1 Субгармонические колебания

При некоторых условиях решение уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \tag{1}$$

может содержать гармоники с частотами $\omega/2$, $\omega/3$....

Слагаемые с низкими частотами называются субгармоническими колебаниями. Ограничимся случаем симметричной характеристики восстанавливающей силы вида

$$\mu f(x, \dot{x}) = \mu f(x) = \mu x^3 \tag{2}$$

Положим, что основную гармонику колебаний с частотой ω сопровождает субгармоника с частотой $\omega/3$:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3} \tag{3}$$

Функция $f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right)$ имеет период $6\pi/\omega$, втрое больше основного периода $T = 2\pi/\omega$. Разлагая её в ряд Фурье и ограничиваясь двумя первыми слагаемыми, найдём:

$$f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) = b_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3} + b_1 \sin \omega t, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} b_{1/3} = \frac{2}{3T} \int\limits_0^{3T} f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \frac{\omega t}{3} dt \\ b_1 = \frac{2}{3T} \int\limits_0^{3T} f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \omega t dt \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{gathered} \tag{5}$$

Далее, подставляя (2)-(5) в (1) и сравнивая коэффициенты гармоники и субгармоники, приходим к двум нелинейным уравненям:

$$\begin{cases} \left(k^2-\omega^2\right)A_1+\dfrac{\mu}{4}\left(3A_1^3+6A_{1/3}^2A_1-A_{1/3}^3\right)=H \\ \left(k^2-\dfrac{\omega^2}{9}\right)A_{1/3}+\dfrac{3}{4}\mu\left(A_{1/3}^3-A_{1/3}^2A_1+2A_1^2A_{1/3}\right)=0 \end{cases} \tag{6}$$

Одно из решений системы (6) даёт $A_{1/3}=0$, что соответствует колебаниям без субгармоник. Однако нас интересует возможность наличия гармоник, то есть решений системы (6), дающих $A_{1/3}\neq 0$.

Считая $A_{1/3}\neq 0$, представим (6) в виде:

$$A_{1/3}^2-A_{1/3}A_1+2A_1^2+\frac{4(9k^2-\omega^2)}{27\mu}=0$$

Отсюда следует следующее выражения амплитуды субгармонических колебаний через амплитуду основных:

$$A_{1/3}=\frac{A_1}{2}\left[1\pm\sqrt{\frac{16(\omega^2-9k^2)}{27\mu A_1^2}-7}\right], \tag{7}$$

$$\frac{16(\omega^2-9k^2)}{27\mu A_1^2}-7>0$$

Приближённое значение для амплитуды A_1 найдём из первого уравнения (6), положив в нём $\mu=0$:

$$A_1=\frac{H}{k^2-\omega^2},\ \omega\neq k \tag{8}$$

Принимая значения $A_{1/3}$ и A_1, определённые в (8) и (7) за нулевые значения итераций, уточняем значения амплитуд колебаний по итерационной схеме:

$$\begin{gathered} A_1^{(i)}=\frac{H}{k^2-\omega^2}-\frac{1}{4}\frac{\mu}{k^2-\omega^2}\varphi\left(A_1^{(i-1)}\right), \\ \varphi(A_1)=3A_1^3+6A_1A_{1/3}^2-A_{1/3}^3, \end{gathered} \tag{9}$$

где $A_{1/3}$ определена по формуле (7). При $\omega\neq k$ и $\mu\to 0$ сходимость итерационного процесса (10) можно обеспечить за счёт малости параметра μ.

Таким образом, субгармонические колебания в системах с жёсткой при $\mu > 0$ характеристикой возможны лишь при достаточно больших значениях частоты вынуждающей силы. Амплитуды субгармонических колебаний могут значительно превосходить амплитуды основных колебаний частоты ω. При наличии диссипативных сил амплитуды субгармонических колебаний уменьшаются и при значительной интенсивности диссипативных сил субгармонические колебания могут быть полностью подавлены, то есть нелинейная система относительно амплитуд субгармонических колебаний не имеет действительных решений, отличных от нуля.

2 Метод Бубнова-Галёркина

Применим принцип виртуальных перемещений для конкретного примера вынужденных колебаний системы, описываемой уравнением (10):

$$\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 = H \sin \omega t \tag{10}$$

Имея в виду нахождение периодического решения уравнения (10) того же периода, что и период возмущающей силы $2\pi/\omega$, ограничим класс привлекаемых для сравнения функций периодическими функциями того же периода, что и искомая, различающимися формой или амплитудой колебания. При этои промежуток времени, за который система, совершив полное колебание, возвратится в исходное положение на всех путях, выберем равным периоду $2\pi/\omega$. Тогда принцип виртуальных перемещений для рассматриваемой задачи запишется следующим образом:

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} \left(\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 - H \sin \omega t\right) \delta x dx = 0 \tag{11}$$

Решение уравнения (10) будет нечётной функцией t, а потому в возможных решениях следует взять только синусные члены:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + ...$$
$$\delta x = \delta A_1 \sin \omega t + \delta A_2 \sin 2\omega t + \delta A_3 \sin 3\omega t + ...$$

Ограничиваясь одночленным приближением, положим:

$$x = A_1 \sin \omega t,\ \delta x = \delta A_1 \sin \omega t$$

Подставив эти выражения в (11), выполнив интегрирование и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях (в одночленном приближении — при δA), придём к уравнению (12):

$$(\omega^2 - k^2)A - \frac{3}{4}\mu A^3 + H = 0 \tag{12}$$

Уравнение (12) на плоскости A, ω определяет амплитудно-частотную характеристику системы, описываемой уравнением (12).

