Gamma. \quad (3.69)$$

С учетом обозначения для вектора напряжений из (3.10), тождество (3.69) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}) d\Gamma, \quad (3.70)$$

где

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}). \quad (3.71)$$

Последний интеграл в (3.70) желательно преобразовать так, чтобы он не зависел от вектор-функции \mathbf{u} . Это можно сделать, используя наложенное ранее требование (3.67) на функцию \mathbf{v} и граничное условие (3.10):

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}) d\Gamma = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (3.72)$$

В результате соотношение (3.70) с учетом (3.68), (3.72) можно представить в стандартном для слабой постановки виде:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{L}(\mathbf{v}), \quad (3.73)$$

где

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (3.74)$$

$$\tilde{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (3.75)$$

Соотношения (3.73) аналогичны по структуре (1.19) и могут служить базой для формулировки понятия слабого или обобщенного решения.

Для удобства математического рассмотрения здесь, как и в главе 1, нужно еще снять неоднородность в главных граничных условиях (3.9). Для этого подберем некоторую вектор-функцию $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s(\mathbf{x})$, определенную на Ω и удовлетворяющую неоднородному главному граничному условию на Γ_u :

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (3.76)$$

Тогда, решение \mathbf{u} можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s, \quad (3.77)$$

где функция \mathbf{u}_0 должна удовлетворять тому же однородному граничному условию (3.67), что и \mathbf{v} :

$$\mathbf{u}_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (3.78)$$

Введем функциональное пространство V вектор-функций \mathbf{v} , удовлетворяющих (3.67) на Γ_u и обладающих обобщенными первыми производными, интегрируемыми с квадратом на Ω . Норма в пространстве V может быть выбрана такой же, как и в пространстве $W_2^1(\Omega)$ для вектор-функций \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v}\|_V^2 = \|\mathbf{v}\|_{W_1^2}^2 = \int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega. \quad (3.79)$$

Согласно известному неравенству Корна эта норма эквивалентна норме, индуцируемой формой $a(\cdot, \cdot)$

$$\|\mathbf{v}\|_a^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega. \quad (3.80)$$

Тогда симметричная билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является положительно определенной в векторном пространстве V , и можно сформулировать слабую постановку задачи теории упругости.

Определение. Векторная функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s$ является *слабым или обобщенным решением статической задачи теории упругости* (3.1), (3.3), (3.7), (3.9), (3.10), если $\mathbf{u}_0 \in V$, и удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = L(\mathbf{v}), \quad (3.81)$$

$$L(\mathbf{v}) = \tilde{L}(\mathbf{v}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_s) \quad (3.82)$$

для всех вектор-функций $\mathbf{v} \in V$; а $\mathbf{u}_s \in W_1^2(\Omega)$ – подходящая функция, удовлетворяющая неоднородному главному граничному условию (3.76).

По теореме 1.2 первой главы при сделанных предположениях обобщенное решение задачи теории упругости существует и единственно. Это решение совпадает с классическим, если существует последнее. Справедливы также и теоремы 1.1, 1.3, 1.4 при их естественном распространении на пространства вектор-функций V .

Установим энергетический смысл слабой постановки статической задачи теории упругости.

Значение формы $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ равно удвоенной внутренней энергии деформации $U_p(\mathbf{v})$ на поле перемещений \mathbf{v} :

$$U_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \cdot \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad (3.83)$$

а значение функционала $\tilde{L}(\mathbf{v})$ в (3.75) является работой внешних активных сил и нагрузок на перемещениях \mathbf{v} .

Согласно теореме 1.1, слабая постановка статической задачи теории упругости (3.81), (3.78) эквивалентна задаче минимизации функционала $J(\mathbf{v})$

$$\frac{1}{2} J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \quad (3.84)$$

в пространстве V .

Как легко проверить (задача 3.12), задача минимизации функционала $J(\mathbf{v})$ из (3.84) эквивалентна задаче минимизации функционала $\tilde{J}(\mathbf{v})$

$$\frac{1}{2} \tilde{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \tilde{L}(\mathbf{v}) \quad (3.85)$$

на множестве вектор-функций $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_s$; $\mathbf{v}_0 \in V$, что соответствует слабой постановке в форме (3.73), (3.9).

Поскольку $U_p(\mathbf{v}) = (1/2)a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ – внутренняя энергия деформаций, а $V_p(\mathbf{v}) = -\tilde{L}(\mathbf{v})$ – потенциал внешних активных сил и нагрузок, то

$$\frac{1}{2} \tilde{J}(\mathbf{v}) = U_p(\mathbf{v}) + V_p(\mathbf{v}) = \Pi_p(\mathbf{v}), \quad (3.86)$$

где правая часть (3.86), т.е. $\Pi_p(\mathbf{v})$, имеет смысл величины потенциальной энергии упругой системы для поля перемещений \mathbf{v} .

Таким образом, задачи минимизации (3.84) и (3.85) имеют вариационный смысл задач минимизации потенциальной энергии системы. Именно, истинное поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s$ доставляет минимум функционалу потенциальной энергии системы $\Pi_p(\mathbf{v})$:

$$\min_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{u}_s; \mathbf{v}_0 \in V} \Pi_p(\mathbf{v}) = \Pi_p(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{u}_0 \in V. \quad (3.87)$$

Если считать $\delta\mathbf{u}$ кинематически допустимой вариацией поля перемещений, т.е. $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$ для (3.84) или $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s + \delta\mathbf{u}$ для (3.85), где $\delta\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, то задачи минимизации принимают форму *вариационного принципа Лагранжа*:

$$\delta J(\mathbf{u}_0) = 0 \quad (3.88)$$

или

$$\delta \tilde{J}(\mathbf{u}) = 0. \quad (3.89)$$

Используя (3.84) и варьируя (3.88), получаем

$$\delta J(\mathbf{u}_0) = \delta[a(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) - 2L(\mathbf{u}_0)] = 2[a(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) - L(\delta\mathbf{u})] = 0,$$

т. е.

$$\forall \delta\mathbf{u} \in V : \quad a(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = L(\delta\mathbf{u}); \quad \mathbf{u}_0 \in V. \quad (3.90)$$

Аналогично, из (3.85), (3.89), имеем:

$$\forall \delta\mathbf{u} \in V : \quad a(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \tilde{L}(\delta\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s; \quad \mathbf{u}_0 \in V. \quad (3.91)$$

Задачи (3.90), (3.91) совпадают соответственно с (3.73), (3.81), и поэтому являются слабыми постановками статических задач теории упругости. Эти формулировки известны как *вариационные принципы возможных перемещений* и утверждают, что на истинном поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s$ изменение внутренней энергии, вызванное любым кинематически допустимым виртуальным перемещением $\delta\mathbf{u}$, равно работе активных сил и нагрузок на этом же виртуальном перемещении.

Итак, слабая (обобщенная) постановка связана с энергетическими или вариационными принципами. Эти принципы часто принимаются первичными при моделировании физических явлений во многих предметных областях. Таким образом, вначале можно формулировать энергетические или вариационные соотношения, а уже из них получать дифференциальные уравнения задач и соответствующие естественные граничные условия. При такой стратегии слабое или обобщенное решение становится первичным понятием, а классическое решение – вторичным.

При применении численных методов для нахождения слабых решений (3.73) или (3.81) важно отметить, что формулировки слабых постановок статических задач связаны с энергетическими принципами минимизации потенциальной энергии систем, что обеспечивает хорошие вычислительные свойства соответствующих численных алгоритмов.

3.5. Конечно-элементные аппроксимации статических задач теории упругости

Техника МКЭ поиска приближенных решений для слабых постановок статических задач теории упругости аналогична рассмотренной ранее в главе 1 для случая задач теплопроводности.

Предварительно запишем слабую постановку задачи теории упругости (3.73)–(3.75) в векторно-матричной форме из п. 3.2 и с записью скалярного умножения векторов как скалярного умножения вектора-строки на вектор-столбец

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{L}(\mathbf{v}), \quad (3.92)$$

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}^*(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.93)$$

$$\tilde{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.94)$$

где \mathbf{c} – матрица упругих модулей размера 6×6 .

Далее, следуя п. 1.6, аппроксимируем область Ω совокупностью n_{el} конечных элементов $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$, т.е. $\Omega \approx \Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$. При этом граница $\Gamma = \partial\Omega$ будет аппроксимироваться границей $\Gamma_h = \partial\Omega_h$, и можно выделить ее части Γ_{uh} , $\Gamma_{\sigma h}$, на которые можно снести граничные условия (3.42), (3.43) для векторов перемещений и напряжений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uh}, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma h}, \quad (3.96)$$

где $\mathbf{u}_{\Gamma h}$, $\mathbf{p}_{\Gamma h}$, могут, вообще говоря, отличаться от соответствующих функций \mathbf{u}_{Γ} , \mathbf{p}_{Γ} , заданных на участках границы Γ .

Для области Ω_h соотношения слабой или обобщенной постановки статической задачи теории упругости (3.92)–(3.94) можно представить в виде:

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = \tilde{L}_h(\mathbf{v}), \quad (3.97)$$

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega_h} \mathbf{S}^*(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) d\Omega, \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.98)$$

$$\tilde{L}_h(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_h} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma h}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_{\Gamma h} d\Gamma. \quad (3.99)$$

Если аналогично (3.77) путем подбора вектор-функции \mathbf{u}_{sh} снять неоднородность главных граничных условий (3.95)

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0h} + \mathbf{u}_{sh}, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{u}_{0h} = 0, \quad \mathbf{u}_{sh} = \mathbf{u}_{\Gamma h}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uh}, \quad (3.101)$$

то основное тождество (3.97) обобщенной постановки (3.97)–(3.99) можно записать в форме

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}) = L_h(\mathbf{v}), \quad (3.102)$$

$$L_h(\mathbf{v}) = \tilde{L}_h(\mathbf{v}) - a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{sh}), \quad (3.103)$$

что будет являться аппроксимацией обобщенной постановки (3.81), (3.82) из п. 3.4.

Примем для \mathbf{u}_{0h} и \mathbf{u}_{sh} , а следовательно, и для \mathbf{u}_h , конечно-элементные аппроксимации вида

$$\mathbf{u}_{0h} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{u}_{sh} = \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s, \quad (3.104)$$

$$\mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s, \quad (3.105)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})], \quad \tilde{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U}, \mathbf{U}_s\}, \quad (3.106)$$

где $\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})$ – матрицы базисных функций (функций формы), $\tilde{\mathbf{U}}$, \mathbf{U} , \mathbf{U}_s – векторы-столбцы узловых перемещений для задания вектор-функций \mathbf{u}_h , \mathbf{u}_{0h} , \mathbf{u}_{sh} , соответственно.

Здесь при расположении компонент вектора узловых перемещений в векторах $\tilde{\mathbf{U}}$, \mathbf{U} , \mathbf{U}_s при соответствующей нумерации узлов в виде $\tilde{\mathbf{U}} = \{\dots, U_{xj}, U_{yj}, U_{zj}, \dots\}$ ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$) и т.п. для \mathbf{U} и \mathbf{U}_s матрицы $\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})$ будут иметь блочные структуры

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dots & N_j(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_j(\mathbf{x}) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_j(\mathbf{x}) & \dots \end{bmatrix},$$

и т.п. для $\mathbf{N}^*(\mathbf{x})$ и $\mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})$.

Поскольку соотношение (3.102) для приближенного решения $\mathbf{u}_{0h} \in V_h$ должно выполняться для $\forall \mathbf{v} \in V_h$, то для \mathbf{v} можно принять

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}, \quad (3.107)$$

где $\delta \mathbf{U}$ – произвольный вектор или вариация узловых перемещений, совместимая со связями (главными граничными условиями).

Подстановка (3.104)–(3.107) в (3.102) с учетом (3.103), (3.98), (3.99) дает вариационное конечно-элементное соотношение

$$\delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}, \quad (3.108)$$

где

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_h} \mathbf{B}_u^* \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_u d\Omega, \quad \mathbf{B}_u = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{N}^*, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{F}_b = \int_{\Omega_h} \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{f} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{sf} = \int_{\Gamma_{\sigma h}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma h} d\Gamma, \quad \mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{U}_s, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{K}_{0s} = \int_{\Omega_h} \mathbf{B}_u^* \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_{us} d\Omega, \quad \mathbf{B}_{us} = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{N}_s^*. \quad (3.112)$$

Учитывая произвольность компонент вектора $\delta \mathbf{U}$, из (3.108) получаем разрешающую СЛАУ МКЭ для статической задачи линейной теории упругости

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (3.113)$$

Матрица \mathbf{K} здесь называется *матрицей жесткости*, а составляющие вектора \mathbf{F} , выделенные в (3.110) имеют следующий механический смысл: \mathbf{F}_b – вектор объемных сил, приведенных к узлам (body load по терминологии ANSYS); \mathbf{F}_{sf} – вектор поверхностных нагрузок, также приведенных к узлам (surface load); \mathbf{F}_d – вектор "реактивных" квазивоздействий, обусловленных связями или главными граничными условиями (DOF constraint).

Как и в задачах теплопроводности, при наличии сосредоточенных в узлах \mathbf{x}_j сил $\{F_{ndxj}, F_{ndyj}, F_{ndzj}\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ из векторов \mathbf{F}_b и \mathbf{F}_{sf} можно выделить вектор узловых (nodal) сил \mathbf{F}_{nd} и вместо (3.110) записать

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{nd}. \quad (3.114)$$

Для получения формул для соответствующих элементных матриц и векторов представим сужения выражений (3.104), (3.107) для \mathbf{u}_{0h} , \mathbf{u}_{sh} и \mathbf{v} на конечном элементе Ω^{em} в виде

$$\mathbf{u}_{0h} = \mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}^{em}, \quad \mathbf{u}_{sh} = \mathbf{N}_s^{em*}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s^{em}; \quad \mathbf{x} \in \Omega^{em}, \quad (3.115)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}^{em}; \quad \mathbf{x} \in \Omega^{em}, \quad (3.116)$$

где $\mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_s^{em*}(\mathbf{x})$ – матрицы функций формы отдельного конечного элемента Ω^{em} ; \mathbf{U}^{em} , \mathbf{U}_s^{em} – векторы-столбцы узловых перемещений для \mathbf{u}_{0h} , \mathbf{u}_{sh} на Ω^{em} ; $\delta \mathbf{U}^{em}$ – вектор-столбец вариаций узловых перемещений для конечного элемента Ω^{em} .

Тогда с учетом разбиения области $\Omega_h = \cup_{m=1}^{nel} \Omega^{em}$ и (3.115), (3.116) формулы вариационного соотношения МКЭ (3.108)–(3.112) можно переписать следующим образом:

$$\sum_m \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{K}^{em} \cdot \mathbf{U}^{em} = \sum_m \delta \mathbf{U}^{em*} \cdot \mathbf{F}_a^{em}, \quad (3.117)$$

$$\mathbf{K}^{em} = \int_{\Omega^{em}} \mathbf{B}_u^{em*} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_u^{em} d\Omega, \quad \mathbf{B}_u^{em} = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{N}^{em*}, \quad (3.118)$$

$$\mathbf{F}_a^{em} = \mathbf{F}_b^{em} + \mathbf{F}_{sf}^{em} + \mathbf{F}_d^{em}, \quad (3.119)$$

$$\mathbf{F}_b^{em} = \int_{\Omega^{em}} \rho \mathbf{N}^{em} \cdot \mathbf{f} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{sf}^{em} = \int_{\Gamma_{\sigma h}^{em}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma h} d\Gamma, \quad \mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{U}_s, \quad (3.120)$$

$$\mathbf{K}_{0s}^{em} = \int_{\Omega^{em}} \mathbf{B}_u^{em*} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_{us}^{em} d\Omega, \quad \mathbf{B}_{us}^{em} = \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{N}_s^{em*}. \quad (3.121)$$

Теперь матрица жесткости \mathbf{K} и векторы \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_{sf} и \mathbf{F}_d могут быть построены в результате стандартной для МКЭ процедуры ансамблирования соответствующих элементных объектов \mathbf{K}^{em} , \mathbf{F}_b^{em} , \mathbf{F}_{sf}^{em} и \mathbf{F}_d^{em} по схемам, описанным в главе 1. Некоторые осложнения возникают в связи с тем, что для задач теории упругости в каждом узле теперь в зависимости от размерности задачи будут три, две или одна степень свободы (перемещения U_{xj} , U_{yj} , U_{zj} для 3D и т.д.) В остальном, как можно заметить, вывод конечно-элементных соотношений оказался достаточно похожим на соответствующий для задач теплопроводности, что можно легко заметить, сравнив текст данного раздела с п. 1.6. Это как раз и свидетельствует о большой общности МКЭ и его технологий.

