Лабораторная работа №5

П. С. Углич

кафедра теории упругости

13 апреля 2026 г.

Оглавление

Рассмотрим квазилинейное уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t$$

Разложим решение в ряд по параметру ε:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

Подставляем выражение для x в исходное уравнение и собираем слагаемые при одинаковых степенях ε:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 &: \quad \ddot{x}_0 + p^2 x_0 = H \sin \omega t, \\
\varepsilon^1 &: \quad \ddot{x}_1 + p^2 x_1 + f(x_0, \dot{x}_0) = 0, \\
\varepsilon^2 &: \quad \ddot{x}_2 + p^2 x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_0 \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_0 = 0, \\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1}$$

Затем последовательно ищем решения уравнений (1), имеющие частоту вынуждающей силы

Рассматриваем уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x = -\mu f(x, \dot{x}) + H \sin \omega t \tag{2}$$

Введём коэффициент расстройки:

$$\varepsilon = \mu a = \frac{p^2}{\omega^2} - 1.$$

Следовательно

$$p^2 = \omega^2 + \mu a \omega^2.$$

Также полагаем:

$$H = \mu p$$

Уравнение (2) приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left[-a\omega^2 x - f(x, \dot{x}) + P \sin \omega t \right] = \mu F(t) \tag{3}$$

Будем искать решение (3) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{4}$$

Функции A и B связаны дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{5}$$

Подставляя (4) в (3), получаем систему уравнений, после решения которой получаем выражения для A и B:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\mu}{\omega} F(t) \sin \omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\mu}{\omega} F(t) \cos \omega t \end{cases} \tag{6}$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t) \sin \theta(t) \end{cases} \tag{7}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t) \sin \theta(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляем (8) в (6) и, разрешая полученные уравнения относительно новых неизвестных функций, получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega} F(t) \sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{R\omega} F(t) \cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{9}$$

Теперь заменяем правые части уравнение (9) их осреднёнными значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega} \int\limits_0^T F(t) \sin(\omega t - \theta)\, dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{\omega} \int\limits_0^T F(t) \cos(\omega t - \theta)\, \dfrac{dt}{R} \end{cases} \tag{10}$$

Подставим в (10) выражение для $F(t)$. В новых обозначениях:

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t - \theta), \\ \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t - \theta) \end{cases} \tag{11}$$

Теперь полагаем

$$R = const,\ \theta = const$$

После введения новой переменной

$$\psi = \omega t - \theta$$

Полученные уравнения переписываются в виде

$$\begin{cases} P\cos\theta = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ P\sin\theta = a\omega^2 R + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases} \tag{12}$$

Возводим оба уравнения (12) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = [\Phi_1(R)]^2 + \left[a\omega^2 R + \Phi_2(R)\right]^2 \tag{13}$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases}$$

Перепишем полученные уравнения в виде

$$\begin{cases} P\cos\theta = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ P\sin\theta = a\omega^2 R + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases} \tag{14}$$

Возводим оба уравнения (14) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = [\Phi_1(R)]^2 + \left[a\omega^2 R + \Phi_2(R)\right]^2 \tag{15}$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \tag{16}$$

Принцип возможных перемещений для задачи записывается в виде:

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} \left[\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) - H \sin \omega t\right] \delta x dt = 0 \tag{17}$$

Представим x и δx в виде отрезков ряда Фурье

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \tag{18}$$

$$x = \frac{\delta A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\delta A_k \cos k\omega t + \delta B_k \sin k\omega t) \tag{19}$$

Подставляем (19) и (18) в (17), собираем слагаемые при независимых вариациях δA_k, δB_k и получаем систему уравнений для определения A_k, B_k.

- Найти периодические решения уравнений методами Пуанкаре, Ван-дер-Поля и Галёркина;
- построить амплитудно-частотные характеристики;

1. (Бережной) $(l - a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
2. (Гусаков) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = H\sin\Omega t$
3. (Калабуха) $\ddot{x} + x = -\varepsilon\dot{x}x^2 + H\sin\omega t$
4. (Марков) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^2 x + H\sin\omega t$
5. (Молчан) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^3 = H\sin\omega t$
6. (Терентьев) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\dot{x}\left(\omega^2 x^2 - \dot{x}^2\right) + H\sin\Omega t$
7. (Узлов) $\left(mr^2 + J\right)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = H\sin\omega t$
8. (Филатов)
   $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta = H\sin\Omega t$
9. (Савицкий)
   $$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta - Mga\sin\theta = H\sin\Omega t$$
10. (Ефремов) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x\left(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2\right) + H\sin\Omega t$