

Лабораторная работа №5

П. С. Углич

кафедра теории упругости

28 апреля 2025 г.

Оглавление

- Метод Пуанкаре
- Метод Ван-Дер-Поля
- Метод Галеркина

- 1 **Варианты заданий**
 - Содержание задания
 - Уравнения

Рассмотрим квазилинейное уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t$$

Разложим решение в ряд по параметру ε :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

Подставляем выражение для x в исходное уравнение и собираем слагаемые при одинаковых степенях ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \ddot{x}_0 + p^2 x_0 = H \sin \omega t, \\ \varepsilon^1 : \quad & \ddot{x}_1 + p^2 x_1 + f(x_0, \dot{x}_0) = 0, \\ \varepsilon^2 : \quad & \ddot{x}_2 + p^2 x_2 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} x_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_0 = 0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Затем последовательно ищем решения уравнений (1), имеющие частоту вынуждающей силы

Рассматриваем уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x = -\mu f(x, \dot{x}) + H \sin \omega t \quad (2)$$

Введём коэффициент расстройки:

$$\varepsilon = \mu a = \frac{p^2}{\omega^2} - 1.$$

Следовательно

$$p^2 = \omega^2 + \mu a \omega^2.$$

Также полагаем:

$$H = \mu p$$

Уравнение (2) приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left[-a \omega^2 x - f(x, \dot{x}) + P \sin \omega t \right] = \mu F(t) \quad (3)$$

Будем искать решение (3) в виде

$$x = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t \quad (4)$$

Функции A и B связаны дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t) \cos \omega t + \dot{B}(t) \sin \omega t = 0 \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3), получаем систему уравнений, после решения которой получаем выражения для A и B :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\frac{\mu}{\omega} F(t) \sin \omega t, \\ \dot{B}(t) = \frac{\mu}{\omega} F(t) \cos \omega t \end{cases} \quad (6)$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (7)$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t) \sin \theta(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляем (8) в (6) и, разрешая полученные уравнения относительно новых неизвестных функций, получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\mu}{R\omega} F(t) \sin(\omega t - \theta), \\ \dot{\theta} = \frac{\mu}{R\omega} F(t) \cos(\omega t - \theta) \end{cases} \quad (9)$$

Теперь заменяем правые части уравнение (9) их осреднёнными значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\mu}{\omega} \int_0^T F(t) \sin(\omega t - \theta) dt, \\ \dot{\theta} = \frac{\mu}{\omega} \int_0^T F(t) \cos(\omega t - \theta) \frac{dt}{R} \end{cases} \quad (10)$$

Подставим в (10) выражение для $F(t)$. В новых обозначениях:

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t - \theta), \\ \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t - \theta) \end{cases} \quad (11)$$

Теперь полагаем

$$R = \text{const}, \theta = \text{const}$$

После введения новой переменной

$$\psi = \omega t - \theta$$

Полученные уравнения переписываются в виде

$$\begin{cases} P \cos \theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ P \sin \theta = a\omega^2 R + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (12)$$

Возводим оба уравнения (12) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = [\Phi_1(R)]^2 + [a\omega^2 R + \Phi_2(R)]^2 \quad (13)$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases}$$

Перепишем полученные уравнения в виде

$$\begin{cases} P \cos \theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ P \sin \theta = a\omega^2 R + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{cases} \quad (14)$$

Возводим оба уравнения (14) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = [\Phi_1(R)]^2 + [a\omega^2 R + \Phi_2(R)]^2 \quad (15)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{array} \right.$$

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \quad (16)$$

Принцип возможных перемещений для задачи записывается в виде:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left[\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) - H \sin \omega t \right] \delta x dt = 0 \quad (17)$$

Представим x и δx в виде отрезков ряда Фурье

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \quad (18)$$

$$\delta x = \frac{\delta A_0}{2} + \sum_{k=1}^N (\delta A_k \cos k\omega t + \delta B_k \sin k\omega t) \quad (19)$$

Подставляем (19) и (18) в (17), собираем слагаемые при независимых вариациях δA_k , δB_k и получаем систему уравнений для определения A_k , B_k .

- Найти периодические решения уравнений методами Пуанкаре, Ван-дер-Поля и Галёркина;
- построить амплитудно-частотные характеристики;

- ❶ (Докторов) $(mr^2 + J) \ddot{\varphi} + mgr \sin \alpha \sin \varphi = H \sin \omega t$
- ❷ (Медведев) $(I + a\theta) \ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = H \sin \omega t$
- ❸ (Осяк) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \dot{x} (\omega^2 x^2 - \dot{x}^2) + H \sin \Omega t$
- ❹ (Подколзин) $A\ddot{\theta} + \omega^2 (C - B) \sin \theta \cos \theta = H \sin \Omega t$
- ❺ (Прайс)

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta - Mga \sin \theta = H \sin \Omega t$$