Важно еще отметить, что матрица жесткости \mathbf{K} симметрична и положительно определена, если главные граничные условия (3.9) не допускают движений тела как жесткого целого. Если же постановка статической задачи теории упругости допускает движения тела как жесткого целого, то матрица жесткости \mathbf{K} только неотрицательно определена (положительно полуопределена), и ее определитель равен нулю. Данные свойства вытекают из соответствующих свойств формы $a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Из отмеченного следует, что для разрешимости СЛАУ МКЭ линейной теории упругости (3.113) необходимо так закрепить упругое тело, чтобы оно не могло смещаться как жесткое целое.

3.6. Двумерные статические задачи теории упругости и аппроксимации МКЭ

Во многих практически случаях при анализе напряженно-деформированного состояния можно рассматривать двумерные по пространственным переменным задачи теории упругости. Важнейшими типами таких задач являются задачи о *плоской деформации*, о *плоском напряженном состоянии* и *осесимметричные задачи*.

Краткое изложение постановок двумерных задач начнем с задачи о *плоской деформации* в плоскости Ox_1x_2 . Будем считать, что упругое тело имеет цилиндрическую форму с неизменным поперечным сечением $\Omega_p \in \mathbb{R}^2 = \{x_1 = x, x_2 = y\}$ и бесконечно протяжено вдоль оси $x_3 = z$. Примем также, что упругие модули и все внешние воздействия не зависят от координаты $x_3 = z$, причем векторные величины внешних воздействий имеют нулевые компоненты по $x_3 = z$, т.е. в обозначениях из (3.7), (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{f_1, f_2, 0\}; & f_j &= f_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2; & f_3 &= 0, \\ \mathbf{u}_\Gamma &= \{u_{\Gamma 1}, u_{\Gamma 2}, 0\}; & u_{\Gamma j} &= u_{\Gamma j}(x_1, x_2), \quad j = 1, 2; & u_{\Gamma 3} &= 0, \\ \mathbf{p}_\Gamma &= \{p_{\Gamma 1}, p_{\Gamma 2}, 0\}; & p_{\Gamma j} &= p_{\Gamma j}(x_1, x_2), \quad j = 1, 2; & p_{\Gamma 3} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда можно предположить, что решением является плоское поле перемещений

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, 0\}; \quad u_j = u_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2; \quad u_3 = 0. \quad (3.122)$$

Двумерное поле перемещений (3.122) по (3.1) или (3.2) порождает плоскую деформацию, так как

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$

и тензор деформаций имеет только три независимые ненулевые компоненты:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, в формуле (3.4) закона Гука $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ можно считать, что для $i, j = 1, 2, 3$ суммирование ведется только при $k, l = 1, 2$.

Остается посмотреть на уравнения равновесия (3.7) или (3.8). Поскольку все величины здесь не зависят от x_3 , то (3.7) можно записать в следующем виде

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \rho f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.123)$$

Для того, чтобы из (3.123) получить систему двух дифференциальных уравнений для двух компонент u_1, u_2 поля перемещений, потребуем выполнение равенств $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$, при которых левая часть уравнения (3.123) при $i = 3$ тождественно обращается в нуль ($f_3 = 0$). В силу симметрии тензора напряжений эти условия можно записать в виде

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

или, с учетом закона Гука, $c_{i3kl}\varepsilon_{kl} = 0$, $i = 1, 2$, где при суммировании по k и l эти индексы пробегает значения 1 и 2.

Последние равенства будут выполняться тождественно для любых компонент ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , если будут выполнены условия

$$c_{i3kl} = 0, \quad i, k, l = 1, 2, 3. \quad (3.124)$$

Равенства (3.124) являются ограничениями на модули жесткости анизотропного материала упругого тела, необходимыми для корректной постановки задачи о плоской деформации (в плоскости Ox_1x_2).

Отметим, что в декартовой системе координат тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ при плоской деформации имеет следующую структуру

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

причем, хотя в общем случае $\sigma_{33} \neq 0$, но эта компонента не входит в уравнения равновесия (3.124) при $i = 1, 2$. Поэтому в итоге величина σ_{33} не требуется для постановки и решения задачи теории упругости о плоской деформации.

Для удобства применения МКЭ основные уравнения задачи о плоской деформации в плоскости Ox_1x_2 можно записать как в векторно-матричных обозначениях из п. 3.2, так и в редуцированной форме этих обозначений. В редуцированной векторно-матричной форме вместо шестимерных псевдовекторов напряжений и деформаций можно использовать их усеченные трехмерные представления. Для этого введем соответствующие величины для плоской задачи, помеченные нижним индексом "p" (p – plane, т.е. плоский):

$$\mathbf{x}^p = \{x_1^p, x_2^p\} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{u}^p = \{u_1^p, u_2^p\} = \{u_1, u_2\}, \quad (3.125)$$

$$\nabla^p = \{\partial/\partial x_1^p, \partial/\partial x_2^p\} = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}, \quad \mathbf{S}^p = \mathbf{L}^p(\nabla^p) \cdot \mathbf{u}^p, \quad (3.126)$$

$$\mathbf{L}^{p*}(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1^p & 0 & \partial/\partial x_2^p \\ 0 & \partial/\partial x_2^p & \partial/\partial x_1^p \end{bmatrix}, \quad (3.127)$$

$$\mathbf{S}^p = \{S_1^p, S_2^p, S_3^p\} = \{S_1, S_2, S_6\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}, \quad (3.128)$$

$$\mathbf{T}^p = \{T_1^p, T_2^p, T_3^p\} = \{T_1, T_2, T_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}, \quad (3.129)$$

$$\mathbf{c}^p = \begin{bmatrix} c_{11}^p & c_{12}^p & c_{13}^p \\ & c_{22}^p & c_{23}^p \\ \text{sym} & & c_{33}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{26} \\ \text{sym} & & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.130)$$

В обозначениях (3.125)–(3.130) уравнения равновесия (3.41), закон Гука (3.32), соотношения Коши (3.38) и граничные условия (3.42), (3.43) можно записать в следующей редуцированной форме

$$\mathbf{L}^{p*}(\nabla^p) \cdot \mathbf{T}^p + \rho \mathbf{f}^p = 0, \quad \mathbf{x}^p \in \Omega^p, \quad (3.131)$$

$$\mathbf{T}^p = \mathbf{c}^p \cdot \mathbf{S}^p, \quad (3.132)$$

$$\mathbf{S}^p = \mathbf{L}^p(\nabla^p) \cdot \mathbf{u}^p, \quad (3.133)$$

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}_\Gamma^p; \quad \mathbf{x}^p \in \Gamma_{pu}, \quad (3.134)$$

$$\mathbf{p}^p = \mathbf{L}^{p*}(\mathbf{n}^p) \cdot \mathbf{T}^p; \quad \mathbf{p}^p = \mathbf{p}_\Gamma^p; \quad \mathbf{x}^p \in \Gamma_{p\sigma}, \quad (3.135)$$

где $\mathbf{f}^p = \{f_1^p, f_2^p\} = \{f_1, f_2\}$, $\mathbf{u}_\Gamma^p = \{u_{\Gamma 1}^p, u_{\Gamma 2}^p\} = \{u_{\Gamma 1}, u_{\Gamma 2}\}$, $\mathbf{n}^p = \{n_1^p, n_2^p\} = \{n_1, n_2\}$, $\mathbf{p}^p = \{p_1^p, p_2^p\} = \{p_1, p_2\}$, $\mathbf{p}_\Gamma^p = \{p_{\Gamma 1}^p, p_{\Gamma 2}^p\} = \{p_{\Gamma 1}, p_{\Gamma 2}\}$, $\Gamma_{pu} = \Gamma_u \cup \Omega_p$, $\Gamma_{p\sigma} = \Gamma_\sigma \cup \Omega_p$.

Формулы (3.125)–(3.135) дают полную постановку статической задачи о плоской деформации (в плоскости Ox_1x_2). Подчеркнем еще раз, что для возможности этой постановки требуется специальная цилиндрическая форма тела, граничные условия и внешние воздействия, не зависящие от координаты x_3 , а также ограничения на модули упругости (3.124), которые в матричных обозначениях можно записать также в виде

$$c_{14} = c_{24} = c_{46} = c_{15} = c_{25} = c_{26} = 0. \quad (3.136)$$

Условие (3.124) или (3.136) очевидно выполняется для изотропной упругой среды. В этом наиболее распространенном случае матрица упругих модулей \mathbf{c}^p выражается через коэффициенты Ламе λ и μ или через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона следующим образом

$$\mathbf{c}^p = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 \\ \text{sym} & & \mu \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ & 1 - \nu & 0 \\ \text{sym} & & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

что следует из (3.36), (3.130).

Отметим, что в (3.125)–(3.135) отсутствуют формулы для определения напряжения σ_{33} . Выражение для σ_{33} может быть получено, например, из определяющих соотношений трехмерной задачи (3.32) с учетом равенств $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ ($S_5 = S_4 = S_3 = 0$) или из (3.33) с учетом того, что $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ($T_5 = T_4 = 0$), $\varepsilon_{33} = 0$ ($S_3 = 0$). В результате можно записать

$$\sigma_{33} = c_{13}S_1 + c_{23}S_2 + c_{36}S_6 = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{23}\varepsilon_{22} + 2c_{36}\varepsilon_{12}, \quad (3.138)$$

или

$$\sigma_{33} = -\frac{s_{13}}{s_{33}} \sigma_{11} - \frac{s_{23}}{s_{33}} \sigma_{22} - \frac{s_{36}}{s_{33}} \sigma_{12}. \quad (3.139)$$

Эти формулы можно использовать после решения задачи о плоской деформации для анализа напряженного состояния и для различных критериев прочности.

Для изотропной среды, с учетом (3.36), (3.37) формулы (3.138), (3.139) можно представить в виде

$$\sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Выражение для σ_{33} можно было включить в основные формулы для плоской задачи (3.127)–(3.130), введя вместо трехмерных псевдовекторов \mathbf{S}^p и \mathbf{T}^p другие четырехмерные псевдовекторы. При таком подходе вместо (3.127)–(3.130) можно использовать, например, следующие формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{p*}(\nabla) &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1^p & 0 & 0 & \partial/\partial x_2^p \\ 0 & \partial/\partial x_2^p & 0 & \partial/\partial x_1^p \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}^p &= \{S_1^p, S_2^p, S_3^p, S_4^p\} = \{S_1, S_2, 0, S_6\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 0, 2\varepsilon_{12}\}, \\ \mathbf{T}^p &= \{T_1^p, T_2^p, T_3^p, T_4^p\} = \{T_1, T_2, T_3, T_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}\}, \\ \mathbf{c}^p &= \begin{bmatrix} c_{11}^p & c_{12}^p & c_{13}^p & c_{14}^p \\ & c_{22}^p & c_{23}^p & c_{24}^p \\ & & c_{33}^p & c_{34}^p \\ \text{sym} & & & c_{44}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{36} \\ \text{sym} & & & c_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эти формулы могут быть полезными при создании единообразных программных модулей для конечных элементов двумерных задач теории упругости, поскольку, как будет показано далее, для осесимметричных задач требуются четырехмерные псевдовекторы деформаций и напряжений и матрицы размера 4×4 .

Заканчивая изложение постановок задачи о плоской деформации отметим, что в реальности эта задача может рассматриваться не для бесконечно протяженных, а для сильно вытянутых тел вдоль оси x_3 цилиндрических тел при сохранении всех основных допущений. Тогда, если тело имеет длину l по координате x_3 , например, $x_3 \in [-l/2, l/2]$, то задача о плоской деформации для ограниченного цилиндрического тела дает точное решение трехмерной задачи, у которой на торцевой поверхности выполняются краевые условия

$$\sigma_{33}|_{x_3=\pm l/2} = \sigma_{33}^p|_{x_3=\pm l/2}, \quad \sigma_{3j}|_{x_3=\pm l/2} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.140)$$

где $\sigma_{33}^p = \sigma_{33}$ определяется по (3.138) или по (3.139) после решения задачи о плоской деформации. Очевидно, что изначально для трехмерной

задачи проблема подбора компонент напряжений, обеспечивающих выполнение условий (3.140), в общем случае практически неразрешима. Обычно на торцевых поверхностях принимаются однородные (нулевые) граничные условия для σ_{33} , т.е. торцевые поверхности считаются свободными от напряжений. В этих случаях решения трехмерных задач и задач о плоской деформации могут совпадать лишь приближенно, но, как правило, чем длиннее цилиндрической тело по оси x_3 , тем менее разнятся эти решения, особенно для центральных сечений тела. В этом и состоит практическая польза от решений задач о плоской деформации, поскольку очевидно, что решение задачи о плоской деформации значительно проще, чем решение соответствующей трехмерной задачи.

В задачах о *плоском напряженном состоянии* в плоскости Ox_1x_2 рассматривается тонкое упругое тело (пластина) малой толщины h вдоль оси x_3 ($-h/2 \leq x_3 \leq h/2$), имеющее в плане сечение $\Omega_p \in \mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$.

Задачи к главе 3

3.1. Покажите, что в цепочке равенств (3.5), определяющих полусимметричный тензор четвертого ранга \mathbf{c} , второе или третье равенство является следствием трех остальных.

3.2. Найдите максимальное число независимых модулей упругости среди компонент c_{ijkl}^E с учетом (3.5). (**Замечание.** В главных осях анизотропии число независимых компонент уменьшается до 18 [58].)

3.3. Покажите, что единичный тензор четвертого ранга $\Delta_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ обладает следующими свойствами: $\forall \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \boldsymbol{\Delta} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

3.4. Покажите, что единичный тензор четвертого ранга $\boldsymbol{\Delta}$ с компонентами $\Delta_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ является полусимметричным тензором, т.е. что для него выполняются условия симметрии типа (3.5). Является ли тензор $\boldsymbol{\Delta}$ положительно определенным в смысле (3.6)?

3.5. Докажите, что при смещениях упругого тела как жесткого целого деформации равны нулю, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ при перемещениях вида (3.11).

3.6. Покажите, что если упругое тело нигде не закреплено, т.е. $\Gamma = \Gamma_\sigma$, то должны выполняться равенства (3.12), (3.13). Для доказательства (3.12) нужно проинтегрировать уравнение равновесия (3.7) по области Ω , использовать формулу Гаусса-Остроградского для дивергенции тензорного поля и граничное условие (3.10). Доказательство (3.13) более сложно.

3.7. Докажите справедливость формул (3.22) для λ_s и μ_s , входящих в выражение (3.21) для компонент тензора упругих податливостей s_{ijkl} изотропной упругой среды. Для этого надо проверить, что при справедливости (3.22) выполняется соотношение: $c_{ijkl}s_{klmn} = \Delta_{ijmn}$.

3.8. Покажите, что в обозначениях из (3.27), закон Гука для ортотропной среды

МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E_1}{D} \left(1 - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2}\right) \varepsilon_{11} + \frac{E_2}{D} \left(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_3}{E_2}\right) \varepsilon_{22} + \frac{E_3}{D} \left(\nu_{13} + \nu_{23} \nu_{12}\right) \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{D} \left(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_3}{E_2}\right) \varepsilon_{11} + \frac{E_2}{D} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) \varepsilon_{22} + \frac{E_3}{D} \left(\nu_{23} + \nu_{13} \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}\right) \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E_3}{D} \left(\nu_{13} + \nu_{23} \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}\right) \varepsilon_{11} + \frac{E_3}{D} \left(\nu_{23} + \nu_{13} \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}\right) \varepsilon_{22} + \frac{E_3}{D} \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}\right) \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2G_{12} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2G_{23} \varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G_{13} \varepsilon_{13},\end{aligned}$$

где

$$D = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - 2\nu_{12} \nu_{23} \nu_{13} \frac{E_3}{E_1}.$$

3.9. Покажите, что из условия положительной определенности (3.6) тензора упругих жесткостей четвертого ранга следует положительная определенность матрицы упругих жесткостей \mathbf{c} размера 6×6 из (3.31). Т.е. нужно показать, что для любого шестимерного вектора $\mathbf{S} \neq 0$ выполнено неравенство $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{S} > 0$.

3.10. Проверьте, что связь между компонентами $s_{\alpha\beta}$ матрицы и компонентами s_{ijkl} тензора упругих податливостей действительно дается формулой (3.34).

