Найдите значение выражения $\frac{\log_2 20}{\log_2 12} + \log_{12} 0{,}05$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Rightarrow \frac{\log_2 20}{\log_2 12} = \log_{12} 20$

$\log_{12} 20 + \log_{12} 0{,}05 = \log_{12}(20 \cdot 0{,}05) = \log_{12} 1 = 0$

Найдите значение выражения $\log^2_{\sqrt{8}} 8 = \left(\log_{\sqrt{8}} 8\right)^2 =$

$= \left(\log_{8^{\frac{1}{2}}} 8\right)^2 = \left(\frac{1}{1/2} \log_8 8\right)^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4$

Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$

$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3\log_a b = 1 - 3.5 =$

$= 1 - 15 = -14$

Элементарные логарифмические уравнения

1) $\log_a f(x) = b$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$ — не проверять, если a и $b \equiv const$

Найдите корень уравнения $\log_2(-5 - x) = 1$.

$-5 - x = 2^1 \Rightarrow -x = 2 + 5 \Rightarrow x = -7$

Найдите корень уравнения $\log_5(4+x)=2.$ 21

Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{8}}(13-x)=-2.$ -51

② $\log_a f(x)=\log_a g(x)$

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

Найдите корень уравнения $\log_5(9+x)=\log_5 7.$

$$\begin{cases} 9+x>0 \\ 9+x=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-9 \\ x=-2 \end{cases} \quad x=-2$$

Решите уравнение $\log_4(6+5x)=\log_4(3+x)+1.$

ОДЗ: $\begin{cases} 6+5x>0 \\ 3+x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-\frac{6}{5} \\ x>-3 \end{cases}$ $x>-\frac{6}{5}$ $x>-1,2$

$\log_4(6+5x)=\log_4(3+x)+\log_4 4$

$\log_4(6+5x)=\log_4 4\cdot(3+x)$

$6+5x=4\cdot(3+x) \Rightarrow 6+5x=12+4x$

$x=6$ (удовл. ОДЗ)

Найдите корень уравнения $\log_2(12-6x)=3\log_2 3.$

Решите уравнение $\log_7(x^2+5x)=\log_7(x^2+6).$

Найдите корень уравнения $\log_4(3+x)=\log_4(4x-15).$

$-2{,}5$; $1{,}2$; 6 — ответы

$\log_7(x^2+5x) = \log_7(x^2+6)$

$+ \quad (-5) \quad - \quad (0) \quad +$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+5x>0 \\ x^2+6>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<-5,\ x>0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$ $\quad x\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)$

$\cancel{x^2}+5x=\cancel{x^2}+6 \Rightarrow 5x+6 \Rightarrow x=1{,}2$

Решите уравнение $\log_{x+6} 32 = 5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней. -4

Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$. $\quad 2$

Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)} = 5$. $\quad 6$

Показательные и логарифмические выражения в прикладных задачах

В ходе распада радиоактивного изотопа, его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 40$ мг изотопа Z, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 5 мг?

$m \geq 5 \Rightarrow m_0 \cdot 2^{-t/T} \geq 5 \Rightarrow 40 \cdot 2^{-t/10} \geq 5$

$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

1) $a>1$: $f(x) \geq g(x)$

2) $0<a<1$: $f(x) \leq g(x)$

$2^{-t/10} \geq \frac{5}{40} \Rightarrow 2^{-t/10} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{-t/10} \geq 2^{-3}$

$-\frac{t}{10} \geq -3 \quad |\cdot(-10) \Rightarrow t \leq 30$ (мин)

Ответ: 30

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$

1) $a > 1: \ f(x) \geq g(x)$

2) $0 < a < 1: \ f(x) \leq g(x)$

Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 с?

