

1 Движение анизотропной среды

Рассмотрим однородное уравнение колебаний

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

и подставим в него определяющие соотношения в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2)$$

Получаем:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = \rho \ddot{u}_i \quad (3)$$

Будем искать решение в виде плоских волн:

$$u_i = u_{i0} e^{i(k_j x_j - \omega t)} \quad (4)$$

k_j — компонента волнового вектора. Подставим (5) в (3):

$$C_{ijkl} i k_l i k_j u_{k0} e^{i(k_j x_j - \omega t)} = -\rho \omega^2 u_{i0} e^{i(k_j x_j - \omega t)} \quad (5)$$

Сокращаем ненулевой экспоненциальный множитель:

$$-C_{ijkl} k_l k_j u_{k0} = -\rho \omega^2 u_{i0} \quad (6)$$

Переносим всё в левую часть:

$$(C_{ijkl} k_l k_j - \rho \omega^2 \delta_{ik}) u_{k0} = 0 \quad (7)$$

δ_{ik} — символ Кронекера. Система (7) является однородной алгебраической системой уравнений и имеет нетривиальное решение только, если её определитель

равняется нулю:

$$|C_{ijkl}k_l k_j - \rho\omega^2\delta_{ik}| = 0 \quad (8)$$

Разделим уравнение (8) на $|\underline{k}|^2$:

$$|C_{ijkl}n_l n_j - \rho v^2\delta_{ik}| = 0, \quad (9)$$

где

$$n_j = \frac{k_j}{|\underline{k}|}, \quad v = \frac{\omega}{|\underline{k}|}$$

(9) — уравнение относительно v^2 (уравнение Кристоффеля); v_i^2 — главные значения тензора Кристоффеля

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{\rho} C_{ijkl} n_l n_j.$$

Тензор Кристоффеля — симметричный и положительно определённый, его главные значения — вещественные и положительные.

Следовательно, для каждого направления вектора $\underline{n}$ существуют три значения скорости v и три собственных вектора $u_{i0}^{(1)}$, $u_{i0}^{(2)}$, $u_{i0}^{(3)}$. Волна, для которой угол между вектором перемещения и волновым вектором — наименьший, называется квазипродольной, две другие — квазипоперечные.

2 Поток энергии. Фазовая и групповая скорости

Рассмотрим однородные уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (10)$$

Умножим (10) на $\dot{u}_i$:

$$\sigma_{ij,j} \dot{u}_i = \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i, \quad (11)$$

Преобразуем левую часть (11):

$$\sigma_{ij,j} \dot{u}_i = (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (12)$$

Подставим (12) в (11) и перегруппируем слагаемые:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i - (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} = 0, \quad (13)$$

Вводим в рассмотрение величины

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i,$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

Уравнение переписывается в виде

$$\frac{dE_{mech}}{dt} + P_{j,j} = 0, \quad (14)$$

или

$$\frac{dE_{mech}}{dt} + \operatorname{div} \underline{P} = 0, \quad (15)$$

где

$$E_{mech} = T + W$$

— полная механическая энергия,

$$P = -\sigma_{ij}\dot{u}_i$$

— **вектор Умова-Пойнтинга**. Соотношение (15) называется законом сохранения энергии или уравнением неразрывности энергии.

Рассмотрим плоскую волну в виде

$$u_i = U_{i0} \cos(k_j x_j - \omega t).$$

Вычислим полную энергию:

$$\dot{u}_i = \omega U_{i0} \sin(k_j x_j - \omega t),$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i = \frac{1}{2} \rho \omega^2 U_{i0}^2 \sin^2(k_j x_j - \omega t),$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} U_{i0} U_{k0} k_j k_l \sin^2(k_j x_j - \omega t)$$

Осредним величины по времени:

$$\hat{T} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} T dt = \frac{1}{4} \rho \omega^2 U_{i0}^2,$$

$$\hat{W} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} W dt = \frac{1}{4} C_{ijkl} U_{i0} U_{k0} k_j k_l.$$

Если использовать уравнения Кристоффеля, можно показать, что

$$\hat{T} = \hat{W}$$

и

$$\hat{E}_{mech} = 2\hat{T}$$

Величина

$$v_j^{(g)} = \frac{\hat{P}_j}{\hat{E}_{mech}} \quad (16)$$

называется **групповой скоростью волн**.

(16) — энергетическое определение групповой скорости. Также существует кинематическое определение групповой скорости

$$v_j^{(g)} = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \quad (17)$$

Можно показать, что это одна и та же величина.