3.11. Проверьте справедливость соотношений (3.40) или, в более общем случае, что скалярное умножение трехмерного вектора \mathbf{a} на симметричный тензор второго ранга $\boldsymbol{\sigma}$ можно записать в векторно-матричной форме в виде: $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^*(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{T}$, где шестимерный вектор \mathbf{T} связан с тензором $\boldsymbol{\sigma}$ по (3.30), а матрица $\mathbf{L}^*(\mathbf{a})$ определяется по (3.39) при замене ∇ на \mathbf{a} .

3.12. Покажите, что задача минимизации функционала $J(\mathbf{v})$ из (3.84) в пространстве V эквивалентна задаче минимизации функционала $\tilde{J}(\mathbf{v})$ из (3.85) на множестве вектор-функций $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_s$; $\mathbf{v}_0 \in V$.

3.13. Покажите, что матрица жесткости \mathbf{K} (3.109) симметрична и положительно определена, если главные граничные условия (3.9) не допускают движений тела как жесткого целого, и матрица жесткости \mathbf{K} только неотрицательно определена, если граничными условиями задачи допускаются движения тела как жесткого целого. Для доказательства используйте соответствующие свойства формы $a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ из (3.74).

Глава 4

МКЭ В ДИНАМИЧЕСКИХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ

4.1. Постановки динамических задач теории упругости

В данном разделе будут даны постановки динамических задач линейной теории упругости. Эти постановки будут являться расширением постановок статических задач из п. 3.1 за счет учета динамических эффектов. Кроме того, применительно к практике МКЭ будут включены слагаемые, характеризующие потери. Слова "потери", "затухание", "демпфирование" здесь будут применяться как синонимы. Среди многих способов введения потерь базовым в МКЭ является способ учета демпфирования по Релею, который и будет использоваться ниже.

Итак, пусть в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассматриваются динамические процессы упругого деформирования. При этом вектор перемещений \mathbf{u} будет являться вектор-функцией пространственных координат \mathbf{x} и времени t : $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнения движения упругой среды при способе учета демпфирования по Релею имеют вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.1)$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x})$ – плотность, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – вектор плотности массовых сил, α_d – неотрицательный коэффициент демпфирования, $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$.

Заметим, что слагаемое $\alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}$ может подвергаться критике с термодинамических позиций, но оно позволяет достаточно просто и адекватно описывать многие явления затухания упругих волн и поэтому принимается в практике многочисленных расчетов реальных динамических процессов.

Вместо закона Гука (3.3) связи тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ с тензором де-

формаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через тензор упругих модулей \mathbf{c} примем его обобщение

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (4.2)$$

определяющее простейшую модель вязкоупругого тела, называемую моделью Кельвина или, реже, моделью Фойхта. Здесь β_d – второй неотрицательный коэффициент демпфирования.

В совокупности введение двух слагаемых в (4.1) и (4.2) с коэффициентами α_d и β_d и составляет *способ учета демпфирования по Релею*. Понятно, что лишь один из возможных способов учета потерь, причем один из наиболее простых. Но именно он стандартно и используется в реальной практике расчетов динамических задач структурного анализа в МКЭ как базовый.

Тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ в линейной теории определяется через вектор перемещений по той же формуле (3.1), что и в задачах статики:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2. \quad (4.3)$$

В итоге система дифференциальных уравнений динамической линейной теории упругости при способе учета демпфирования по Релею дается формулами (4.1)–(4.3). Из этих уравнений легко получить единую систему дифференциальных уравнений относительно вектора перемещений \mathbf{u}

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \beta_d \nabla \dot{\mathbf{u}})) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (4.4)$$

поскольку $\mathbf{c} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{c} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}^*$ в силу свойств симметрии (3.5) тензора упругих модулей \mathbf{c} .

В компонентной записи систему (4.4) можно записать следующим образом:

$$(c_{ijkl}(u_{k,l} + \beta_d \dot{u}_{k,l}))_{,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i + \alpha_d \rho \dot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.5)$$

В \mathbb{R}^3 эта система является системой трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка по пространственным переменным и второго порядка по времени.

В случае изотропной однородной среды, когда тензор упругих модулей выражается через коэффициенты Ламе λ и μ по (3.17), система уравнений движения (4.4) принимает вид:

$$\mu \Delta(\mathbf{u} + \beta_d \dot{\mathbf{u}}) + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{u} + \beta_d \dot{\mathbf{u}})) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}. \quad (4.6)$$

При отсутствии затухания эта система может рассматриваться как предельный случай гиперболических систем. Сосредоточенный источник в безграничном пространстве в этом случае будет генерировать продольные и

поперечные упругие волны со скоростями c_1 и c_2 , соответственно. Значения этих скоростей через плотность ρ и коэффициенты Ламе λ и μ или модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν определяются в виде:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}. \quad (4.7)$$

Данные формулы могут использоваться в расчетах по МКЭ для оценки времени пробега упругих волн по упругой конструкции и выбора размеров конечных элементов и шагов по времени в соответствующих численных схемах.

Для полноты постановок динамических задач при неустановившихся процессах нужны еще граничные и начальные условия. Основными типами граничных условий в динамике являются те же главные и естественные граничные условия (3.9) и (3.10), т.е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad (4.9)$$

только теперь векторы перемещений \mathbf{u}_Γ и напряжений \mathbf{p}_Γ могут, вообще говоря, зависеть как от пространственных координат \mathbf{x} , так и от времени t : $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}_\Gamma = \mathbf{p}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$. Здесь, как и в п. 3.1 предполагается, что граница области $\Gamma = \partial\Omega$ подразделена на два подмножества Γ_u и Γ_σ : $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$.

Для дифференциальных уравнений движения второго порядка по времени нужны еще начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, +0) = \mathbf{u}_*(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, +0) = \mathbf{v}_*(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.10)$$

где $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$ – начальные смещения точек тела, $\mathbf{v}_*(\mathbf{x})$ – начальные скорости.

В большинстве задач начальным положением является состояние покоя, когда $\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{v}_*(\mathbf{x}) = 0$. Однако, встречаются и постановки задач с неоднородными начальными условиями. Например, во многих задачах удара задаются ненулевые начальные скорости $\mathbf{v}_*(\mathbf{x})$.

Итак, постановки динамических задач линейной теории упругости *при неустановившихся процессах* имеют вид начально-краевых задач (4.1)–(4.3), (4.8), (4.9), (4.10). Такие задачи называются еще *задачами о переходных* или *о неустановившихся процессах* (в ANSYS – Transient Analysis).

На практике внешние воздействия часто изменяются по гармоническому закону. Пусть все внешние воздействия в динамической задаче изменяются с одной и той же частотой f по гармоническому закону

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{p}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{p}}_\Gamma(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad (4.11)$$

где $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathbf{p}}_\Gamma(\mathbf{x})$ – векторы амплитудных значений (вообще говоря, комплексные), $\omega = 2\pi f$ – круговая частота.

Если эти внешние воздействия действуют на упругое тело достаточно долго, то можно не учитывать начальные условия и предполагать, что и решение изменяется по тому же закону

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11), (4.12) в (4.1)–(4.3), (4.8), (4.9) и сокращая во всех уравнениях на множитель $\exp(i\omega t)$, получаем краевую задачу только для амплитудных значений:

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \tilde{\mathbf{f}} = -\rho(\omega^2 - i\alpha_d \omega) \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.13)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1 + i\beta_d \omega) \mathbf{c} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^*)/2, \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}; \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (4.17)$$

Такая задача называется *задачей об установившихся колебаниях* или гармонической задачей о колебаниях (в ANSYS – Harmonic Analysis).

В (4.13)–(4.17) время t отсутствует. Однако после нахождения решения $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ при его анализе надо учитывать, что это только амплитудное значение перемещений, а сама вектор-функция перемещений имеет вид (4.12). Кроме того, в реальности важны вещественные и мнимые части решения ($\text{Re } \mathbf{u}$, $\text{Im } \mathbf{u}$), соответствующие вещественным и мнимым частям внешних воздействий.

Задача об установившихся колебаниях (4.13)–(4.17) отличается комплексной арифметикой, что должно учитываться в соответствующих решателях МКЭ.

Другой особенностью задач (4.13)–(4.17) является то, что зачастую представляет интерес не единичное решение, а решения \mathbf{u} для целого диапазона

частот $f \in [f_b, f_e]$ ($\omega \in [\omega_b, \omega_e]$, $\omega = 2\pi f$). Такие решения нужны для построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и для анализа поведения решения на различных частотах.

Как хорошо известно, на определенных частотах амплитуды этих решений могут достаточно сильно возрастать, причем максимумы амплитуд зависят также от значений коэффициентов демпфирования α_d и β_d . В частности, если $\alpha_d = \beta_d = 0$, т.е. в отсутствии демпфирования, решения задач об установившихся колебаниях могут стремиться к бесконечности при стремлении частоты к некоторым особым значениям. Такие частоты называются *резонансными частотами*, и их поиск чрезвычайно важен во многих практических приложениях.

Для поиска резонансных частот можно рассматривать задачу (4.13)–(4.17) при $\alpha_d = \beta_d = 0$, $\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma = 0$, $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma = 0$, $\tilde{\mathbf{p}}_\Gamma = 0$. При этих предположениях имеем:

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.18)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{\mathbf{u}}^*)/2, \quad (4.20)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4.21)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (4.22)$$

В задаче (4.18)–(4.22) неизвестными являются как амплитудные значения перемещений $\tilde{\mathbf{u}}$, так и круговая частота ω . Поскольку $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ всегда является решением задачи (4.18)–(4.22), то здесь представляет интерес именно нетривиальные решения $\tilde{\mathbf{u}} \neq 0$.

Из математической теории упругости известно, что для задачи (4.18)–(4.22) для ограниченной области Ω существует счетное число собственных частот ω_k и соответствующих им собственных векторов $\tilde{\mathbf{u}}_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем все эти собственные частоты будут являться вещественными.

Собственные векторы $\tilde{\mathbf{u}}_k$ называются также *собственными формами колебаний* или *модами* (mode – вид, форма), поскольку в решениях $\mathbf{u}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}) \exp(i\omega_k t)$ амплитуда $\tilde{\mathbf{u}}_k$ показывает, как могут смещаться точки тела при их резонансных колебаниях по гармоническому закону с круговой частотой ω_k .

Задача о собственных колебаниях (4.18)–(4.22) называется еще *задачей на собственные частоты*, а в математике – задачей на собственные значения. (В ANSYS этот тип анализа носит название *модального анализа* – Modal Analysis.)

На практике интерес представляют, как правило, не все собственные частоты (которых бесконечное множество), а только некоторые. Наиболее часто требуется найти несколько первых собственных частот (и соответствующих им собственных векторов) или найти частоты, принадлежащие некоторому интервалу $\omega_k \in [\omega_b, \omega_e]$. Таким образом, для практики обычно нужны решатели частичной задачи на собственные значения.

Итак, имеются *три типа динамических задач теории упругости: нестационарные задачи, задачи об установившихся колебаниях и задачи на собственные частоты* (Transient, Harmonic & Modal Analyses). В действительности эти задачи связаны между собой, и инженерам при анализе динамики упругих систем бывают важны сразу все эти три типа задач. Так, например, при однородных главных граничных условиях решения нестационарных задач и задач об установившихся колебаниях можно представить в виде рядов по собственным формам колебаний. Тогда при анализе решений можно увидеть, какие формы колебаний наиболее существенны для рассматриваемых типов переходных процессов и при установившихся колебаниях.

Естественно, что динамические задачи обычно сложнее, чем аналогичные статические задачи. МКЭ позволяет эффективно находить приближенные решения для всех этих трех типов динамических задач. При этом, как будет показано далее, в арсенале программного инструментария МКЭ должны быть решатели задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, СЛАУ с комплексной арифметикой и обобщенных задач на собственные значения.

4.2. Обобщенные постановки и системы МКЭ для динамических задач теории упругости

При построении численных схем решения нестационарных динамических задач проекционно-разностными методами возможны два основных подхода.

При первом подходе вначале формулируются обобщенные постановки при фиксированных временах и далее проводится их дискретизация по пространственным переменным. В итоге первого подхода получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, которые затем решаются подходящими численными шаговыми схемами интегриро-

вания по времени.

При втором подходе обобщенные постановки включают как интегралы по пространственным переменным, так и интегральные свертки по времени. Соответственно, при численном решении проводится дискретизация сразу по пространственным переменным и по времени.

С позицией вариационных принципов механики первый подход исходит из вариационных принципов возможных перемещений Лагранжа, в второй – из вариационного принципа Гамильтона.

Первый подход в настоящее время завоевал наибольшую популярность. Он позволяет единообразно получать конечно-элементные формулировки как для нестационарных задач, так и задач об установившихся колебаниях и задач на собственные частоты. Этот подход и будет рассматриваться в настоящем разделе.

Будем исходить из классической постановки нестационарной динамической задачи линейной теории упругости (4.1)–(4.3), (4.8)–(4.10). Для перехода к обобщенным формулировкам будем действовать также, как и в п. 3.4 для статических задач. Именно, умножим уравнение движения (4.1) скалярно на произвольную достаточно гладкую функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in V$, удовлетворяющую однородному главному граничному условию (3.67), и проведем преобразования, аналогичные проделанным в ранее п. 3.4 для статических задач. Как несложно увидеть, в результате получим

$$m(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{L}(\mathbf{v}), \quad (4.23)$$

где $a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ и $\tilde{L}(\mathbf{v})$ определены, соответственно, в (3.74), (3.75),

$$m(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (4.24)$$

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha_d m(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \beta_d a(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (4.25)$$

Таким образом, по сравнению со статической задачей здесь добавились члены $m(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}})$ и $c(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}})$.

Билинейная форма $m(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ симметрична и положительно определена в $L_2(\Omega)$. Форма $c(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ является линейной комбинацией форм $m(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ и $a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, что и было целью способа учета демпфирования по Релею.

Соотношение (4.23) нужно рассматривать вместе с начальными условиями (4.10), которые можно также записать в интегральном виде

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{L_2} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_*)_{L_2}, \quad (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}})_{L_2} = (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}_*)_{L_2}, \quad (4.26)$$

где \mathbf{v} – проекционные функции, а \mathbf{v}_* – начальная скорость.

Если снять неоднородность главного граничного условия (4.8) посредством введения специальной функции $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей этому граничному условию, т.е. если использовать представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s, \quad (4.27)$$

с $\mathbf{u}_0 = 0$; $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, то интегральное соотношение (4.23) принимает вид

$$m(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_0) + c(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0) + a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = L(\mathbf{v}), \quad (4.28)$$

где функционал $L(\mathbf{v})$ будет отличаться от соответствующего в (3.82) для статических задач

$$L(\mathbf{v}) = \tilde{L}(\mathbf{v}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_s) - c(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_s) - m(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_s). \quad (4.29)$$

Для определения слабого решения нестационарных задач введем пространство $Q = L_2(0, T; V)$, где для банахова пространства X с нормой $\|\cdot\|_X$ через $L^2(0, T; X)$ обозначено [15] пространство (классов) функций $t \rightarrow f(t)$ из $[0, T]$ в X и таких, что

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} = \|f\|_{L_2(0, T; X)} < \infty.$$

Определение. *Обобщенным или слабым решением начально-краевой задачи линейной теории упругости* назовем функцию $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ вида (4.27), где $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \in Q$ удовлетворяет при $\forall t \in [0, T]$ интегральному соотношению (4.28) для $\forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in V$ и начальным условиям, следующим из (4.26), (4.27). При этом функция $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ должна удовлетворять неоднородным главным граничным условиям (4.8).

Отметим особенности данного определения обобщенного решения. Основная составляющая решения \mathbf{u}_0 здесь зависит как от пространственных координат \mathbf{x} , так и от времени t , и $\mathbf{u}_0 \in Q$, а проекционная функция \mathbf{v} зависит только от \mathbf{x} , и $\mathbf{v} \in V$. Кроме того, здесь требуется выполнение интегрального соотношения (4.28) $\forall t$ из некоторого промежутка времени $[0, T]$, где значение T не входит в первоначальную постановку задачи и выбирается достаточно произвольно. В этом определении обобщенного решения понижены требования гладкости функции \mathbf{u}_0 по пространственным координатам, но по времени в (4.28) остались вторые производные. Именно это

определение и лежит в основе так называемых *полудискретных аппроксимаций МКЭ для нестационарных задач* (с первоначальной дискретизацией только по \mathbf{x}).