$t \geq 21$

$\alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U} \geq 21$

$\frac{7}{10}\cdot 5\cdot 10^6 \cdot 2\cdot 10^{-6} \log_2 \frac{16}{U} \geq 21$

$10^6\cdot10^{-6} = 10^{6-6} = 10^0$

$7\log_2 \frac{16}{U} \geq 21 \quad |:7$

$\log_2 16 - \log_2 U \geq 3$

$4 - \log_2 U \geq 3 \Rightarrow -\log_2 U \geq -1$

$\log_2 U \leq 1 \Rightarrow \log_2 U \leq \log_2 2$

$U \leq 2 \Rightarrow U_{max} = 2$

Ответ: 2

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = const$, где p — давление в газе в паскалях, V — объем газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $const = 10^5$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объем V может занимать газ при давлениях p не ниже $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

$k = \frac{5}{3}$; $p \cdot V^k = 10^5$; $p_{max} = 3{,}2 \cdot 10^6$

$3{,}2 \cdot 10^6 \cdot V^{\frac{5}{3}} = 10^5 \Rightarrow V^{\frac{5}{3}} = \frac{10^5}{3{,}2 \cdot 10^6} = \frac{1}{3{,}2 \cdot 10}$

$V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \quad | \wedge \frac{3}{5}$

$\left(V^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Rightarrow V = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\frac{3}{5}}$

$V = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

Ответ: 6

$A \le 6900$

$\alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 6900$

$5{,}75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot$
$\cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}5} \le 6900$

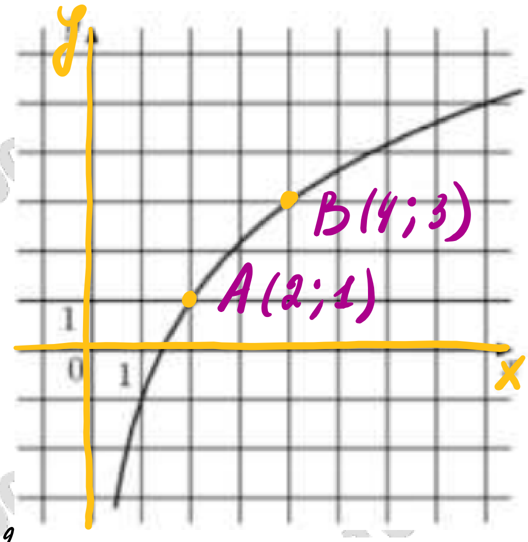
$3450 \log \ldots \le 6900$

$\log_2 \frac{p_2}{1{,}5} \le \frac{690\cancel{0}}{345\cancel{0}} = \frac{138}{69} = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{p_2}{1{,}5} \le \log_2 4$

$\frac{p_2}{1{,}5} \le 4 \quad | \cdot 1{,}5 \Rightarrow p_2 \le 6 \Rightarrow \max p_2 = 6$

Показательные и логарифмические функции

На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите $f(16)$.



$$\begin{cases} b+\log_a 2=1 \\ b+\log_a 4=3 \end{cases}$$

$\log_a 2-\log_a 4=-2 \quad |\cdot(-1)$

$\log_a 4-\log_a 2=2$

$\log_a \frac{4}{2}=2 \Rightarrow \log_a 2=2 \Rightarrow a^2=2$

$a=\pm\sqrt{2}$ $\quad$ a - осн. log $(a>0,\ a\neq 1)$

$a=\sqrt{2}$ подставить в первое ур-е

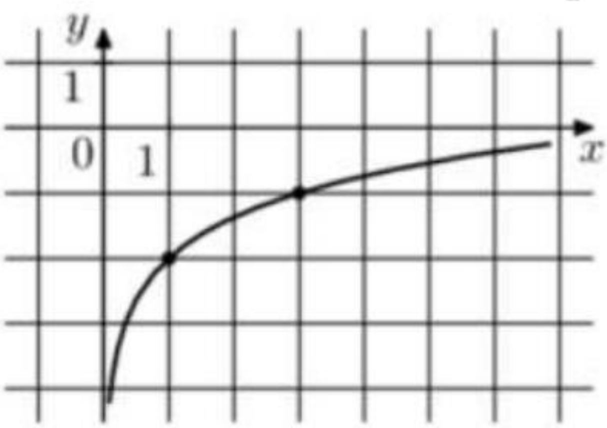
$b+\log_{\sqrt{2}} 2=1 \Rightarrow b+2\log_2 2=1 \Rightarrow b+2=1$