3 Метод Пуанкаре

Рассмотрим квазилинейное уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t$$

Разложим решение в ряд по параметру ε:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ...$$

Подставляем выражение для x в исходное уравнение и собираем слагаемые при одинаковых степенях ε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0 + p^2 x_0 = H\sin\omega t,\\
&\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1 + p^2 x_1 + f(x_0, \dot{x}_0) = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad \ddot{x}_2 + p^2 x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_0 = 0,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{13}$$

Затем последовательно ищем решения уравнений (13), имеющие частоту вынуждающей силы. При это величина амплитуды основной гармоники изменяется на величину порядка ε.

4 Метод Ван-Дер-Поля

Рассматриваем уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x = -\mu f(x, \dot{x}) + H\sin\omega t \tag{14}$$

Введём коэффициент расстройки:

$$\varepsilon = \mu a = \frac{p^2}{\omega^2} - 1.$$

Следовательно

$$p^2 = \omega^2 + \mu a \omega^2.$$

Также полагаем:

$$H = \mu P$$

Уравнение (14) приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu\left[-a\omega^2 x - f(x, \dot{x}) + P\sin\omega t\right] = \mu F(t) \tag{15}$$

Будем искать решение (15) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{16}$$

Функции A и B связаны дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{17}$$

Подставляя (16) в (15), получаем систему уравнений, после решения которой получаем выражения для A и B:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\mu}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\mu}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{18}$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t)\sin\theta(t) \end{cases} \tag{19}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t)\sin\theta(t) \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляем (20) в (18) и, разрешая полученные уравнения относительно новых неизвестных функций, получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{R\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{21}$$

Теперь заменяем правые части уравнение (21) их осреднёнными значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega}\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T F(t)\sin\left(\omega t-\theta\right)dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{\omega}\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T F(t)\cos\left(\omega t-\theta\right)\dfrac{dt}{R} \end{cases} \tag{22}$$

Подставим в (22) выражение для $F(t)$. В новых обозначениях:

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\omega t-\theta\right), \\ \dot{x} = -\omega R\sin\left(\omega t-\theta\right) \end{cases} \tag{23}$$

Теперь полагаем

$$R = const,\ \theta = const$$

Рассмотрим интеграл в первом уравнении (22):

$$\int\limits_0^T F(t)\sin\left(\omega t-\theta\right)dt = \int\limits_0^T \Big\{-a\omega^2 R\cos\left(\omega t-\theta\right) - \\ -f\left[R\cos\left(\omega t-\theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t-\theta\right)\right] + P\sin\omega t\Big\}\sin\left(\omega t-\theta\right)dt$$

Первое слагаемое в фигурных скобках не даёт вклада в интеграл. Рассмотрим

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\sin\left(\omega t-\theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left[\cos\left(2\omega t-\theta\right)-\cos\theta\right]dt = -\frac{T}{2}\cos\theta$$

Первое уравнение (22) принимает вид:

$$0 = -\int\limits_0^T f\left[R\cos\left(\omega t-\theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t-\theta\right)\right]\sin(\omega t-\theta)dt - P\frac{T}{2}\cos\theta$$

Введём новую переменную

$$\psi = \omega t - \theta$$

Тогда получаем:

$$P\cos\theta = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi dt$$

Аналогично рассматриваем интеграл во втором уравнении (23):

$$\int\limits_0^T F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right)\frac{dt}{R} = \int\limits_0^T \Big\{-a\omega^2 R\cos\left(\omega t - \theta\right) -$$
$$-f\left[R\cos\left(\omega t - \theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t - \theta\right)\right] + P\sin\omega t\Big\}\cos\left(\omega t - \theta\right)\frac{dt}{R}$$

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_0^T \cos^2\left(\omega t - \theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left[1 + \cos 2\left(\omega t - \theta\right)\right]dt = \frac{T}{2}$$

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\cos\left(\omega t - \theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left[\sin\left(2\omega t - \theta\right) + \sin\theta\right]dt = \frac{T}{2}\sin\theta$$

Второе уравнение (23) приобретает вид:

$$0 = -a\omega^2 R\frac{T}{2} - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi + P\frac{T}{2}\sin\theta$$

Перепишем полученные уравнения в виде

$$\begin{cases} P\cos\theta = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ P\sin\theta = a\omega^2 R + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases} \tag{24}$$

Возводим оба уравнения (24) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = \left[\Phi_1(R)\right]^2 + \left[a\omega^2 R + \Phi_2(R)\right]^2 \tag{25}$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases}$$