Величина

$$v_j^{(p)} = \frac{\omega}{k_j} \quad (18)$$

называется **фазовой скоростью волн**.

3 Отражение и преломление волн на свободной границе

Определение Будем называть колебания установившимися, если поле перемещений представимо в виде:

$$u_i(x; t) = u_i(x) e^{-i\omega t},$$

где ω — частота колебаний.

Рассмотрим модельную задачу о падении волны на границу полуплоскости. Будем считать, что полуплоскость совершает установившиеся колебания в состоянии плоской деформации.

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Продольный и поперечный потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца вида

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2 \varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2 \psi = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

При этом вектор $\underline{\psi}$ состоит из единственной компоненты

$$\underline{\psi} = \{0, 0, \psi\}$$

и

$$\text{rot} \underline{\psi} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \psi_{,2} \underline{e}_1 - \psi_{,1} \underline{e}_2$$

Представление Ляме приобретает вид:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \quad (21)$$

Из бесконечности на свободную границу падает продольная плоская волна под углом θ . Выражение для неё имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = e^{ik_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \\ \psi^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

Амплитуда продольной волны равняется единице и выражения для падающей волны удовлетворяет уравнениям (20). Выражение для отражённой волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = Ae^{ik_1(x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1)}, \\ \psi^{(2)} = Be^{ik_2(x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma)}, \end{cases} \quad (23)$$

Продольная волна отразилась под углом θ_1 , поперечная – под углом γ , A и B – неизвестные константы. Используя представление Ляме, найдём поле перемещений:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = e^{ik_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} + A e^{ik_1(x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1)}, \\ \psi &= \psi^{(1)} + \psi^{(2)} = B e^{ik_2(x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= \varphi_{,1} + \psi_{,2} = ik_1 \cos \theta e^{ik_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} + A ik_1 \cos \theta_1 e^{ik_1(x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1)} - \\ &\quad - B ik_2 \sin \gamma e^{ik_2(x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma)} \\ u_2 &= \varphi_{,2} - \psi_{,1} = ik_1 \sin \theta e^{ik_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} - A ik_1 \sin \theta_1 e^{ik_1(x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1)} - \\ &\quad - B ik_2 \cos \gamma e^{ik_2(x_1 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma)}\end{aligned}\tag{24}$$

Верхняя граница полуплоскости свободна от напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu (u_{1,2} + u_{2,1})|_{x_2=0} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = [\lambda (u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}]|_{x_2=0} = [\lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2}]|_{x_2=0} = 0 \end{cases}\tag{25}$$

Найдём касательное напряжение:

$$\begin{aligned}\sigma_{12}|_{x_2=0} &= \mu \left(-k_1^2 \cos \theta \sin \theta e^{ik_1 x_1 \cos \theta} + A k_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} \right. \\ &\quad \left. - B k_2^2 \sin^2 \gamma e^{ik_2 x_1 \cos \gamma} - k_1^2 \cos \theta \sin \theta e^{ik_1 x_1 \cos \theta} + A k_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} + \right. \\ &\quad \left. + B k_2^2 \cos^2 \gamma e^{ik_2 x_1 \cos \gamma} \right)\end{aligned}\tag{26}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_{12}|_{x_2=0} &= \mu \left[-2k_1^2 \cos \theta \sin \theta e^{ik_1 x_1 \cos \theta} + 2A k_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} \right. \\ &\quad \left. + B k_2^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) e^{ik_2 x_1 \cos \gamma} \right]\end{aligned}\tag{27}$$

Найдём нормальное напряжение:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}|_{x_2=0} &= \lambda \left(-k_1^2 \cos^2 \theta e^{ik_1 x_1 \cos \theta} - A k_1^2 \cos^2 \theta_1 e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} + \right. \\ &\quad \left. + B ik_2 \sin \gamma \cos \gamma e^{ik_2 \cos \gamma} \right) + (\lambda + 2\mu) \left(-k_1^2 \sin^2 \theta e^{ik_1 x_1 \cos \theta} - \right. \\ &\quad \left. - A k_1^2 \sin^2 \theta_1 e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} - B k_2^2 \sin \gamma \cos \gamma e^{ik_2 x_1 \cos \gamma} \right)\end{aligned}\tag{28}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{22}|_{x_2=0} = & -k_1^2 [\lambda \cos^2 \theta + (\lambda + 2\mu) \sin^2 \theta] e^{ik_1 x_1 \cos \theta} - \\ & - Ak_1^2 [\lambda \cos^2 \theta_1 + (\lambda + 2\mu) \sin^2 \theta_1] e^{ik_1 x_1 \cos \theta_1} - 2\mu B k_2^2 \sin \gamma \cos \gamma e^{ik_2 x_1 \cos \gamma} \end{aligned} \quad (29)$$