Для формулировки полудискретного варианта МКЭ введем сетку конечных элементов $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$, $\Omega_h \approx \Omega$, и рассмотрим слабую постановку (4.28) на Ω_h с границей $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ и со снесенными на Γ_h граничными условиями. С учетом (4.24), (4.25), (4.29) будем иметь

$$m_h(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_{0h}) + c_h(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_{0h}) + a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}) = L_h(\mathbf{v}), \quad (4.30)$$

где

$$m_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}) = \int_{\Omega_h} \rho \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}_{0h} d\Omega, \quad (4.31)$$

$$c_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}) = \alpha_d m_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}) + \beta_d a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h}), \quad (4.32)$$

$$L_h(\mathbf{v}) = \tilde{L}_h(\mathbf{v}) - a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{sh}) - c_h(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_{sh}) - m_h(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_{sh}), \quad (4.33)$$

а $\tilde{L}_h(\mathbf{v})$ и $a_h(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{0h})$ определены в (3.98), (3.99), соответственно.

Примем в $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$ полудискретные конечно-элементные аппроксимации

$$\mathbf{u}_{0h} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{u}_{sh} = \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s(t), \quad (4.34)$$

$$\mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) + \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s(t), \quad (4.35)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})], \quad \tilde{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U}, \mathbf{U}_s\}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}. \quad (4.37)$$

Данные представления почти полностью аналогичны использованным в (3.104)–(3.107) в п. 3.5 для статических задач, но теперь узловые перемещения являются функциями от времени, и пока не дискретизированы по времени.

Подставляя (4.34)–(4.37) в (4.30)–(4.33) и учитывая произвольность вектора $\delta \mathbf{U}$, получаем *основное уравнение движения МКЭ для нестационарных задач*

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.38)$$

где

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_h} \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* d\Omega, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{U}_s - \mathbf{C}_{0s} \cdot \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{M}_{0s} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{M}_{0s} = \int_{\Omega_h} \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_s^* d\Omega, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{C}_{0s} = \alpha_d \mathbf{M}_{0s} + \beta_d \mathbf{K}_{0s}, \quad (4.44)$$

а \mathbf{K} , \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_{sf} и \mathbf{K}_{0s} совпадают с определенными в (3.109), (3.111), (3.112) для статических задач.

Матрица \mathbf{M} из (4.39) называется *матрицей масс*, а матрица \mathbf{C} из (4.40) – *матрицей демпфирования*.

К уравнениям МКЭ (4.38) нужно присовокупить начальные условия, которые можно получить из континуальных начальных условий (4.10) или из начальных условий (4.26) в слабой форме

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_*, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_*, \quad (4.45)$$

где \mathbf{U}_* – вектор начальных смещений узлов тела, \mathbf{V}_* – вектор начальных скоростей.

Таким образом, полудискретная аппроксимация МКЭ для нестационарных задач линейной теории упругости приводит к задаче Коши (4.38), (4.45) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент вектора узловых перемещений $\mathbf{U}(t)$.

Отметим, что матрица масс \mathbf{M} симметрична и положительно определена (задача 4.4), причем независимо от наличия главных граничных условий. Матрица демпфирования \mathbf{C} также симметрична и положительно определена, если $\alpha_d \neq 0$, или, если при $\alpha_d = 0$ матрица жесткости \mathbf{K} положительно определена.

Из системы (4.38) легко получить *уравнения МКЭ для задач об установившихся колебаниях и для задач на собственные частоты*.

Для режима установившихся колебаний с круговой частотой ω

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} e^{i\omega t}. \quad (4.46)$$

из (4.38) сразу получаем

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}. \quad (4.47)$$

Таким образом, для задачи линейной теории упругости об установившихся колебаниях для определения вектора узловых амплитуд перемещений $\tilde{\mathbf{U}}$ нужно решить СЛАУ (4.47) с комплексной матрицей (и возможно с комплексным вектором правых частей).

В задаче на собственные частоты $\alpha_d = \beta_d = 0$, и следовательно, $\mathbf{C} = 0$, а также все внешние воздействия нулевые, т.е. $\mathbf{F} = 0$. Поэтому из (4.47) имеем

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0. \quad (4.48)$$

В вычислительной математике задача (4.48) относительно ω^2 и $\tilde{\mathbf{U}}$ называется обобщенной задачей на собственные значения $\lambda = \omega^2$.

Итак, для трех основных типов динамических задач линейной теории упругости конечно-элементные аппроксимации слабых постановок приводят к следующим задачам: к задаче Коши (4.38), (4.45) – для нестационарных задач; к СЛАУ (4.47) – для задач об установившихся колебаниях; и к обобщенной задаче на собственные значения (4.48) – для задач на собственные частоты.

4.3. Основные свойства собственных частот и мод колебаний

Рассмотрим более подробно задачу на собственные частоты (4.48), которую запишем в виде ($\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{W}$)

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}. \quad (4.49)$$

Здесь \mathbf{M} – симметричная положительно определенная матрица масс, \mathbf{K} – симметричная и по крайней мере неотрицательно определенная матрица жесткости, и надо найти собственные частоты ω и соответствующие им собственные векторы или моды колебаний $\mathbf{W} \neq 0$ (которые ранее были обозначены как $\tilde{\mathbf{U}}$).

Данная задача является обобщенной задачей на собственные значения, и ей посвящена обширная литература (см., например, [41]).

Очевидно, для того, чтобы вектор \mathbf{W} был нетривиальным решением уравнения (4.49), требуется выполнение равенства

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (4.50)$$

Если матрицы \mathbf{M} и \mathbf{K} являются матрицами порядка $n \times n$, то уравнение (4.50) есть полиномиальное уравнение порядка n относительно $\lambda = \omega^2$:

$$\det(-\lambda \mathbf{M} + \mathbf{K}) = P_n(\lambda) = 0, \quad (4.51)$$

где $P_n(\lambda)$ – полином порядка n .

Как известно, полином порядка n имеет ровно n корней с учетом их кратности, т.е. в задаче (4.49) имеется n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ с учетом их возможной кратности.

Заметим, что кратность корней λ_l как корней многочлена $P_n(\lambda)$ называется алгебраической кратностью собственных значений.

Если λ_l – собственное значение, а $\mathbf{W}_l \neq 0$ – соответствующий собственный вектор, то

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_l = \lambda_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l, \quad \lambda_l = \omega_l^2. \quad (4.52)$$

Умножив (4.52) почленно слева скалярно на \mathbf{W}_l^* , получим числовое равенство, из которого находим

$$\lambda_l = \omega_l^2 = \frac{\mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_l}{\mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l}. \quad (4.53)$$

Поскольку матрица \mathbf{M} положительно определена, то знаменатель в (4.53) есть вещественное положительное число, а так как \mathbf{K} – по крайней мере неотрицательно определенная матрица, то числитель в (4.53) есть вещественное неотрицательное число. Поэтому все собственные значения λ_l вещественны и неотрицательны. Тогда и *все собственные частоты* $\omega_l = \sqrt{\lambda_l}$ будут также *вещественны и неотрицательны*. (В формуле $\omega_l = \pm\sqrt{\lambda_l}$ по физическому смыслу логично взять знак "+").

Итак, задача (4.49) имеет n вещественных неотрицательных частот, которые можно занумеровать в порядке возрастания:

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_l \leq \dots \leq \omega_n.$$

Запишем теперь транспонированное к (4.49) равенство для другого собственного значения λ_m и соответствующего собственного вектора \mathbf{W}_m :

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{K} = \lambda_m \mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M}, \quad \lambda_m = \omega_m^2. \quad (4.54)$$

Умножая почленно равенство (4.52) слева скалярно на \mathbf{W}_m^* , а (4.54) – справа скалярно на \mathbf{W}_l , и вычитая полученные равенства почленно, получаем

$$(\lambda_l - \lambda_m) \mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l = 0. \quad (4.55)$$

Из (4.55) вытекает, что если $\lambda_l \neq \lambda_m$, то

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l = 0. \quad (4.56)$$

Отметим, что два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} называются ортогональными по положительно определенной матрице \mathbf{M} , если $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} = 0$. Это определение обобщает обычное определение ортогональности векторов ($\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = 0$), которое можно понимать как ортогональность по единичной матрице. Равенство (4.56) свидетельствует, что два собственных вектора \mathbf{W}_m и \mathbf{W}_l , отвечающие различным собственным значениям, ортогональны по матрице масс \mathbf{M} .

Если $\lambda_l = \lambda_m$ – кратное собственное значение, то такому кратному собственному значению отвечает целое подпространство собственных векторов. Размерность этого подпространства как корневого подпространства для уравнения (4.49) называется геометрической кратностью собственного значения. В общей ситуации геометрическая кратность всегда не превосходит алгебраической кратности того же собственного значения. Для рассматриваемого здесь случая симметричных матриц \mathbf{M} и \mathbf{K} геометрическая и алгебраическая кратности всех собственных значений одинаковы. Таким образом, для λ_l алгебраической кратности k_l можно выбрать k_l линейно независимых собственных векторов \mathbf{W}_l , которые можно ортогонализировать по матрице \mathbf{M} , чтобы и для них выполнялось равенство (4.56).

Итак, система собственных векторов $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$, отвечающая системе собственных значений $\{\lambda_l\}_{l=1}^n$, может быть выбрана ортогональной по матрице масс.

Так как собственные векторы определены с точностью до произвольной постоянной, то можно еще принять условие нормировки:

$$\mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l = 1, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (4.57)$$

В итоге получаем окончательный результат. Система собственных векторов $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$, отвечающая системе собственных значений $\{\lambda_l\}_{l=1}^n$, может быть выбрана ортонормированной по матрице масс:

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l = \delta_{ml}, \quad (4.58)$$

где δ_{ml} – символ Кронекера.

Из (4.53), очевидного равенства $\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_l = \mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l$ и (4.58) имеем также, что система собственных векторов $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$, отвечающая системе собственных значений $\{\lambda_l\}_{l=1}^n$ и ортонормированная по матрице масс, является ортогональной по матрице жесткости:

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_l = \omega_l^2 \delta_{ml}. \quad (4.59)$$

При этом очевидно, что собственные векторы $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Установленные здесь важные свойства собственных значений и собственных векторов лежат в основе метода разложения по модам для решения задач об установившихся колебаниях и нестационарных задач МКЭ.

4.4. Метод разложения по модам для задач об установившихся колебаниях и для нестационарных задач

Рассмотрим задачу МКЭ (4.48) об установившихся колебаниях

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (4.60)$$

где $\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K}$.

Пусть для данной задачи главные граничные условия были нулевыми, что позволяет рассматривать систему собственных векторов $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$ соответствующей задачи на собственные значения (4.49) как базис, по которому можно разложить решение $\tilde{\mathbf{U}}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{l=1}^n z_l \mathbf{W}_l. \quad (4.61)$$

Подставляя разложение (4.61) в (4.60), умножая полученное равенство скалярно на \mathbf{W}_m^* и используя соотношения ортогональности (4.58), (4.59), получим

$$(\omega_m^2 - \omega^2 + i(\alpha_d + \beta_d \omega_m^2)\omega) z_m = P_m, \quad (4.62)$$

где

$$P_m = \mathbf{W}_m^* \cdot \tilde{\mathbf{F}}. \quad (4.63)$$

Из (4.62) при замене индекса m на l коэффициенты z_l определяются в виде

$$z_l = \frac{P_l}{\omega_l^2 - \omega^2 + i(\alpha_d + \beta_d \omega_l^2)\omega}. \quad (4.64)$$

Заметим, что для малых частот ω коэффициенты z_l убывают как $1/\omega_l^2$. Поэтому при реализации метода можно ограничиться числом учитываемых мод колебаний, и в ряде по собственным формам (4.61) значительно уменьшить число n , взяв $n_* \ll n$. Это существенно для наиболее трудоемкого шага 1, так как позволяет решать не полную, а только частичную

обобщенную задачу на собственные значения для малого количества частот.

В результате имеем следующий *метод разложения по модам для решения задач об установившихся колебаниях*.

Шаг 1. Решаем частичную обобщенную задачу на собственные значения $\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}$ и находим собственные векторы $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^{n_*}$ и собственные частоты $\{\omega_l\}_{l=1}^{n_*}$.

Шаг 2. Вычисляем $P_l = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{F}$, z_l по (4.63), $l = 1, 2, \dots, n_*$.

Шаг 3. Получаем решение $\tilde{\mathbf{U}}$ по (4.61), где n заменяем на n_* .

Метод разложения по модам имеет ряд существенных достоинств:

- аналитические формы решения на шагах 2 и 3 позволяют исследовать вклады отдельных мод собственных колебаний;
- быстрота вычислений на шагах 2 и 3 повышает эффективность метода при необходимости повторения расчетов одной и той же задачи при различных внешних воздействиях \mathbf{F} ;
- в отдельных модовых уравнениях (4.62) можно использовать различные механизмы учета затухания, зависящие от частоты (не обязательно использовать способ учета демпфирования по Релею).

Обсудим последнюю возможность более подробно. Запишем уравнение (4.62) при замене индекса m на l в виде

$$(\omega_l^2 - \omega^2 + 2i\xi_l\omega_l\omega)z_l = P_l, \quad (4.65)$$

где

$$\xi_l = \frac{\alpha_d + \beta_d\omega_l^2}{2\omega_l}. \quad (4.66)$$

Здесь формулы (4.62) и (4.65) эквивалентны, но представление, аналогичное (4.65), достаточно часто используется в литературе по теоретической механике и электротехнике при рассмотрении задач для линейного осциллятора с одной степенью свободы.

Коэффициент ξ_l часто называется параметром затухания для моды с частотой ω_l (или для моды с номером l). По методу учета демпфирования по Релею ξ_l задается по формулам (4.66). Однако можно отказаться от представления (4.66) и задавать различные коэффициенты затухания ξ_l напрямую. В этом случае вместо (4.64) имеем

$$z_l = \frac{P_l}{\omega_l^2 - \omega^2 + 2i\xi_l\omega_l\omega}, \quad (4.67)$$

и, таким образом, на шаге 2 метода надо использовать формулу (4.67) вместо (4.64).

При описанном подходе матрица демпфирования \mathbf{C} вообще явно не строится и идет работа только с отдельными модальными уравнениями (4.65). Но поскольку учет демпфирования по Релею есть только один из простейших возможных подходов, то явное введение коэффициентов затухания ξ_l очевидно имеет право на существование. Кроме того, можно заметить, что если $\omega \rightarrow \omega_l$, то при $P_l \neq 0$ множитель z_l растет и значительно превосходит остальные коэффициенты z_m при $m \neq l$. Поэтому, проведя реальный эксперимент в окрестности возбуждаемой резонансной частоты ω_l , можно проанализировать поведение члена $z_l \mathbf{W}_l$, и из (4.67) определить ξ_l , т.е. коэффициент затухания на моде с частотой $\omega_l = 2\pi f_l$ может определяться экспериментально. В технике обычно существуют методики определения добротности Q_l на резонансной частоте, которая связана с модовыми коэффициентами затухания ξ_l простой формулой

$$Q_l = \frac{1}{2\xi_l}. \quad (4.68)$$

Измерив экспериментально добротности Q_l или коэффициенты затухания ξ_l на разных резонансных частотах $\omega_l = 2\pi f_l$, можно найти, что совсем не обязательно будет выполняться формула (4.66) с едиными коэффициентами демпфирования α_d, β_d .

Из этих рассуждений, кстати, получается известный способ определения коэффициентов демпфирования α_d, β_d , которые обычно невозможно найти для различных материалов и конструкций в справочной литературе. Пусть имеется рабочий интервал частот $[\omega_b, \omega_e] = [2\pi f_b, 2\pi f_e]$, и на частотах $\omega_b = 2\pi f_b$ и $\omega_e = 2\pi f_e$ измерены добротности $Q_b = 1/(2\xi_b)$ и $Q_e = 1/(2\xi_e)$. Тогда из (4.66) можно записать две формулы

$$\frac{\alpha_d + \beta_d \omega_b^2}{\omega_b} = \frac{1}{Q_b}, \quad \frac{\alpha_d + \beta_d \omega_e^2}{\omega_e} = \frac{1}{Q_e}. \quad (4.69)$$

Эти формулы можно рассматривать как систему уравнений для определения коэффициентов α_d и β_d , и из (4.69) можно получить

$$\alpha_d = \frac{\omega_e \omega_e (\omega_e Q_e - \omega_b Q_b)}{(\omega_e^2 - \omega_b^2) Q_b Q_e} = \frac{2\pi f_b f_e (f_e Q_e - f_b Q_b)}{(f_e^2 - f_b^2) Q_b Q_e}, \quad (4.70)$$

$$\beta_d = \frac{\omega_e Q_b - \omega_b Q_e}{(\omega_e^2 - \omega_b^2) Q_b Q_e} = \frac{f_e Q_b - f_b Q_e}{2\pi (f_e^2 - f_b^2) Q_b Q_e}. \quad (4.71)$$

Формулы (4.70), (4.71) упрощаются, если считать добротность одинаковой на частотах $\omega_b = 2\pi f_b$ и $\omega_e = 2\pi f_e$. Именно, при $Q_b = Q_e = Q$ из (4.70), (4.71) имеем

$$\alpha_d = \frac{2\pi f_b f_e}{(f_b + f_e)Q}, \quad \beta_d = \frac{1}{2\pi(f_b + f_e)Q}. \quad (4.72)$$

Эти формулы можно найти во многих книгах по МКЭ, и они могут рассматриваться как формулы для задания коэффициентов демпфирования по заданной добротности Q на рабочем интервале частот.