$b=-1$

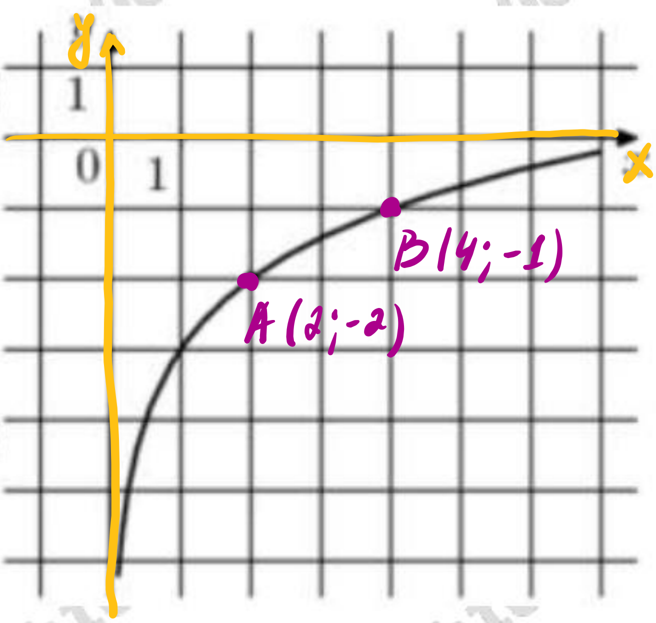
$f(x)=-1+\log_{\sqrt{2}} x$

$f(16)=-1+\log_{\sqrt{2}} 16=-1+2\log_2 16=-1+2\cdot 4=7$

На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите $f(27)$. 1



На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите значение x при котором $f(x)=3$.



$$\begin{cases} b+\log_a 2=-2 \\ b+\log_a 4=-1 \end{cases}$$

$\log_a 2-\log_a 4=-1 \quad |\cdot(-1)$

$\log_a 4-\log_a 2=1$

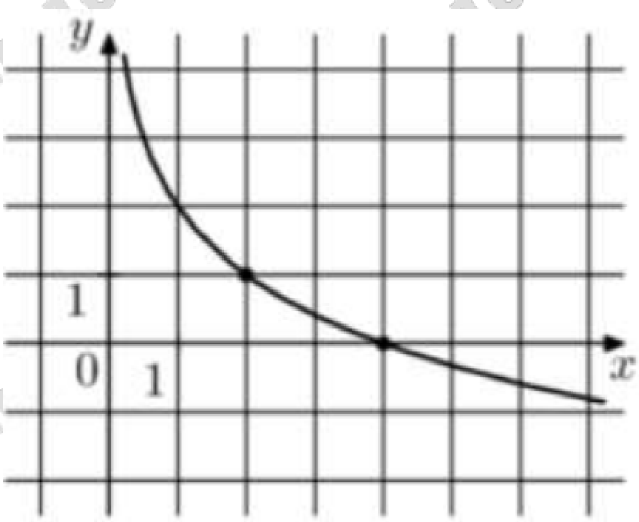
$\log_a \frac{4}{2}=1 \Rightarrow a^1=2 \Rightarrow a=2$

$b+\log_2 2=-2 \Rightarrow b+1=-2 \Rightarrow b=-3$

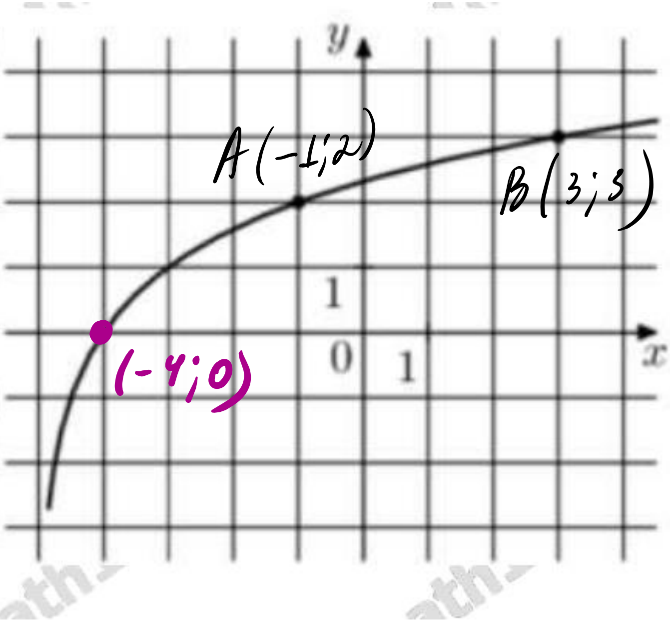
$-3+\log_2 x=3 \Rightarrow \log_2 x=6 \Rightarrow x=2^6 \Rightarrow x=64$

На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите значение x при котором $f(x)=-3$.