При $x_2 = 0$ мы имеем два условия для определения неизвестных, в то время как неизвестными являются A , B , θ_1 и γ . Условия (25) могут выполняться только если показатели экспонент — одинаковые. Это приводит нас к равенству

$$ik_1 x_1 \cos \theta = ik_1 x_1 \cos \theta_1 = ik_2 x_1 \cos \gamma,$$

следовательно

$$\theta = \theta_1,$$

$$k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \gamma.$$

Получаем уравнение для определения угла γ :

$$\cos \gamma = \frac{k_1}{k_2} \cos \theta \quad (30)$$

Вспоминаем определения k_1 , k_2 :

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} / \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} < 1,$$

Следовательно, правая часть (30) всегда меньше единицы и уравнение (30) всегда имеет вещественное решение. Сократим ненулевые экспоненциальные множители в (25) и получим:

$$\begin{cases} -2k_1^2 \cos \theta \sin \theta + 2Ak_1^2 \cos \theta \sin \theta + Bk_2^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = 0 \\ -k_1^2 [\lambda \cos^2 \theta + (\lambda + 2\mu) \sin^2 \theta] - Ak_1^2 [\lambda \cos^2 \theta_1 + (\lambda + 2\mu) \sin^2 \theta] - \\ -2\mu B k_2^2 \sin \gamma \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Разделим первое уравнение на k_1^2 , второе — на $k_1^2 (\lambda + 2\mu)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A \cos \theta \sin \theta + B \frac{k_2^2}{k_1^2} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = 2 \cos \theta \sin \theta \\ A \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) + 2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} B \frac{k_2^2}{k_1^2} \sin \gamma \cos \gamma = \\ = - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \end{array} \right. \quad (32)$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\lambda + 2\mu - 2\mu}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2}$$

Следовательно

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta$$

Также

$$\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta - 1$$

Система (32) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A \cos \theta \sin \theta + B \frac{k_2^2}{k_1^2} \left(2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta - 1 \right) = 2 \cos \theta \sin \theta \\ A \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta \right) + 2B \frac{k_1}{k_2} \cos \theta \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta} = \\ = - \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \theta \right) \end{array} \right. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\rho \omega^2}{\mu} / \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{\lambda + \mu + \mu}{\mu} = \frac{\mu(1 - 2\nu)^{-1} + \mu}{\mu} = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}$$

Следовательно, соотношение (33) зависит только от угла θ и коэффициента Пуассона. Ниже (1) представлен график зависимости A от θ при различных значениях коэффициента Пуассона. Как видно из графика, при $\nu < \nu^*$ существу-

ет два угла θ_1, θ_2 (углы Брюстера, углы полной трансформации), при которых $A = 0$ и продольная волна при отражении полностью переходит в поперечную, при $\nu = \nu^*$ такой угол всего один и если $\nu > \nu^*$ полная трансформация места не имеет.