Рассмотрим теперь применение метода разложения по модам для решения нестационарных задач МКЭ

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_*, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_*, \quad (4.74)$$

с той же матрицей демпфирования $\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K}$.

Будем искать решение задачи (4.73), (4.74) в виде ряда по собственным модам в виде

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{l=1}^n z_l(t) \mathbf{W}_l. \quad (4.75)$$

Как и для задач об установившихся колебаниях, подставим (4.75) в (4.73), умножим полученное равенство скалярно на \mathbf{W}_m^* и используем соотношения ортогональности (4.58), (4.59). В результате получим (при замене индекса m на l)

$$\ddot{z}_l + (\alpha_d + \beta_d \omega_l^2) \dot{z}_l + \omega_l^2 z_l = P_l, \quad (4.76)$$

где

$$P_l(t) = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{F}(t). \quad (4.77)$$

Вводя модовый коэффициент затухания ξ_l по (4.66), уравнение (4.76) можно переписать в виде

$$\ddot{z}_l + 2\xi_l \omega_l \dot{z}_l + \omega_l^2 z_l = P_l. \quad (4.78)$$

Итак, система дифференциальных уравнений (4.73) разделилась на независимые дифференциальные уравнения (4.76) или (4.78) для функциональных коэффициентов $z_l(t)$ отдельных мод. Остается разделить начальные условия (4.74). Для этого подставим (4.75) в (4.74) и умножим полученные равенства скалярно на $\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{M}$. С использованием соотношений ортогональности (4.58) получим

$$z_l(0) = z_{l0}, \quad \dot{z}_l(0) = \dot{z}_{l0}, \quad (4.79)$$

где

$$z_{l0} = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_*, \quad \dot{z}_{l0} = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_*. \quad (4.80)$$

Векторная задача Коши (4.73), (4.74) в результате полностью разделилась на n ($l = 1, 2, \dots, n$) скалярных задач Коши (4.78), (4.80). Решения этих задач при малых коэффициентах затухания $\xi_l < 1$ можно записать в следующей аналитической форме

$$z_l = z_{lP} + z_{lh}, \quad z_{lP} = \frac{1}{\bar{\omega}_l} \int_0^t P_l(\tau) e^{-\xi_l \omega_l (t-\tau)} \sin[\bar{\omega}_l (t-\tau)] d\tau, \quad (4.81)$$

$$z_{lh} = A_{l0} e^{-\xi_l \omega_l t} \sin(\bar{\omega}_l t + \delta_{l0}), \quad \bar{\omega}_l = \omega_l \sqrt{1 - \xi_l^2}, \quad (4.82)$$

$$A_{l0} = \sqrt{z_{l0}^2 + \frac{(\dot{z}_{l0} + \xi_l \omega_l z_{l0})^2}{\bar{\omega}_l^2}}, \quad \delta_{l0} = \arctg \frac{z_{l0} \bar{\omega}_l}{\dot{z}_{l0} + \xi_l \omega_l z_{l0}}. \quad (4.83)$$

Из (4.81)–(4.83) видно, что амплитудные функции z_l убывают с ростом ω_l . Например, при нулевых начальных условиях $z_{l0} = \dot{z}_{l0} = 0$ и при постоянной вынуждающей силе $P_l(t) = P_{l*} = \text{const}$

$$z_p = z_{lP} = \frac{P_{l*} e^{-\xi_l \omega_l t}}{\bar{\omega}_l \omega_l^2} [\bar{\omega}_l (1 - \cos(\bar{\omega}_l t)) - \xi_l \omega_l \sin(\bar{\omega}_l t)]. \quad (4.84)$$

Таким образом, эта составляющая с ростом номера l убывает по крайней мере как $1/\omega_l^2$ (т.е., как и в задаче об установившихся колебаниях). Поэтому и для нестационарных задач в сумме (4.75) по собственным формам колебаний можно ограничиться числом членов $n_* \ll n$.

В итоге метод разложения по модам для решения нестационарных задач будет состоять в выполнении трех этапов.

Шаг 1. Решаем частичную обобщенную задачу на собственные значения $\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}$ и находим собственные векторы $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^{n_*}$ и собственные частоты $\{\omega_l\}_{l=1}^{n_*}$.

Шаг 2. Вычисляем P_l по (4.77) и z_l по (4.81), $l = 1, 2, \dots, n_*$.

Шаг 3. Получаем решение $\mathbf{U}(t)$ по (4.77), где n заменяем на n_* .

Для нестационарных задач этот метод сохраняет те же преимущества, что и для задач об установившихся колебаниях. Единственное, но существенное усложнение связано с необходимостью интегрирования в (4.81). При практической реализации метода такое интегрирование приходится выполнять численно. Может быть поэтому, например, в пакете ANSYS

в методе разложения по модам для нестационарных задачах применяются прямые шаговые схемы интегрирования уравнений (4.78), а формулы (4.81)–(4.83) не используются.

К сожалению, метод разложения по модам имеет ряд ограничений. Так, его нельзя применять для решения нелинейных динамических задач. В случаях линейных нестационарных задач и задач об установившихся колебаниях на применимость метода на практике обычно накладывається ограничение, связанное с однородностью главных граничных условий, т.е. требуется, чтобы $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, и следовательно, $\mathbf{u}_h = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_{uh}$. Причина такого ограничения состоит в выбираемом способе учета главных граничных условий (см. п. 1.8). Действительно, пусть принимается способ учета главных граничных условий, при котором размерность матриц МКЭ сохраняется, т.е. для степеней свободы \mathbf{U}_s , задаваемых по главным граничным условиям, в матрицах МКЭ остаются (но изменяются!) соответствующие строки и столбцы. Тогда очевидно, что система собственных векторов $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^n$ задачи с $\mathbf{u}_h = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_{uh}$ не может являться базисом для задачи с $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{\Gamma_h} \neq 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_{uh}$. При таких реализациях МКЭ метод разложения по модам будет применим только для задач с однородными главными граничными условиями. Например, это ограничение для метода разложения по модам имеется в конечно-элементном пакете ANSYS.

4.5. Применение МКЭ в расчетах на сейсмические воздействия

Специальная область науки – теория сейсмостойкости сооружений – нацелена на решение жизненно важных для многочисленных сейсмических районов проблем, связанных с разработкой сейсмостойких сооружений. В теории сейсмостойкости можно выделить ряд взаимосвязанных направлений исследований: анализ сейсмических воздействий; создание адекватных моделей сооружений, развитие методик расчета зданий и сооружений на сейсмические воздействия, и наконец, формулировка нормативных документов [52], регламентирующих инженерные расчеты при проектировании и строительстве в сейсмических районах.

В данном настоящем разделе дается вывод основных формул расчета по методу конечных элементов сейсмостойкости сооружений. Особенностью этих расчетов является использование относительных и переносных систем

координат, связанных с движением фундаментов и сооружений.

Пусть \mathbf{U} – вектор механических степеней свободы узлов конструкции в абсолютной системе координат. Предположим, что перемещение сооружения при его переносном движении, вызванном сейсмическим воздействием, является поступательным и описывается функцией $u_b(t)\mathbf{d}$, где \mathbf{d} – вектор, определяющий направление движения. Поскольку абсолютное движение \mathbf{U} складывается из относительного \mathbf{U}_r и переносного, то можно записать формулу

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_r + u_b \mathbf{D}_b, \quad (4.85)$$

где \mathbf{D}_b – вектор, компоненты которого для любого отдельного узла равны последовательно компонентам вектора \mathbf{d} .

С учетом (4.85) запишем уравнение движения МКЭ для вектора \mathbf{U}_r относительных перемещений узлов

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_r = -\ddot{u}_b \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_b. \quad (4.86)$$

Здесь \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} – матрицы масс, демпфирования и жесткости сооружения. При этом для здания, закрепленного в основании, эти матрицы являются симметричными и положительно определенными: $\mathbf{M} > 0$; $\mathbf{C} > 0$, если $\mathbf{C} \neq 0$; $\mathbf{K} > 0$.

К системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.86) следует присовокупить начальные условия. Считая, что в начальный момент времени сейсмические воздействия отсутствовали, примем начальные условия нулевыми:

$$\mathbf{U}_r(0) = 0; \quad \dot{\mathbf{U}}_r(0) = 0. \quad (4.87)$$

Как видно из (4.86), (4.87), расчет зданий на сейсмостойкость характеризуется специфическим видом правых частей в уравнениях движения МКЭ.

Исторически сложилось так, что для интегрирования задачи Коши в расчетах на сейсмостойкость использовался метод разложения по собственным формам колебаний, описанный в п. 4.4. Таким образом, вектор перемещений \mathbf{U}_r можно искать в форме разложения по собственным модам

$$\mathbf{U}_r = \sum_{l=1}^n z_l(t) \mathbf{W}_l, \quad (4.88)$$

где для коэффициентных функций $z_l(t)$ имеем дифференциальные уравнения

$$\ddot{z}_l + 2\xi_l \omega_l \dot{z}_l + \omega_l^2 z_l = P_l, \quad (4.89)$$

причем по (4.77) правые части $P_l(t) = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{F}(t)$ при $\mathbf{F}(t) = -\ddot{u}_b \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_b$ можно представить в виде

$$P_l(t) = -\gamma_l \ddot{u}_b(t), \quad \gamma_l = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_b. \quad (4.90)$$

С учетом (4.90) из (4.81)–(4.83) при следующих из (4.87) нулевых начальных условиях $z_l(0) = z_{l0} = 0$, $\dot{z}_l(0) = \dot{z}_{l0} = 0$, имеем

$$z_l(t) = \frac{\gamma_l}{\omega_l^2} S_w(t, \xi_l, \omega_l), \quad (4.91)$$

$$S_w(t, \xi_l, \omega_l) = -\frac{\omega_l^2}{\bar{\omega}_l} \int_0^t \ddot{u}_b(\tau) e^{-\xi_l \omega_l (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_l (t-\tau) d\tau, \quad (4.92)$$

где, как и в (4.82),

$$\bar{\omega}_l = \omega_l \sqrt{1 - \xi_l^2}.$$

В принципе по формулам (4.85), (4.88), (4.90)–(4.92) после решения задачи на собственные значения и определения собственных векторов \mathbf{W}_l и собственных частот ω_l при известной функции ускорения основания $\ddot{u}_b(t)$ можно определить перемещения конструкции, а затем по принятым конечно-элементным аппроксимациям найти деформации, напряжения и усилия в отдельных элементах конструкции. При этом, как и обычно для метода разложения по модам, в этих формулах можно ограничиться числом собственных мод $n_* \ll n$.

Основной входной информацией для такого метода расчета является функция ускорения основания $\ddot{u}_b(t)$. Запись ускорения основания \ddot{u}_b , полученная на специальных сейсмических приборах, называется *акселерограммой*. Отметим, что на практике для расчетов используются как реальные, так и синтезированные акселерограммы, полученные после соответствующей обработки записей сильных землетрясений. Пример фрагмента акселерограммы сейсмографа при оцифровке записи Спитакского землетрясения (Армения, 1987 г.) с шагом $\Delta t = 0.05$ с по данным [2] приведен на рис. 4.1.

Расчет с использованием реальных или синтезированных функций \ddot{u}_b называется *расчетом на воздействие акселерограмм*. Для его численной реализации при методе разложения по модам по (4.85), (4.88), (4.90)–(4.92) нужно иметь процедуры, вычисляющие с требуемой точностью интегралы (4.92) для сильно изменяющихся (см. рис. 4.1) функций \ddot{u}_b .

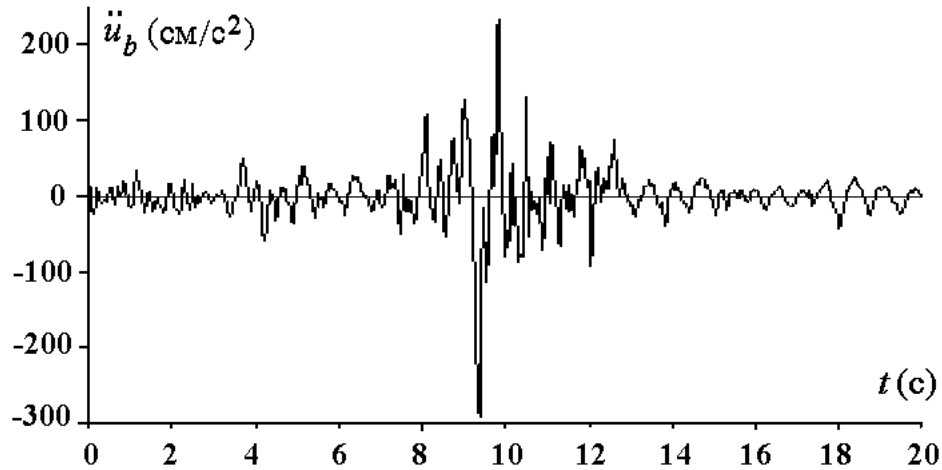


Рис. 4.1.

Заметим, что расчеты на воздействие акселерограмм можно проводить и без применения разложения по модам, используя непосредственно для решения дифференциальных уравнений (4.89) с нулевыми начальными условиями шаговые по времени схемы интегрирования, такие, как например, рассматриваемый в дальнейшем метод Ньюмарка.

Расчеты с использованием акселерограмм, как при применении метода разложения по модам, так и при прямом интегрировании по времени уравнений движения МКЭ, являются достаточно трудоемкими. Кроме того, акселерограммы возможных землетрясений для проектируемых сооружений не могут быть известными заранее, что несколько снижает ценность расчетов по акселерограммам. В силу этих причин широкое распространение получили методы, использующие так называемые *спектральные кривые*. Эти кривые описывают максимальные ускорения, скорости или перемещения как функции периода колебаний $T = 1/f = 2\pi/\omega$ или частоты $f = \omega/2\pi$ и коэффициентов демпфирования. Именно, определим, *спектр ускорений* $C_w(T, \xi)$ как максимум по времени функции $|S_w|$ из (4.92)

$$C_w(T, \xi) = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\omega^2}{\bar{\omega}} \int_0^t \ddot{u}_b(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \bar{\omega}(t-\tau) d\tau \right|, \quad (4.93)$$

где

$$T = 1/f = 2\pi/\omega, \quad \bar{\omega} = \omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (4.94)$$

Аналогично можно определить и спектры скоростей и перемещений, которые при других подходах могут рассматриваться как альтернативные сейсмические воздействия.

Используя спектр ускорений $C_w(T, \xi)$, легко найти максимальное по времени значение амплитуды моды колебаний $z_l(t)$ с номером l :

$$\max_t |z_l| = \frac{\gamma_l}{\omega_l^2} C_w(T_l, \xi_l), \quad T_l = 1/f_l = 2\pi/\omega_l. \quad (4.95)$$

Однако максимальные значения z_l для разных номеров l достигаются в различные времена, а поэтому для нахождения "максимальных" реакций конструкции на сейсмические воздействия требуются еще некоторые процедуры синтеза глобального "максимума" из максимальных значений, вызванных сейсмическими силами \mathbf{S}_l при отдельных модах колебаний.

