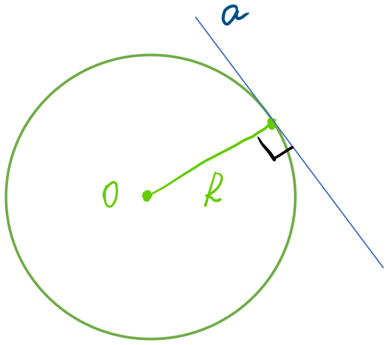
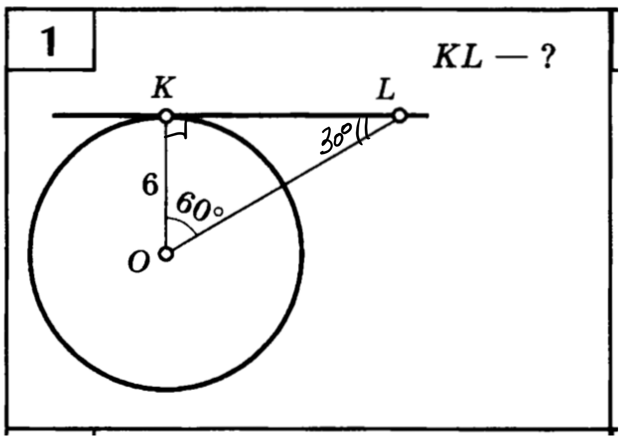
Окружности и касательные



a - касательная к окружности

$R \perp a$ в точке касания



ΔKOL – прямоугольный

$\angle KLO = 30^\circ \Rightarrow KO = \frac{1}{2} OL \Rightarrow$

$OL = 12$

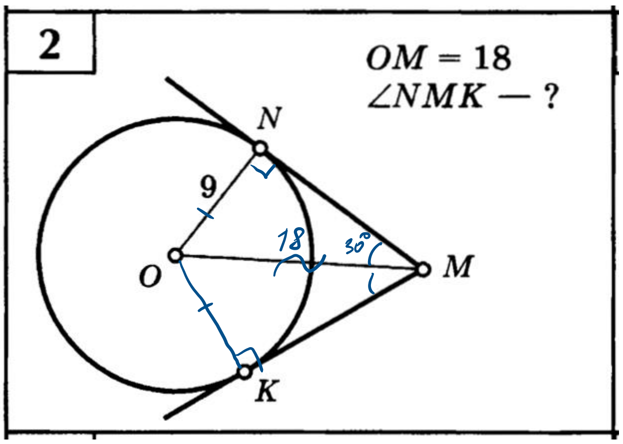
Т. Пифагора

$KL = \sqrt{OL^2 - KO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} =$

$= \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 12} =$

$= 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

II способ $\quad tg\, KOL = \frac{KL}{KO}$; $tg\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow tg\, 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$

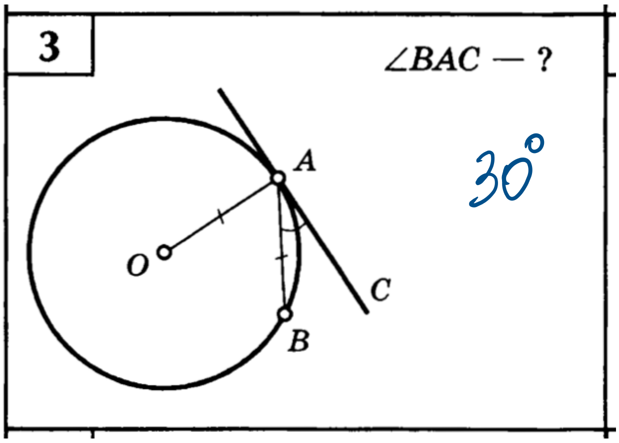


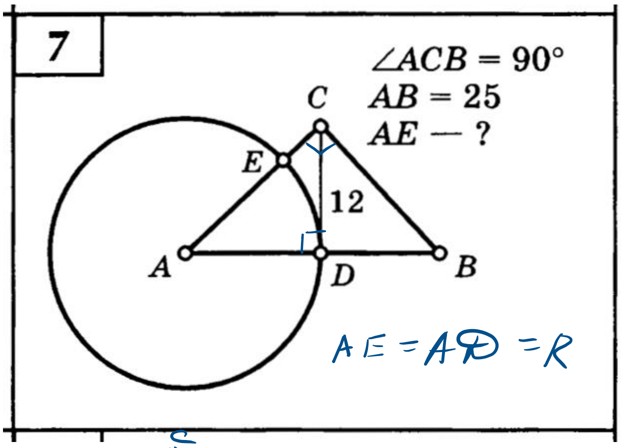
$\Delta MNO = \Delta MKO$

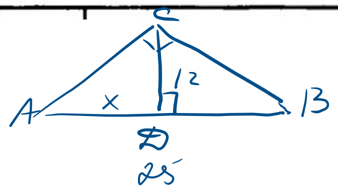
$\angle NMO = 30^\circ$

$\left(\sin NMO = \frac{NO}{MO} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \right)$