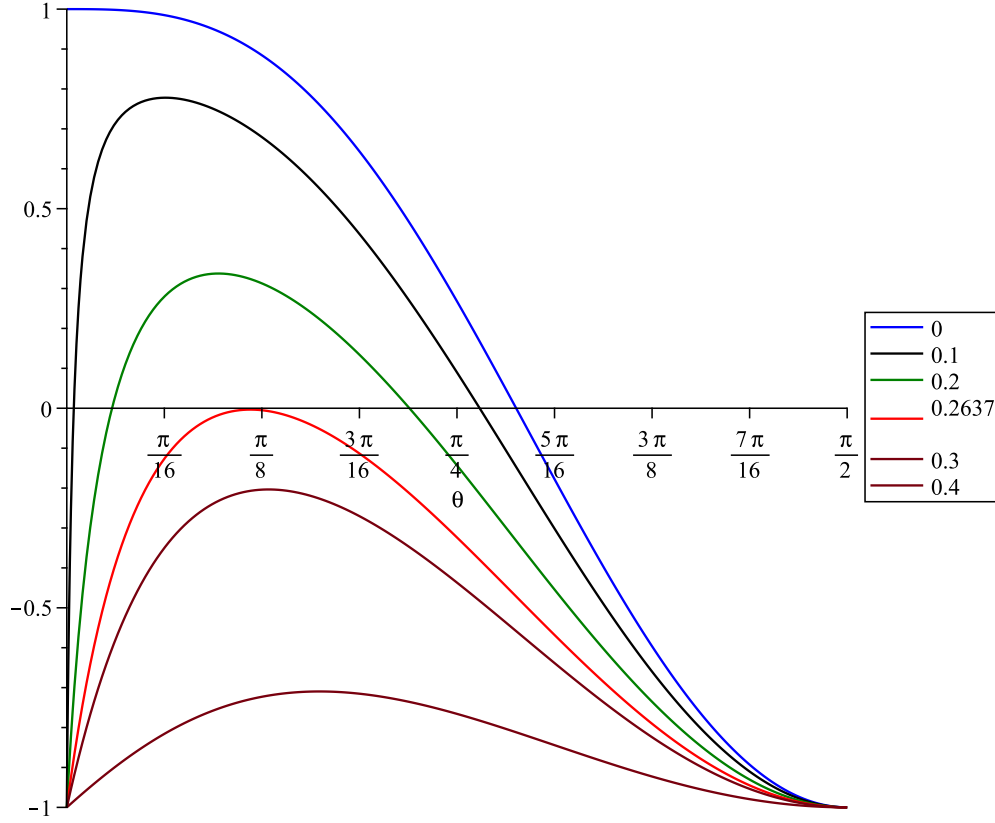


Рис. 1: A в зависимости от θ

Рассмотрим теперь отражение поперечной волны. Предположим, что выражение для падающей волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = 0, \\ \psi^{(1)} = e^{ik_2(x_1 \cos \gamma + x_2 \sin \gamma)}, \end{cases} \quad (34)$$

Выражение для отражённой волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = Ae^{ik_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)}, \\ \psi^{(2)} = Be^{ik_2(x_1 \cos \gamma_1 - x_2 \sin \gamma_1)}, \end{cases} \quad (35)$$

Повторяя рассуждения, сделанные для предыдущей задачи, получаем равенство

$$ik_1x_1 \cos \theta_1 = ik_2x_1 \cos \gamma = ik_2x_1 \cos \gamma_1,$$

следовательно

$$\gamma = \gamma_1$$

и

$$\cos \theta = \frac{k_2}{k_1} \cos \gamma \quad (36)$$

Рассмотрим

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} > 1.$$

Следовательно, (36) не всегда имеет вещественное решение и решение не при каждом значении γ может быть построено в виде плоских волн.

4 Поверхностные волны Релея

Определение Поверхностные волны — волны, амплитуда которых экспоненциально убывает с глубиной.

Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$. Волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2; t), \\ u_2 = u_2(x_1, x_2; t), \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Волновое поле будем искать с помощью волновых потенциалов по формулам:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \quad (38)$$

Волновые потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} = c_1^{-2} \ddot{\varphi}, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} = c_2^{-2} \ddot{\psi}, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu (u_{1,2} + u_{2,1})|_{x_2=0} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = [\lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2}]|_{x_2=0} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Решение задачи ищем в виде бегущих волн:

$$\begin{cases} \varphi = \Phi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \psi = \Psi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \quad (41)$$

Подставляем (41) в (39):

$$\begin{cases} (-k^2 \Phi + \Phi'') e^{i(kx_1 - \omega t)} = -k_1^2 \Phi e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ (-k^2 \Psi + \Psi'') e^{i(kx_1 - \omega t)} = -k_2^2 \Psi e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (42)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho \omega^2}{\mu}.$$

Отбросим ненулевые экспоненциальные множители и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} \Phi'' - (k^2 - k_1^2) \Phi = 0, \\ \Psi'' - (k^2 - k_2^2) \Psi = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Строим общее решение (43), ограниченное в бесконечно удалённой точке

$$\begin{cases} \Phi = Ae^{\gamma_1 x_2}, \\ \Psi = Be^{\gamma_2 x_2}, \end{cases} \quad (44)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k^2 - k_2^2}.$$

Найдём поле перемещений

$$\begin{cases} u_1 = (ikAe^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2}) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_2 = (\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} - ikBe^{\gamma_2 x_2}) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (45)$$

Найдём напряжения при $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu [(ik\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2^2 Be^{\gamma_2 x_2}) + \\ + ik(\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} - ikBe^{\gamma_2 x_2})] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = [ik\lambda(ikAe^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2}) + \\ + (\lambda + 2\mu)(\gamma_1^2 Ae^{\gamma_1 x_2} - ik\gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2})] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (46)$$

или

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu [2ik\gamma_1 A + (\gamma_2^2 + k^2) B] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = \{[-k^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^2] A - 2\mu ik\gamma_2\} e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (47)$$