Для нахождения сейсмических сил \mathbf{S}_l преобразуем формулу (4.85) для смещений \mathbf{U} в абсолютной системе координат с учетом представления (4.88):

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{W}_j + u_b \mathbf{D}_b. \quad (4.96)$$

Разложим вектор \mathbf{D}_b по системе векторов \mathbf{W}_l : $\mathbf{D}_b = \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{W}_l$. Используя соотношение ортогональности (4.58) и (4.90), находим, что $d_l = \gamma_l$, и, следовательно, формуле (4.96) можно придать следующий вид:

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^n (z_l + \gamma_l u_b) \mathbf{W}_l. \quad (4.97)$$

Дифференцируя (4.97) дважды по времени, с учетом (4.90) имеем:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \sum_{l=1}^n (\ddot{z}_l - P_l) \mathbf{W}_l. \quad (4.98)$$

Преобразуем теперь (4.98) с использованием следующего из (4.89) при малых коэффициентах демпфирования $\xi_l \ll 1$ приближенного равенства ($\ddot{z}_l - P_l \approx -\omega_l^2 z_l$):

$$\ddot{\mathbf{U}} \approx - \sum_{l=1}^n \omega_l^2 z_l \mathbf{W}_l. \quad (4.99)$$

Сейсмические силы \mathbf{S} , действующие на конструкцию, определим по формуле:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}. \quad (4.100)$$

С учетом (4.99) введем сейсмические силы \mathbf{S}_l , соответствующие l -ой форме собственных колебаний:

$$\mathbf{S} = \sum_{l=1}^n \mathbf{S}_l; \quad \mathbf{S}_l = \omega_l^2 z_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_l. \quad (4.101)$$

Экстремальные значения компонент S_{lk} отдельной сейсмической силы \mathbf{S}_l для степени свободы с номером k можно выразить с использованием (4.95) через спектр ускорений

$$\tilde{S}_{lk} = \max_{t \in [0, T_l]} |S_{lk}| = C_w(T_l, \xi_l) \sum_{m=1}^n M_{km} \eta_{lm}; \quad \eta_{lm} = \gamma_l W_{lm}, \quad (4.102)$$

причем в этих формулах суммирование по индексу l отсутствует.

Дальнейший расчет производится следующим образом. Спектры ускорений задаются по специальным правилам с использованием различных нормативных множителей, учитывающих зоны сейсмичности, возможные сейсмические интенсивности, назначение сооружений, допускаемые повреждения, коэффициенты динамичности и т.п. При этом иногда и коэффициенты γ_l или η_{lm} задаются по приближенным формулам. Далее, из решения задачи статического равновесия конструкции под действием силовых факторов \tilde{S}_{lk} находятся перемещения, напряжения, внутренние усилия N_{lk} и пр. Синтез этих результатов по различным модам колебаний осуществляется также по специальным формулам. Имеется несколько таких формул, из которых наиболее простым и наиболее распространенным является правило квадратного корня из суммы квадратов (SRSS – Square Root of the Sum of the Squares):

$$N_k = \sqrt{\sum_{l=1}^{n_*} N_{lk}^2}. \quad (4.103)$$

где n_* – число учитываемых собственных форм. Заметим, что, как обычно для метода разложений по модам, на практике можно взять число мод колебаний $n_* \ll n$.

Описанный выше метод, основанный на сейсмической спектральной теории, нашел отражение в строительных нормах СНиП II-7-81 и их модификациях [52], причем в их разных редакциях вводились и различные изменения в формулах для расчетных коэффициентов. Отметим, что используемые здесь правила достаточно эвристичны, но учитывают многолетний опыт практики сейсмического строительства и эксплуатации сооружений. Они периодически обновляются [52], и, по-видимому, будут постепенно заменяться на нормативы более точных конечно-элементных динамических расчетов пространственных конструкций.

Для более углубленного знакомства с техникой расчетов сейсмичности сооружений можно рекомендовать специальную литературу [2, 22], норма-

тивы, принятые в различных странах [52], и фирменные описания теории и методологии спектральных расчетов для конкретных конечно-элементных комплексов [62, 67].

4.6. МКЭ в нестационарных задачах теплопроводности

Рассмотрим в области Ω начально-краевую задачу теплопроводности для прироста температуры $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, сформулированную в п. 1.1. В классическую постановку задачи входят:

– полевые уравнения

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla^* \cdot \mathbf{q} = W; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.104)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (4.105)$$

– граничные условия на участках $\Gamma_\theta, \Gamma_q, \Gamma_c$ границы $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$

$$\theta = \theta_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta, \quad (4.106)$$

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -q_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (4.107)$$

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -h_f(\theta_b - \theta); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (4.108)$$

– начальные условия

$$\theta = \theta_*(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad t = +0. \quad (4.109)$$

Здесь сохранены все обозначения п. 1.1, но теперь внешние воздействия могут зависеть от времени t , т.е. $W = W(\mathbf{x}, t)$, $\theta_\Gamma = \theta_\Gamma(\mathbf{x}, t)$, и т.д.

Применяя фактически ту же технику, что и для динамических задач теории упругости и используя соответствующие преобразования из главы 1 для стационарных задач теплопроводности, приходим к слабой постановке нестационарных задач (4.104)–(4.109).

Предварительно, как обычно, подберем функцию $\theta_s(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющую главному граничному условию (4.106), и будем искать решение в виде

$$\theta = \theta_0 + \theta_s, \quad (4.110)$$

где

$$\theta_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta, \quad (4.111)$$

$$\theta_s = \theta_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta. \quad (4.112)$$

Введем функциональное пространство $V(\Omega)$ скалярных функций η , удовлетворяющих однородному граничному условию (4.111) и принадлежащих пространству $W_2^1(\Omega)$. (Норма в V была определена в п. 1.2 в (1.27).) Обозначим также через Q пространство $Q = L_2(0, T; V)$ аналогично п. 4.2. Теперь можно дать следующее определение.

Определение. *Обобщенным или слабым решением начально-краевой задачи теплопроводности (4.104)–(4.109) назовем функцию прироста температуры $\theta(\mathbf{x}, t)$ вида (4.110), где $\theta_0(\mathbf{x}, t) \in Q$ удовлетворяет при $\forall t \in [0, T]$ интегральному соотношению*

$$c(\eta, \dot{\theta}_0) + a(\eta, \theta_0) = L(\eta) \quad (4.113)$$

для $\forall \eta(\mathbf{x}) \in V$ и начальным условиям, следующим из (4.109), (4.110). При этом функция $\theta_s(\mathbf{x}, t)$ должна удовлетворять неоднородным главным граничным условиям (4.112).

Здесь в (4.113) использованы следующие обозначения

$$c(\eta, \theta_0) = \int_{\Omega} \rho c \eta \theta_0 d\Omega, \quad (4.114)$$

$$a(\eta, \theta_0) = \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta_0 d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta_0 d\Gamma, \quad (4.115)$$

$$L(\eta) = \tilde{L}(\eta) - a(\eta, \theta_s) - c(\eta, \dot{\theta}_s), \quad (4.116)$$

$$\tilde{L}(\eta) = \int_{\Omega} \eta W d\Omega + \int_{\Gamma_q} \eta q_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b d\Gamma. \quad (4.117)$$

Заметим, что форма $c(\eta, \theta_0)$ симметрична и положительно определена в $L_2(\Omega)$, а свойства формы $a(\eta, \theta_0)$ были подробно описаны в п. 1.2.

Для получения системы МКЭ введем сетку конечных элементов $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$, $\Omega_h \approx \Omega$ и рассмотрим слабую постановку (4.114)–(4.117) на Ω_h с границей $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ и со снесенными на Γ_h граничными условиями, и примем полудискретные конечно-элементные аппроксимации

$$\theta_{0h} = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(t), \quad \theta_{sh} = \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s(t), \quad (4.118)$$

$$\theta_h = \tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_s(t), \quad (4.119)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_s^*(\mathbf{x})], \quad \tilde{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}, \mathbf{T}_s\}, \quad (4.120)$$

$$\eta = \delta \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}). \quad (4.121)$$

Подстановка (4.118)–(4.121) в интегральное соотношение (4.113), записанное для Ω_h с границей $\Gamma_h = \Gamma_{h\theta} \cup \Gamma_{hq} \cup \Gamma_{hc}$, с учетом произвольности вектора $\delta \mathbf{T}^*$ дает

$$\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (4.122)$$

где

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega_h} \rho c \mathbf{N} \mathbf{N}^* d\Omega, \quad (4.123)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{sf} + \mathbf{F}_d, \quad (4.124)$$

$$\mathbf{F}_d = -\mathbf{K}_{0s} \cdot \mathbf{T}_s - \mathbf{C}_{0s} \cdot \dot{\mathbf{T}}_s, \quad (4.125)$$

$$\mathbf{C}_{0s} = \int_{\Omega_h} \rho c \mathbf{N} \mathbf{N}_s^* d\Omega, \quad (4.126)$$

а \mathbf{K} , \mathbf{F}_b , \mathbf{F}_{sf} и \mathbf{K}_{0s} совпадают с определенными в (1.119), (1.121), (1.123) в п. 1.6 для стационарных задач теплопроводности.

Матрица \mathbf{C} в (4.123) называется *матрицей теплоемкости*, поскольку c – удельная теплоемкость, $\int_{\Omega_h} \rho c d\Omega$ – теплоемкость тела Ω_h (см. также задачу 4.10). Заметим, что эта матрица симметрична и положительно определена в силу аналогичных свойств билинейной формы $s(\eta, \theta_0)$.

Добавляя к (4.122) следующие из (4.109) начальные условия

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_* \quad (4.127)$$

с вектором \mathbf{T}_* начальных температур в узлах тела, получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени.

Для решения конечно-элементной задачи (4.122), (4.127), как и для задач теории упругости, можно использовать *метод разложения по собственным векторам* соответствующей задачи на собственные значения.

Именно, положив в (4.122) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{T} = \mathbf{W}e^{-\lambda t}$, получаем обобщенную задачу на собственные значения

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}. \quad (4.128)$$

В этой задаче \mathbf{C} – симметричная положительно определенная матрица, \mathbf{K} – симметричная и, ко крайней мере, неотрицательно определенная матрица, т.е. задача (4.128) по свойствам входящих в нее матриц идентична задаче (4.49), рассмотренной в п. 4.3.

Из полученных в п. 4.3 результатов можно заключить, что задача (4.128) имеет n вещественных собственных значений λ_l , $l = 1, 2, \dots, n$ ($0 \leq \lambda_1 \leq$

$\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l \leq \dots \leq \lambda_n$, n – порядок матриц \mathbf{C} и \mathbf{K}), а собственные векторы \mathbf{W}_l могут быть выбраны ортонормированными по матрице теплоемкости \mathbf{C} и ортогональными по матрице теплопроводности \mathbf{K}

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_l = \delta_{ml}, \quad \mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_l = \lambda_l \delta_{ml}. \quad (4.129)$$

Тогда можно разыскивать решение задачи (4.122), (4.127) в виде

$$\mathbf{T}(t) = \sum_{l=1}^n z_l(t) \mathbf{W}_l. \quad (4.130)$$

Подставляя (4.130) в (4.122), (4.127), умножая справа скалярно (4.122) на \mathbf{W}_m^* , а (4.127) – на $\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{C}$, и используя соотношения ортогональности (4.129), получаем (при замене индекса m на l) отдельные задачи для функций коэффициентов $z_l(t)$

$$\dot{z}_l + \lambda_l z_l = P_l, \quad (4.131)$$

$$z_l(0) = z_{l0} = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_*, \quad (4.132)$$

где

$$P_l(t) = \mathbf{W}_l^* \cdot \mathbf{F}(t). \quad (4.133)$$

Решение задачи (4.131), (4.132) можно записать в аналитическом виде

$$z_l = \int_0^t P_l(\tau) e^{-\lambda_l(t-\tau)} d\tau + z_{l0} e^{-\lambda_l t}. \quad (4.134)$$

Из (4.134) видно, что, например, при $P_l(t) = P_{l*} = \text{const}$ частное решение убывает с ростом l как λ_l^{-1} . Как и в задачах динамики упругих тел, это позволяет в разложении по собственным векторам брать не n собственных векторов, а меньшее их число $n_* \ll n$.

Итак, метод разложения по собственным векторам для решения нестационарных задач теплопроводности можно сформулировать в виде трех последовательных этапов.

Шаг 1. Решаем частичную обобщенную задачу на собственные значения $\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}$ и находим собственные векторы $\{\mathbf{W}_l\}_{l=1}^{n_*}$ и собственные значения $\{\lambda_l\}_{l=1}^{n_*}$.

Шаг 2. Вычисляем P_l по (4.133) и z_l по (4.134), $l = 1, 2, \dots, n_*$.

Шаг 3. Получаем решение $\mathbf{T}(t)$ по (4.130), где n заменяем на n_* .

Данный метод для нестационарных задач теплопроводности имеет те же преимущества и недостатки, что и для задач теории упругости. Отметим,

что в задачах теплопроводности установившиеся колебания отсутствуют, и собственные вектор-функции $\mathbf{T}_l = \mathbf{W}_l e^{-\lambda l}$ имеют экспоненциальные множители затухания по времени. В связи с этим и название метода здесь изменяется.

Таким образом, метод разложения по собственным векторам является эффективным методом решения нестационарных задач теплопроводности, но ряд ограничений на его применимость требуют реализаций и других способов интегрирования по времени задачи Коши (4.122), (4.127).

В заключение отметим, что все основные технологии МКЭ могут быть применены как для стационарных, так и для нестационарных задач.

Именно, можно рассматривать сужение аппроксимаций МКЭ (4.34)–(4.37), (4.118)–(4.121) на отдельные конечные элементы Ω^{em} , использовать технику изопараметрических конечных элементов с базисными функциями $\mathbf{N}_\theta^{em}(\boldsymbol{\xi})$ ($\mathbf{N}_u^{em}(\boldsymbol{\xi})$) и с параметрическими отображениями $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_x^{em}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}$, связывающими области $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$ с каноническими фигурами Ω_ξ^{em} , формировать элементные матрицы и векторы с использованием процедур численного интегрирования, и наконец, собирать глобальные матрицы и векторы ансамблированием соответствующих элементных объектов \mathbf{C}^{em} , \mathbf{K}^{em} и т.п.

Задачи к главе 4

4.1. Выведите уравнения движения (4.4) из (4.1)–(4.3).

4.2. Покажите, что для изотропной однородной среды, когда тензор упругих модулей выражается через коэффициенты Ламе λ и μ по (3.17), из системы уравнений движения (4.4) действительно можно получить уравнения (4.6).

4.3. Получите из (4.1)–(4.3), 4.8)–(4.10) классическую постановку нестационарных задач линейной теории упругости в векторно-матричной формулировке аналогично представленной в п. 3.2 для статических задач.

4.4. Докажите, что при обычных для упругого тела условиях на плотность $\rho \geq \rho_0 > 0$, матрица масс \mathbf{M} , введенная в (4.39), положительно определена.

4.5. Покажите, что для сеток из стандартных конечных элементов главы 2 сумма всех элементов матрицы масс $\sum_{i,j} M_{ij}$ равна полной массе тела, умноженной на пространственную размерность задачи (при отсутствии главных граничных условий, и если все элементы одномерные, двумерные или трехмерные).

4.6. Покажите, что максимальное значение модуля коэффициента z_l из (4.67) для метода разложения по модам в задаче об установившихся колебаниях достигается при частоте $\omega = \omega_l \sqrt{1 - 2\xi_l^2}$. Таким образом, при наличии затухания $\max |z_l|$ имеет место не при собственной частоте системы ω_l , а при несколько меньшем значении частоты.

4.7. Получите для метода разложения по модам решение задачи Коши (4.78), (4.79) для амплитудной функции z_l при больших коэффициентах затухания $\xi_l > 1$ в веще-

ственной форме. Проанализируйте для этого случая поведение z_l с ростом частоты ω_l .

4.8. Получите для метода разложения по модам решение задачи Коши (4.78), (4.79) для амплитудной функции z_l при особом значении коэффициента затухания $\xi_l = 1$. Проанализируйте поведение z_l с ростом частоты ω_l при $\xi_l = 1$, $l = 1, 2, \dots, n$.

4.9. Получите из (4.104)–(4.109) интегральное соотношение (4.113) с (4.110)–(4.112), (4.114)–(4.117).

4.10. Покажите, что для сеток из стандартных конечных элементов главы 2 сумма всех элементов матрицы теплоемкостей $\sum_{i,j} C_{ij}$ при отсутствии главных граничных условий равна полной теплоемкости тела $C = \int_{\Omega_h} \rho c d\Omega$.

4.11. Докажите, что при обычных условиях на плотность $\rho \geq \rho_0 > 0$ и удельную теплоемкость $c \geq c_0 > 0$, матрица теплоемкостей \mathbf{C} , введенная в (4.123), положительно определена.