32



На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(27)$.



$$\begin{cases} \log_a(-1+b)=2 \\ \log_a(-4+b)=0 \end{cases}$$

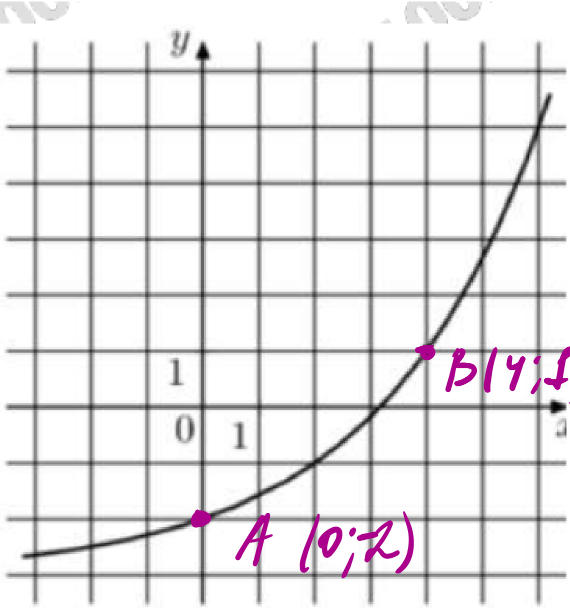
$$\begin{cases} a^2=-1+b \\ a^0=-4+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$$

$$\log_2(27+5)=\log_2 32=5$$

Найдите значение x, при котором $f(x)=6$.

59

На рисунке изображён график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите $f(10)$.

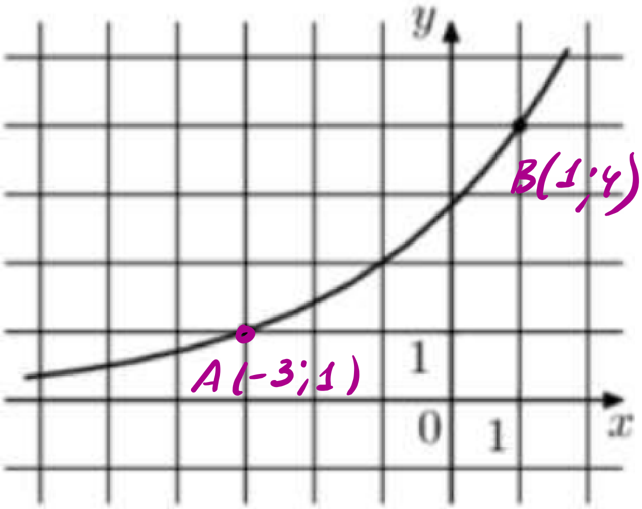


$$\begin{cases} a^0+b=-2 \\ a^4+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-3 \\ a^4=4 \end{cases} \Rightarrow \quad a=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^{10}-3=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}-3=2^5-3=$$

$$=32-3=29$$

На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+b}$. Найдите значение x, при котором $f(x)=16$.



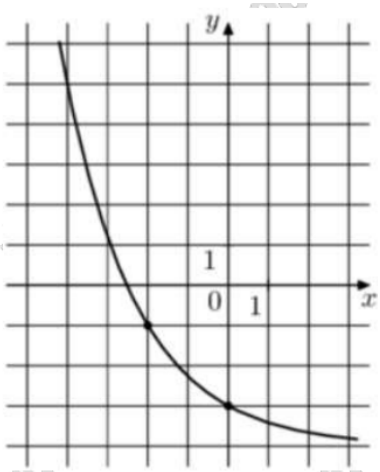
$$\begin{cases} a^{-3+b}=1 \\ a^{1+b}=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow -3+b=0 \Rightarrow b=3 \\ a^4=4 \Rightarrow a=\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$\sqrt{2}^{\,x+3}=16$$

$$2^{\frac{1}{2}(x+3)}=2^4 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+3)=4 \Rightarrow x+3=8 \Rightarrow x=5$$

На рисунке изображён график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите значение x, при котором $f(x)=23$.

$\boxed{-6}$



На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+b}$. Найдите $f(-9)$.

$\boxed{16}$