$\angle NMK = 2 \angle NMO = 60^\circ$







$D = 25^2 - 4 \cdot 144 =$
$= 625 - 576 = 49 = 7^2$

$x_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{2}$

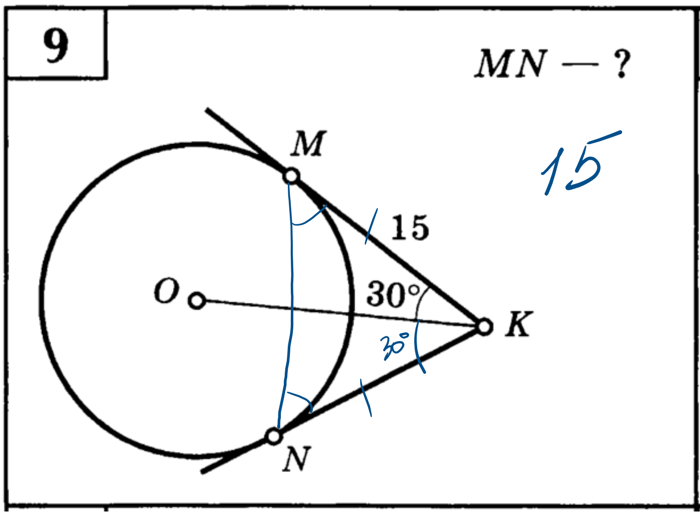
$x_1 = \frac{25-7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

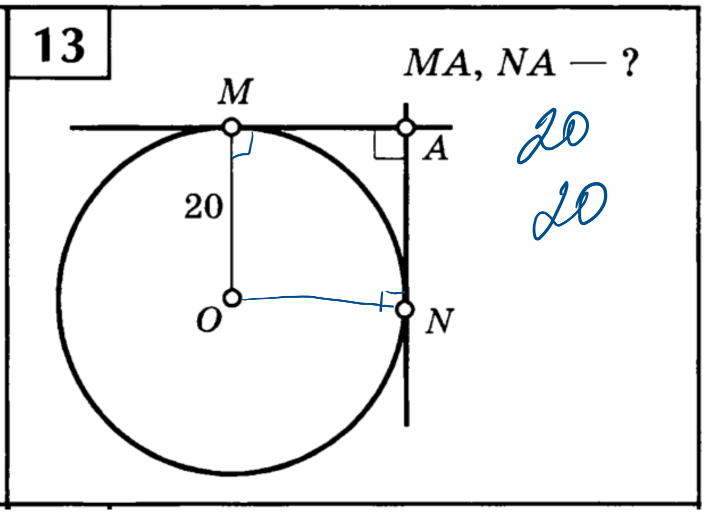
$x_2 = \frac{25+7}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$\begin{cases} CD^2 = AD \cdot BD \\ AD + BD = AB \end{cases}$

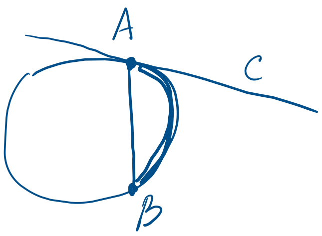
$12^2 = x \cdot (25 - x)$
$144 = 25x - x^2$
$x^2 - 25x + 144 = 0$

ΔACD : 12, x – катеты, $AC > x$ и $AC > 12$



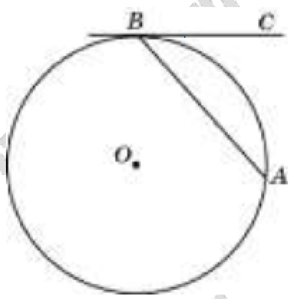


Окружность, секущая и касательная



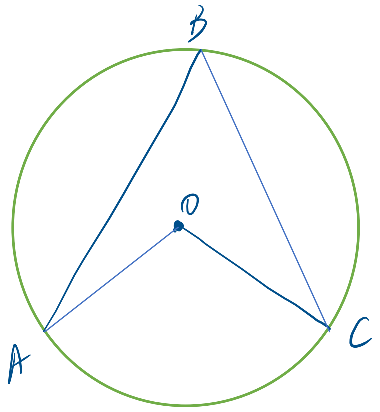
$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AB$

Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B. Ответ дайте в градусах.