4.12. Для одномерного линейного лагранжева конечного элемента длины h_m в случае постоянной площади поперечного сечения A , плотности ρ и удельной теплоемкости c найдите коэффициенты элементной матрицы теплопроводности

$$C_{pq}^{em} = \frac{h_m}{2} \int_{-1}^1 \rho c A N_p(\xi) N_q(\xi) d\xi, \quad p, q = 1, 2.$$

Глава 5

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕШАТЕЛИ МКЭ

5.1. Основные блоки программ МКЭ

В данном разделе рассматриваются основные блоки программных реализаций МКЭ.

5.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

В данном разделе рассматриваются некоторые из прямых решателей систем линейных алгебраических уравнений, используемые в МКЭ.

Преимущество прямых методов решения состоит в том, что они позволяют решать даже плохо обусловленные и отрицательно определенные системы уравнений, если округление не влияет на решение. Недостатком прямых методов является то, что они требуют выполнения огромного количества операций, что сказывается на затратах машинного времени. Например, для больших систем с ленточной матрицей требуется $O(Nb^2)$ итераций, где N – число неизвестных, b – ширина ленты. Кроме того, процесс исключения может приводить к заполнению матрицы (fill-in), то есть появлению ненулевых элементов на месте изначально нулевых элементов, что не позволяет хранить матрицу в компактной форме без хранения нулевых элементов. В прямых современных решателях вышеупомянутые недостатки устраняются с помощью применения специальных схем компактного хранения, при которых хранятся только элементы, подвергающиеся изменению в результате заполнения. Также для уменьшения заполнения при-

меняется предварительное упорядочение неизвестных и уравнений СЛАУ с помощью различных схем, таких как Cuthill McKee, minimal degree ordering и др.

В конечно-элементном комплексе ANSYS доступны два прямых решателя: разреженный прямой решатель (Sparse Direct Solver) и фронтальный решатель (Frontal Solver). Разреженный прямой решатель использует разреженность матрицы для минимизации общего числа операций. Фронтальный решатель направлен на минимизацию требуемого объема памяти.

5.2.1. Разреженный прямой решатель

В разреженном прямом решателе (Direct Sparse Solver) рассматривается LU-разложение матрицы \mathbf{K} , которое приводит к следующей системе уравнений:

$$\mathbf{LU}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

где \mathbf{L} – нижнетреугольная матрица, \mathbf{U} – верхнетреугольная матрица. Определим

$$\mathbf{w} = \mathbf{U}\mathbf{u} \quad (5.2)$$

Тогда можно сначала решить СЛАУ (5.1) для \mathbf{w} с нижнетреугольной матрицей с помощью прямого хода

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (5.3)$$

а затем найти \mathbf{u} из системы с верхнетреугольной матрицей с помощью обратного хода

$$\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad (5.4)$$

В случае симметричной матрицы \mathbf{K} можно использовать разложение

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

или в модифицированной форме

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}'\mathbf{D}\mathbf{L}'^T$$

где \mathbf{D} – диагональная матрица.

Тогда (5.1)–(5.4) будут иметь вид:

$$\mathbf{L}'\mathbf{D}\mathbf{L}'^T\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}\mathbf{L}'^T\mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'\mathbf{w} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{DL}'^T\mathbf{u} &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

5.2.2. Фронтальный решатель

Фронтальный решатель (Frontal (Wavefront) Solver) оперирует с понятием *волнового фронта*. Волновым фронтом в точке называется число активных уравнений после обработки элемента. В методе устанавливается ограничение волнового фронта, которое зависит от объема памяти, доступной для решения данной задачи. В процедуре волнового фронта для минимизации волнового фронта важно, в какой последовательности элементы обрабатываются решателем (порядок элемента).

Машинное время, требующееся для работы процедуры решателя пропорционально квадрату среднего размера волнового фронта. Поэтому нужно иметь возможность оценить и минимизировать размер волнового фронта. Номера узлов всех элементов сканируются для определения, какой элемент последним использует каждый узел. Как только из элементных матриц ансамблируется общая система уравнений, то уравнения для узла, который встречается последний раз, решаются алгебраически в смысле оставшихся неизвестных и исключаются из ансамблированной матрицы методом гауссова исключения. Активные уравнения выражаются формулой:

$$\sum_{j=1}^L K_{kj}u_j = F_k, \quad (5.5)$$

где K_{kj} — член жесткости, относящий силу в степени свободы k к перемещению в степени свободы j , u_j — узловое перемещение степени свободы j , F_k — узловая сила в степени свободы k , k — номер уравнения (строки), j — номер столбца, L — число уравнений.

Для исключения уравнения $i = k$, уравнение (5.5) сначала нормализуется к виду

$$\sum_{j=1}^L \frac{K_{ij}}{K_{ii}}u_j = \frac{F_i}{K_{ii}}, \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) может быть переписано в виде

$$\sum_{j=1}^L K_{ij}^* u_j = F_i^*, \quad (5.7)$$

где

$$K_{ij}^* = \frac{K_{ij}}{K_{ii}}, \quad F_i^* = \frac{F_i}{K_{ii}}$$

Элементы K_{ii} называются «опорными элементами» (pivot). Если абсолютное значение элемента K_{ii} мало, то число он не отличается от нуля. Обычно это означает, что система не достаточно закреплена.

Уравнение записывается в файл для дальнейшего использования в обратной подстановке. Оставшиеся уравнения изменяются следующим образом:

$$K_{kj}^* = K_{kj} - K_{ki} K_{ij}^*, \quad (5.8)$$

$$F_k^* = F_k - K_{ki} F_i^*, \quad (5.9)$$

где $k \neq j$, так что

$$\sum_{j=1}^{L-1} K_{kj}^* u_j = F_k^*, \quad (5.10)$$

где k меняется от 1 до l . После удаления строки i из уравнения процесс повторяется до тех пор, пока все остальные пригодные строки не будут удалены.

Для уменьшения максимального размера волнового фронта элементы должны быть упорядочены так, что элемент, для которого узел берется первым, расположен как можно ближе к элементу, для которого этот узел берется последним. В геометрическом смысле элементы должны быть упорядочены таким образом, чтобы волновой фронт проходил через модель непрерывно от одного конца к другому в направлении, которое имеет наибольшее количество узлов.

5.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

5.3.1. Вводные замечания

В данном разделе описываются некоторые итерационные решатели систем линейных алгебраических уравнений, используемые в МКЭ. В итерационных методах (iterative methods) рассматривается процесс последовательного приближения к решению, начиная с начального приближения, которое на каждой итерации «улучшается».

Итерационные решатели всегда предпочтительны для больших систем уравнений, так как для них требуется меньший объем памяти и меньшее общее количество операций, чем для прямых решателей. Однако, итерационные методы эффективны по большей части для решения таких СЛАУ, для которых могут быть легко построены предобуславливатели. Предобуславливатели должны строиться таким образом, чтобы число итераций было наименьшим и не зависело от числа неизвестных. В оптимальном варианте можно уменьшить количество операций до порядка $O(N)$. В случае нелинейных задач итерационный решатель СЛАУ применяется внутри итерационного метода для решения нелинейной системы уравнений, например, метода Ньютона. Хотя итерационные алгоритмы позволяют уменьшить размер требуемого дискового пространства и машинного времени, а также легко распараллеливаются, все же они менее надежны, чем прямые алгоритмы решения. Например, в случае матриц, близких к вырожденным, более эффективной процедурой будет прямой решатель, тогда как итерационный решатель будет менее эффективным или не работает.

Первые итерационные методы были основаны на релаксации координат, то есть циклическом покомпонентном изменении вектора решения таким образом, чтобы обнулить соответствующий коэффициент вектора невязки и уменьшить норму этого вектора. Классическими итерационными методами строятся на расщеплении исходной матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$, где \mathbf{D} — матрица, ненулевыми элементами которой являются диагональные элементы матрицы \mathbf{A} , \mathbf{E} — матрица, ненулевыми элементами которой являются все поддиагональные элементы матрицы \mathbf{A} , \mathbf{F} — матрица, ненулевыми элементами которой являются все наддиагональные элементы матрицы \mathbf{A} . Конкретный вид итерационного процесса $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}_k + \mathbf{g}$ зависит от выбора матрицы \mathbf{G} и вектора \mathbf{g} , которые определяются составляющими расщепление матрицами \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} . Классическими итерационными методами являются:

- метод Якоби (Jacobi);
- метод Гаусса-Зейделя (Gauss-Seidel);

- метод последовательной верхней релаксации (Successive Over Relaxation, SOR);
- метод симметричной последовательной верхней релаксации (Symmetric Successive Over Relaxation, SSOR);

Подробное описание данных методов можно найти в [94]. В настоящее время классические методы редко используются сами по себе. Их сходимость не может быть гарантирована для всех матриц. Чаще всего классические итерационные методы применяются для предобуславливания исходной системы, а также комбинируются с более эффективными методами.

В большинстве современных итерационных процедур применяется проекционный процесс, то есть извлечение приближенного решения системы из некоторого подпространства, которое называется подпространством поиска. Для извлечения приближенного решения из подпространства \mathcal{K} размерности m рассматриваются m условий ортогональности, а именно, вектор невязки должен быть ортогонален m линейно независимым векторам, которыми определяется базис другого подпространства - подпространства ограничений \mathcal{L} (условие Петрова-Галеркина). Среди итерационных методов с проекционным процессом, то есть так называемых *проекционных* методов, различают ортогональные (подпространства \mathcal{K} и \mathcal{L} одинаковы) и наклонные (подпространства \mathcal{K} и \mathcal{L} различны). При этом все классические итерационные методы могут быть сформулированы как проекционные.

Простейшими проекционными методами для случаев одномерных подпространств \mathcal{K} и \mathcal{L} являются

- метод наискорейшего спуска (Steepest Descent Method, SD) — для симметричной положительно определенной матрицы \mathbf{A} , $\mathcal{L} = \mathcal{K}$;
- метод минимальной остаточной итерации (Minimal Residual Iteration, MR) — для положительно определенной матрицы \mathbf{A} , $\mathcal{L} = \mathbf{A}\mathcal{K}$;
- метод наискорейшего уменьшения невязки (Residual Norm Steepest Descent, RNSD) — для невырожденной матрицы \mathbf{A} , $\mathcal{L} = \mathbf{A}\mathcal{K}$;

Описание данных методов можно также найти в [?]. Как правило, проекционные методы с одномерными подпространствами \mathcal{K} и \mathcal{L} обладают медленной сходимостью и пригодны для СЛАУ небольшой размерности.

Более эффективны проекционные методы, в которых подпространства \mathcal{K} и \mathcal{L} являются подпространствами Крылова. Подпространством Крылова размерности m , порожденным матрицей \mathbf{A} и вектором \mathbf{v} , называется

линейная оболочка векторов

$$K_m(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\}$$

В общем виде итерационные методы подпространств Крылова аппроксимируют точное решение СЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с помощью $p(\mathbf{A})\mathbf{b}$, где p — некоторый полином. Для построения базисов подпространств \mathcal{K} и \mathcal{L} применяется либо процесс ортогонализации Арнольди, либо процесс биортогонализации Ланцоша. Методы, основанные на ортогонализации Арнольди, являются ортогональными. Примеры таких методов:

- метод полной ортогонализации, или метод Арнольди (Full Orthogonalization Method, FOM), и его вариации
- обобщенный метод минимальных невязок (Generalized Minimal Residual Method, GMRES) и его вариации
- метод Ланцоша (Lanczos Method) для симметричных систем
- метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradient Method, CG) — для симметричной положительно определенной матрицы
- метод сопряженных невязок (Conjugate Residual Method) — для эрмитовой матрицы
- обобщенный метод сопряженных невязок (Generalized Conjugate Residual Method) — обобщение метода сопряженных невязок для несимметричного случая

Методы, основанные на биортогонализации Ланцоша, не являются ортогональными. Примеры таких методов:

- метод Ланцоша для несимметричных систем
- метод бисопряженных градиентов (Biconjugate Gradient Method, BCG) — для симметричной положительно определенной матрицы
- метод квази-минимальных невязок (Quasi-Minimal Residual Method, QMR)
- квадратичный метод сопряженных градиентов (Conjugate Gradient Squared Method)

- стабилизированный метод бисопряженных градиентов (Biconjugate Gradient Stabilized Method, BiCGSTAB)

Для линейных систем, получающихся в результате дискретизации по методу конечных элементов, наиболее популярным из методов подпространств Крылова является метод сопряженных градиентов. Однако, как и остальные методы подпространств Крылова, он обладает медленной сходимостью, в особенности для задач из таких областей, как динамика жидкостей и моделирование электронных устройств.

Эффективность и надежность итерационных алгоритмов можно улучшить, если использовать технику *предобусловливания*. Коротко говоря, предобусловливанием называется процесс перехода от исходной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ к эквивалентной системе, имеющей то же точное решение, что и исходная, с целью улучшения характеристик матрицы и ускорения сходимости к решению. Для предобусловливания выбирается некоторая невырожденная матрица \mathbf{M} , называемая матрицей предобусловливателя. Предобусловливатель может быть применен к исходной системе слева

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b},$$

или справа

$$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u},$$

или же и слева, и справа, если матрицу предобусловливателя можно представить в виде $\mathbf{M} = \mathbf{M}_L\mathbf{M}_R$:

$$\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{u}.$$

Матрица предобусловливателя \mathbf{M} должна быть близка к матрице \mathbf{A} , легко вычислима и легко обратима.

5.3.2. Предобусловленный метод сопряженных градиентов

В предобусловленном методе сопряженных градиентов (Preconditioned Conjugate Gradient Method, PCG), как и в обычном методе сопряженных градиентов, матрица СЛАУ предполагается симметричной и положительно определенной. Предположим, что матрица предобусловливателя \mathbf{M} также симметрична и положительно определена.

В методе сопряженных градиентов решение СЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ищется в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{p}_m,$$

где $m \leq n$, n — размер матрицы \mathbf{A} . Схема гарантированно сходится за n или менее итераций на машинах с бесконечной точностью. В реальности для сходимости требуется более n итераций, число которых можно ограничить. Если решение не сойдется после максимально заданного числа итераций, то будет выдано сообщение об ошибке. Обычно такая ситуация имеет место при неадекватном количестве граничных условий. Скорость сходимости алгоритма сопряженных градиентов пропорциональна квадратному корню числа обусловленности $\kappa(\mathbf{A})$ матрицы \mathbf{A} , $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$.

Процедура предобусловливания строится таким образом, чтобы уменьшить число обусловленности. В алгоритме сопряженных градиентов с предобусловливанием по Якоби (Jacobi Conjugate Gradient Method, JCG) в качестве предобусловливателя выступает диагональная матрица \mathbf{D} , диагональ которой содержит диагональные коэффициенты матрицы \mathbf{A} . В алгоритме сопряженных градиентов с предобусловливанием по неполному разложению Холецкого (Incomplete Cholesky conjugate Gradient Method, ICCG) в качестве предобусловливателя берется матрица $\mathbf{M} = \mathbf{LL}^T$, где \mathbf{L} — нижнетреугольная матрица. Существуют и другие процедуры предобусловливания. Опишем алгоритм предобусловленного метода сопряженных градиентов (Preconditioned Conjugate Gradient Method, PCG).

Алгоритм *PCG*

Вход: Начальное приближение \mathbf{x}_0 , точность TOL

Вычислить $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$, $\mathbf{z}_0 := \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0 := \mathbf{z}_0$

Для $j = 0, 1, \dots$ **выполнять:**

$$\alpha_j := (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j) / (\mathbf{A} \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{r}_{j+1} := \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A} \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{z}_{j+1} := \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{j+1}$$

$$\beta_j := (\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{z}_{j+1}) / (\mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j)$$

$$\mathbf{p}_{j+1} := \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j$$

$$\epsilon := \|\mathbf{r}_{j+1}\|_2$$

пока $\epsilon_j \leq TOL$

В ANSYS доступны три итерационных решателя, основанные на методе сопряженных градиентов. Во-первых, это решатель с предобусловливанием

ем по Якоби JCG (команда **EQSLV**, JCG), который подходит для хорошо обусловленных систем, которые возникают в задачах теплопереноса, акустики, магнетизма и задачах структурного анализа двумерных и трехмерных твердых тел. Решатель JCG используется для вещественных и комплексных симметричных и несимметричных матриц. Вторым решателем — это PCG (команда **EQSLV**, PCG), который эффективен и надежен для всех типов анализа, включая системы с плохо обусловленными матрицами. Этот решатель используется только для вещественных симметричных матриц жесткости. В третьем решателе ICCG (команда **EQSLV**, ICCG) используется неполное разложение Холецкого. Этот решатель является более надежным, чем JCG в случае плохо обусловленных матриц. Решатель ICCG также используется для вещественных и комплексных симметричных и несимметричных матриц.