Рассмотрим выражения

$$\gamma_2^2 + k^2 = k^2 - k_2^2 + k^2 = 2k^2 - k_2^2$$

$$-k^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^2 = -k^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\left(k^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right) = 2\mu k^2 - \rho\omega^2 = \mu(2k^2 - k_2^2)$$

Граничные условия (40) приобретают после сокращения ненулевых множителей вид:

$$\begin{cases} 2ik\gamma_1 A + (2k^2 - k_2^2) B = 0, \\ (2k^2 - k_2^2) A - 2ik\gamma_2 B = 0, \end{cases} \quad (48)$$

Система (48) — однородная и имеет нетривиальные решения только если её определитель равен нулю. Это приводит к уравнению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2ik\gamma_1 & 2k^2 - k_2^2 \\ 2k^2 - k_2^2 & -2ik\gamma_2 \end{vmatrix} = 4k^2\gamma_1\gamma_2 - (2k^2 - k_2^2)^2 = 0 \quad (49)$$

Заведём переменную

$$\eta = \frac{k_2^2}{k^2} = \frac{c^2}{c_2^2}$$

Рассмотрим уравнение

$$R(\eta) = \frac{\Delta}{k^4} = 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\eta)^2 = 0,$$

где

$$\theta = \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1$$

Найдём

$$R(0) = 4 - 4 = 0,$$

$$R(1) = 0 - 1 = -1,$$

Найдём

$$R'(\eta) = -2 \left(\frac{\sqrt{1-\theta\eta}}{\sqrt{1-\eta}} + \theta \frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\theta\eta}} \right) + 2(2-\eta),$$

Следовательно

$$R'(0) = -2(1+\theta) + 4 = 2(1-\theta) > 0,$$

Итак, $R(0) = 0$, $R(1) = -1$ и $R'(0) > 0$, следовательно по крайней мере в одной точке $R(\eta) = 0$.

Обозначим корень через η_R .

$$\eta_R = \frac{c_R^2}{c_2^2},$$

следовательно,

$$c_R = \sqrt{\eta_R} c_2 < c_2,$$

то есть скорость поперхностной волны меньше скорости поперечной волны. Можно рассмотреть

$$\theta = \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

и тогда получается, что скорость поверхностных волн зависит только от коэффициента Пуассона.

Существует приближенная формула

$$\frac{c_R}{c_2} = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu}$$

с погрешностью 0,3%.

Значение скорости поверхностных волн находится в отрезке $(0,8 \div 0,95)c_2$.

Рассмотрим кинематику поверхностных волн. Решение системы (48) может быть построено в виде

$$A = (2k^2 - k_2^2) D, \quad B = -2ik\gamma_1 D, \quad (50)$$

где D — произвольная вещественная константа.

Подставляем (50) в выражение для волнового поля (45):

$$\begin{cases} u_1 = ik \left[(2k^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{\gamma_2 x_2} \right] D e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_2 = \gamma_1 \left[(2k^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} - k^2 e^{\gamma_2 x_2} \right] D e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (51)$$

Пусть $D = 1$. Тогда выражение для волнового поля принимает вид:

$$\begin{cases} u_1 = iR_1(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_2 = R_2(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{cases} \quad (52)$$

R_1, R_2 — вещественнозначные функции. Возьмём вещественные части выражений

(52):

$$\begin{cases} \Re u_1 = -R_1(x_2) \sin(kx_1 - \omega t), \\ \Re u_2 = R_2(x_2) \cos(kx_1 - \omega t), \end{cases} \quad (53)$$

Разделим первое уравнение на $R_1(x_2)$, второе — на $R_2(x_2)$, возведём их в квадрат и сложим друг с другом:

$$\left[\frac{\Re u_1}{R_1(x_2)} \right]^2 + \left[\frac{\Re u_2}{R_2(x_2)} \right]^2 = 1 \quad (54)$$

Получаем, что уравнения траекторий частиц представляют из себя эллипсы, полуоси которых экспоненциально убывают с глубиной.

Если найти компоненты вектора Умова-Пойнтинга, то $P_2 = 0$, $P_1 \neq 0$, то есть перенос энергии происходит только в горизонтальном направлении. Львиная доля энергии волны сосредоточена в приповерхностном слое толщины $\lambda = 2\pi/k_R$.

Скорость поверхностных волн Релея не подвержена дисперсии.

Определение Говорят, что волна подвержена дисперсии, если её скорость зависит от частоты колебаний.