46°

Вписанные и центральные углы



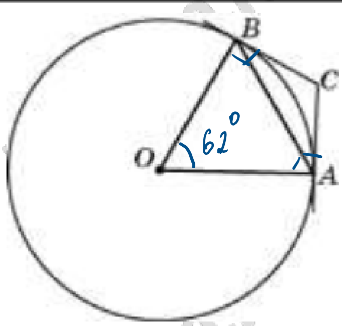
$\angle ABC$ – вписанный

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

$\angle AOC$ – центральный

$\angle AOC = \cup AC$

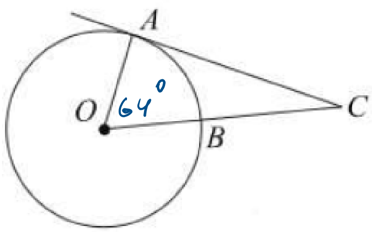
Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



118°

$ACBO$: $\angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

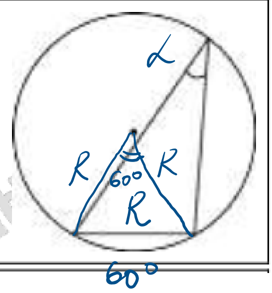
Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, сторона CO пересекает окружность в точке B, а дуга AB окружности, заключенная внутри этого угла равна 64°. Ответ дайте в градусах. 26



$\angle ACO = 90^\circ - \angle AOC = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

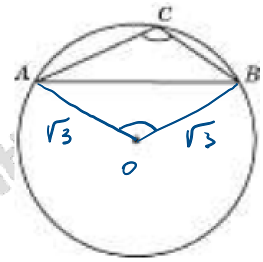


Найдите хорду, на которую опирается угол 120°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

$AB = ?$

$\angle ACB = 120^\circ$

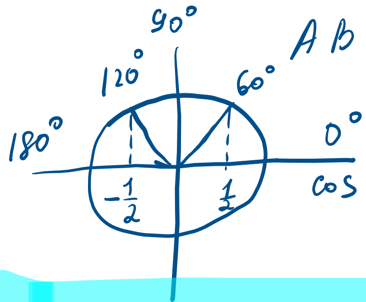
$R = \sqrt{3}$



$\smile AB = 240^\circ \Rightarrow \smile ACB = 360^\circ - \smile AB = 120^\circ \Rightarrow$

$\angle AOB = 120^\circ$

$\triangle ABO$: $AB^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot \overbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}^{3} \cos 120^\circ$

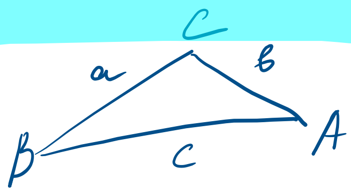


$AB^2 = 3 + 3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$AB^2 = 6 + 3 = 9$

$AB = 3$

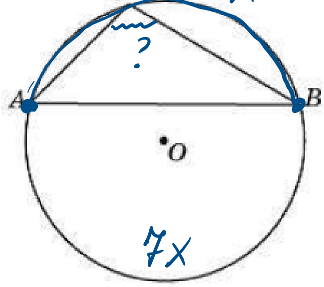
Треугольники



Т. синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Т. косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

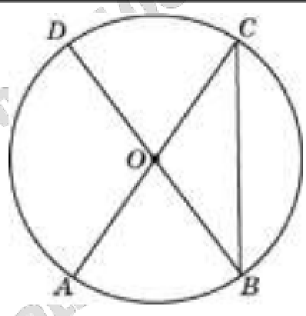
Хорда AB делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



$5x + 7x = 360^\circ \Rightarrow 12x = 360^\circ$

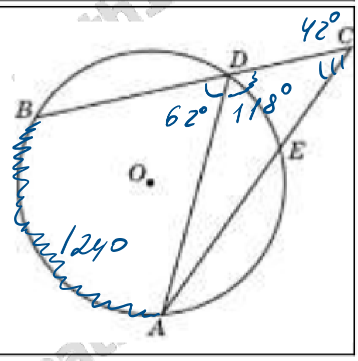
$x = 30^\circ \Rightarrow \angle C = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 30^\circ = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$

AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 38°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

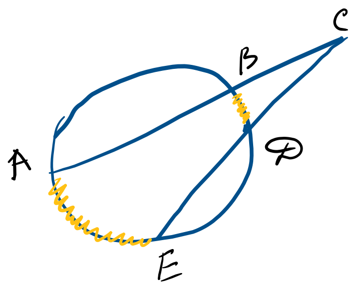


104°

Угол ACB равен 42°. Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 124°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.