5.4. Методы решения систем нелинейных уравнений

В большом числе практически важных задач необходимо учитывать нелинейности различной природы. Так, говорят о *физической нелинейности*, когда, например, в тепловых задачах коэффициенты теплопроводности \mathbf{k} зависят от температуры θ или для нелинейных упругих материалов модули упругости \mathbf{c} зависят от деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Значительно более сложные нелинейные определяющие уравнения возникают при учете пластичности, ползучести и т.д. При больших перемещениях или деформациях говорят о *геометрической нелинейности*, и тогда тензор деформаций может нелинейно зависеть от перемещений \mathbf{u} . В этих и во многих других случаях матрица жесткости (теплопроводности и т.п.) \mathbf{K} является функцией узловых степеней свободы \mathbf{U} , и для стационарных задач МКЭ получается разрешающая система вида

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (5.11)$$

Система (5.11) является системой нелинейных уравнений со многими неизвестными ($\mathbf{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$), и поиск ее решения эквивалентен задаче нахождения корня \mathbf{U} векторной функции $\mathbf{R}(\mathbf{U})$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0, \quad (5.12)$$

где

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F}. \quad (5.13)$$

Проблемам решения систем нелинейных уравнений посвящена обширная литература, например, можно рекомендовать классические монографии [13, 40]. Численные методы решения систем нелинейных уравнений общего вида (5.12) могут эффективно использоваться и для решения нелинейных систем МКЭ (5.11), т.е. когда функция $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ задается (5.13). Имеются, правда, и некоторые модификации общих методов, учитывающие особенности структуры функции $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ и конечно-элементных матриц. Данные вопросы подробно рассмотрены в ряде книг по МКЭ, например, в [68, 102, 104] и др.

При выборе метода решения систем нелинейных уравнений МКЭ нужно оценить вычислительные затраты при реализации различных этапов алгоритмов с учетом больших размерностей конечно-элементных матриц. Основными являются следующие вопросы:

- насколько значительна нелинейная составляющая в матрице $\mathbf{K}(\mathbf{U})$ по сравнению с линейной частью;
- каковы вычислительные затраты вычисления матрицы \mathbf{K} при различных итерациях $\mathbf{U}^{(r)}$;
- необходимо ли учитывать историю нагружения;
- возможно ли вычисление производных $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{U}$, и каковы здесь вычислительные затраты;
- единственно ли решение системы (5.12);
- имеется ли стратегия удачного выбора начального значения $\mathbf{U}^{(0)}$, близкого к неизвестному решению \mathbf{U} ;
- каковы условия сходимости, и можно ли на практике проверить выполнение этих условий;
- какова скорость сходимости и т.д.

Описываемые ниже методы решения систем нелинейных уравнений МКЭ по-разному отвечают на данные вопросы, имея свои достоинства и недостатки. Все эти методы являются итерационными, и для них можно использовать те же критерии сходимости, что для итерационных методов решения СЛАУ. Так, поскольку ищется корень уравнения (5.12), то для текущей вычисленной итерации $\mathbf{U}^{(r+1)}$ величина $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2$ является мерой невязки решения, и логично принять следующий критерий

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2 \leq \varepsilon_r \|\mathbf{F}\|_2. \quad (5.14)$$

Другой общепринятый критерий связан с оценкой сходимости через ме-

ру близости последовательных итераций

$$\|\Delta \mathbf{U}^{(r)}\|_2 \leq \varepsilon_u \|\mathbf{U}^{(r+1)}\|_2, \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{(r)} &= \mathbf{U}^{(r+1)} - \mathbf{U}^{(r)}, \\ \|\mathbf{U}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n U_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В разных программных реализациях принимались критерии (5.14) или (5.15), а иногда и оба критерия сразу.

5.4.1. Метод простых итераций и его модификации

Запишем итерационный процесс для (5.11) в виде

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^{(r)}) \cdot \mathbf{U}^{(r+1)} = \mathbf{F}, \quad (5.16)$$

т.е.

$$\mathbf{U}^{(r+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{U}^{(r)})]^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

В итоге получается метод, который носит название *метода простых итераций* или *метода Пикара*.

Алгоритм метода простых итераций

Вход: начальное приближение \mathbf{U}_0 , точность ε_r и/или ε_u

Вычислить \mathbf{F} , $\mathbf{K}(\mathbf{U}^{(0)})$

Для $r = 0, 1, \dots$ **выполнять:**

решить относительно $\mathbf{U}^{(r+1)}$ СЛАУ $\mathbf{K}(\mathbf{U}^{(r)}) \cdot \mathbf{U}^{(r+1)} = \mathbf{F}$,

вычислить $\mathbf{K}(\mathbf{U}^{(r+1)})$, $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2$, $\|\Delta \mathbf{U}^{(r)}\|_2$,

пока $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2 \leq \varepsilon_r \|\mathbf{F}\|_2$ и/или $\|\Delta \mathbf{U}^{(r)}\|_2 \leq \varepsilon_u \|\mathbf{U}^{(r+1)}\|_2$

Если в матрице жесткости \mathbf{K} выделить постоянную часть \mathbf{K}_L , соответствующую линеаризованной задаче

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_N(\mathbf{U}),$$

то можно предложить упрощенный алгоритм метода простых итераций с обращением только постоянной матрицы \mathbf{K}_L

$$\mathbf{U}^{(r+1)} = \mathbf{K}_L^{-1} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{K}_N(\mathbf{U}^{(r)}) \cdot \mathbf{U}^{(r)}).$$

Алгоритм модифицированного метода простых итераций

Вход: начальное приближение \mathbf{U}_0 , точность ε_r и/или ε_u

Вычислить \mathbf{F} , \mathbf{K}_L , $\mathbf{K}_N(\mathbf{U}^{(0)})$

Для $r = 0, 1, \dots$ выполнять:

решить относительно $\mathbf{U}^{(r+1)}$ СЛАУ $\mathbf{K}_L \cdot \mathbf{U}^{(r+1)} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_N(\mathbf{U}^{(r)}) \cdot \mathbf{U}^{(r)}$,

вычислить $\mathbf{K}_N(\mathbf{U}^{(r+1)})$, $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2$, $\|\Delta\mathbf{U}^{(r)}\|_2$,

пока $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(r+1)})\|_2 \leq \varepsilon_r \|\mathbf{F}\|_2$ и/или $\|\Delta\mathbf{U}^{(r)}\|_2 \leq \varepsilon_u \|\mathbf{U}^{(r+1)}\|_2$

5.5. Методы решения проблемы собственных значений

В данном разделе рассматриваются методы решения проблемы собственных значений, используемые в МКЭ.

5.6. Методы прямого интегрирования по времени нестационарных уравнений

В данном разделе рассматриваются методы прямого интегрирования по времени нестационарных уравнений, используемые в МКЭ.

Глава 6

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МКЭ

6.1. Метод суперэлементов

В данном разделе рассматривается метод суперэлементов.

6.2. Решатели СЛАУ для распределенных вычислений

Дискретизация реальных инженерных задач часто приводит к системам с большим количеством неизвестных (10^5 – 10^7), которые требуют больших машинных мощностей. Для сложных инженерных моделей могут быть эффективно использованы параллельные вычисления. Так как наиболее затратным по времени является этап решения линейной системы уравнений, то для эффективной реализации распределенных вычислений можно либо разрабатывать варианты распараллеливания для известных алгоритмов решения СЛАУ, либо конструировать новые алгоритмы, использующие параллелизм.

Распараллеленные прямые решатели можно применять для параллельной архитектуры с небольшим числом процессоров, поскольку они требуют частого сообщения между процессорами. Более эффективными для распараллеливания являются итерационные процедуры из-за их низких требований к хранению. Однако, в последнее время прямые решатели используются в соединении с итерационными решателями для разработки надежных предобусловливателей.

Эффективные распределенные итерационные решатели основаны на предобусловленном методе сопряженных градиентов. Примерами являются распределенный предобусловленный метод сопряженных градиентов (Distributed

PCG, DPCG) и распределенный метод сопряженных градиентов с предобуславливанием по Якоби (Distributed JCG, DJCG).

Литература

- [1] *Алямовский А.А.* SolidWorks/Cosmos Works. Инженерный анализ методом конечных элементов. М.: ДМК Пресс, 2004. 432 с.
- [2] *Амосов А.А., Сеницын С.Б.* Основы теории сейсмостойкости сооружений. М.: Изд-во АСВ, 2001. 96 с.
- [3] *Басов К.А.* ANSYS в примерах и задачах. М.: КомпьютерПресс, 2002. 224 с.
- [4] *Басов К.А.* ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
- [5] *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 446 с.
- [6] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.
- [7] *Белкин А.Е., Гаврюшин С.С.* Расчет пластин методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. 232 с.
- [8] *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
- [9] *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды. М.: Вузовская книга, 2000. 320 с.
- [10] *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
- [11] *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
- [12] *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1976. 428 с.

- [13] *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1999. 440 с.
- [14] *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 323 с.
- [15] *Дюво Г. Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980. 384 с.
- [16] *Еременко С.Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Х.: изд-во "Основа" при Харьк. ун-те, 1991. 272 с.
- [17] *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
- [18] *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
- [19] *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. 239 с.
- [20] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [21] *Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А.* ANSYS в руках инженера. М.: УРСС, 2004. 272 с.
- [22] *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
- [23] *Клованич С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: Изд-во журнала "Світ геотехніки", 2009. 400 с.
- [24] *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983. 349 с.
- [25] Компьютерная геометрия: уч. пособие для студ. вузов / *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* М.: Изд. центр "Академия", 2006. 512 с.
- [26] *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979.
- [27] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-разностные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

- [28] Метод конечных элементов в механике твердых тел. Под ред. *Сахарова А.С., Альтенбаха Н.* Киев: Вища Школа, 1982. 480 с.
- [29] *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений в частных производных. М.: Мир, 1981. 216 с.
- [30] *Молчанов И.Н., Николенко Л.Д.* Основы метода конечных элементов. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.
- [31] *Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С.* ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.
- [32] *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [33] *Морозов Е.М., Нижишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 256 с.
- [34] *Наседкин А.В.* Конечно-элементное моделирование на основе ANSYS. Программы решения статических задач сопротивления материалов с вариантами индивидуальных заданий // Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1998.
- [35] *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
- [36] *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1985. 392 с.
- [37] *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с.
- [38] *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
- [39] *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 367 с.
- [40] *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.
- [41] *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983. 384 с.

- [42] *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 410 с.
- [43] *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
- [44] *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
- [45] *Рисс Ф., Секефальди-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
- [46] *Розин Л.А.* Основы метода конечных элементов в теории упругости. Л.: Изд-во ЛПИ, 1972.
- [47] *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 128 с.
- [48] *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
- [49] *Секулович М.* Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
- [50] *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.
- [51] *Синицын А.Н.* Метод конечных элементов в динамике сооружений. М.: Стройиздат, 1978.
- [52] СП 14.13330.2011. Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. М.: ОАО «ЦПП», 2011. 83 с.
- [53] *Стренг К., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
- [54] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
- [55] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 504 с.
- [56] *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.
- [57] *Хечумов Р.А., Кенплер Х., Прокофьев В.И.* Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1999. 352 с.

- [58] *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [59] *Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.С.* ANSYS для инженеров. Справ. пособие. М.: Машиностроение, 2004. 496 с.
- [60] *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989. 288 с.
- [61] *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC.visualNastran for Windows. М.: ДМК Пресс, 2005. 704 с.
- [62] ABAQUS. Theory Manual. Ver. 6.6. ABAQUS Inc., 2006.
- [63] ADINA. Theory and Modeling Guide. Vol. 1: ADINA. ADINA R & D Inc., 2003.
- [64] ADINA. Theory and Modeling Guide. Vol. 2: ADINA-T. ADINA R & D Inc., 2003.
- [65] ANSYS Rel. 11.0. Basic Analysis Procedures Guide. SAS IP Inc. Canonsburg, 2007.
- [66] ANSYS Rel. 11.0. Elements Reference. SAS IP Inc. Canonsburg, 2007.
- [67] ANSYS Rel. 11.0. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench. SAS IP Inc. Canonsburg, 2007. 1110 с.
- [68] *Bathe K.-J.* Finite element procedure. Prentice-Hall, 1996.
- [69] *Belytschko T., Liu W.K., Moran B.* Nonlinear finite elements for continua and structures. Wiley J. & Sons, Inc., 2000.
- [70] *Braess D.* Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in elasticity theory. Cambridge University Press, 2007.
- [71] *Chen K.E.* Matrix preconditioning techniques and applications. Cambridge University Press, UK, 2005.
- [72] *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. Oxford University Press, NY, 2005.

- [73] *Fish J., Belytschko T.* A first course in finite elements. Wiley, Chichester, UK, 2007.
- [74] *Frey P.J., George P.-L.* Mesh generation. Application to finite elements. Hermes Science Publishing, Oxford, UK, 2000.
- [75] *Fried I.* Numerical integration in the finite element method // Computers & Structures. 1974. V. 4, No. 5. P. 921–932.
- [76] *Irons B.M.* Quadrature rules for brick based finite elements // Int. J. Num. Meth. Eng. 1971. V. 3, No. 2. P. 293–294.
- [77] *Irons B., Ahmad S.* Techniques of finite elements. Ellis Horwood, Chichester, UK, 1980.
- [78] *Hellen T.K.* Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements // Int. J. Num. Meth. Eng. 1972. V. 4, No. 4. P. 597–600.
- [79] *Hughes T.J.R.* The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. Dover, Mineola, NY, 2000.
- [80] *Kwon Y.W., Bang H.* The finite element method using MATLAB. CRC Press LLC, 1997.
- [81] *Liseikin V.D.* Grid generation methods. Springer, 2010.
- [82] *Liu G.R., Quek S.S.* The finite element method: A practical course. Butterworth Heinemann, 2003.
- [83] *Mackie R.I.* Object oriented methods and finite element analysis. Saxe-Coburg, Stirling, Scotland, 2001.
- [84] *Madenci E., Guven I.* The finite element method and applications in engineering using ANSYS. Springer, 2006.
- [85] *Moaveni S.* Finite element analysis. Theory and application with ANSYS. Prentic-Hall: N.Y., 1999.
- [86] *Nakasone N., Stolarski T.A., Yoshimoto S.* Engineering analysis with ANSYS software. Elsevier, 2006.
- [87] *Narasaiah G.L.* Finite element analysis. BS Publ., 2008.
- [88] *Nikishkov G.* Programming finite elements in Java™. Springer, 2010.

- [89] *Portela A., Charafi A.* Finite elements using Maple. A symbolic programming approach. Springer, 2002.
- [90] *Rao S.* The finite element method in engineering. Elsevier, 2004.
- [91] *Reddy J.N.* An introduction to nonlinear finite element analysis. Oxford University Press, UK, 2004.
- [92] *Reddy J.N.* An introduction to the finite element method. McGraw—Hill, New York, 2006.
- [93] *Reddy J.N.* Solution manual for an introduction to the finite element method. McGraw—Hill, New York, 2005.
- [94] *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. SIAM Publ., 2000.
- [95] *Szabo B., Babuska I.* Finite element analysis. Wiley J. & Sons, Inc., NY, 1991.
- [96] *Schneider P.J., Eberly D.H.* Geometric tools for computer graphics. Morgan Kaufman, San Francisco, 2003.
- [97] *Smith I.M., Griffiths D.V.* Programming the finite element method. Wiley, Chichester, UK, 1988.
- [98] *Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin W.C.* Numerical grid generation. Foundations and applications. North Holland, 1985.
- [99] *Thompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P.* Handbook of grid generation. CRC Press, 1999.
- [100] *Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schuller A.* Multigrid. Academic press, London, UK, 2001.
- [101] *Watkins D.S.* Fundamentals of matrix computations. Wiley J. & Sons, Inc., NY, 2002.
- [102] *Wriggers P.* Nonlinear finite element method. Springer, 2008.
- [103] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 1. The Basic. Butterworth Heinemann, London, 2000. 712 p.
- [104] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 2. Solid Mechanics. Butterworth Heinemann, London, 2000. 480 p.

- [105] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 3. Fluid Dynamics. 2000.