20°



$$\angle ACE = \frac{\smile BD + \smile AE}{2}$$

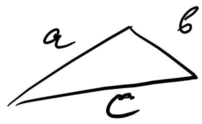
Вписанные и описанные окружности

$S_\Delta = p \cdot r$

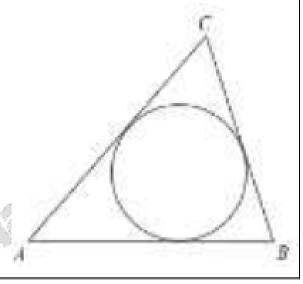
$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$

r – вписан.
R – описан.



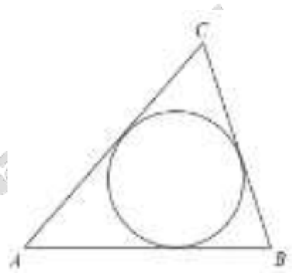
Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



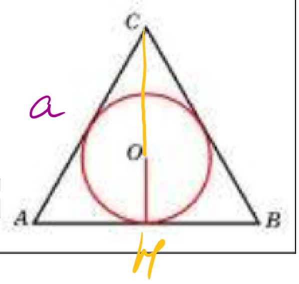
$P = 12,\ r = 1 \Rightarrow S = \frac{P}{2} \cdot r = \frac{12}{2} \cdot 1 = 6$

Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.

24



Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



① $\frac{CO}{OH} = \frac{2}{1}$ $\quad CH = 6$

$OH = R = 2$

② $\triangle ACH$: $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 6^2$

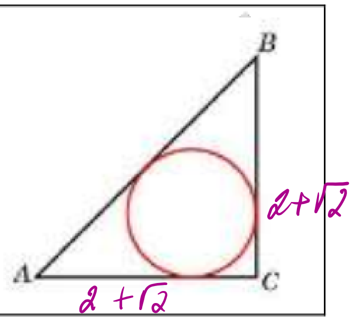
$a^2 = \frac{a^2}{4} + 36 \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 12 \cdot 4$

$S_\triangle = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

$S = p \cdot r$; $a = 4\sqrt{3}$

$S = 12\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\cancel{\sqrt{3}} \cdot r \Rightarrow r = \frac{12}{3 \cdot 2} = 2$

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2+\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



т. Пифагора: $c^2 = (2+\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{2})^2 = 2(2+\sqrt{2})^2$

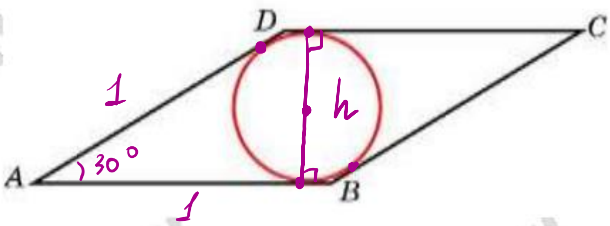
$c = \sqrt{2}(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+2$

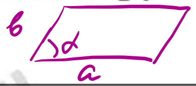
$p = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(6+4\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}(4+4\sqrt{2}+2) = \frac{1}{2}(6+4\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$

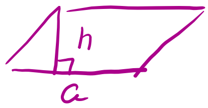
$S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = 1$

Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.





$S = ab\sin\alpha$



$S = ah$

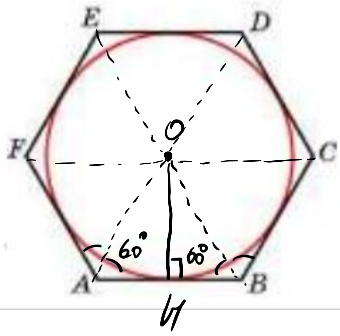
$h = 2r$

$S = 1\cdot 1\cdot \sin 30° = \frac{1}{2}$

$S = a\cdot 2r \Rightarrow \frac{1}{2} = 1\cdot 2r$

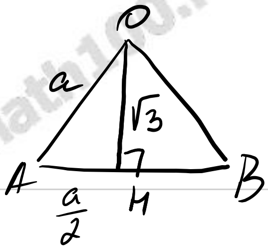
$r = \frac{1}{4} = 0,25$

Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



△ABO – равносторонний

$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180°$

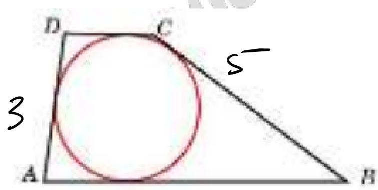


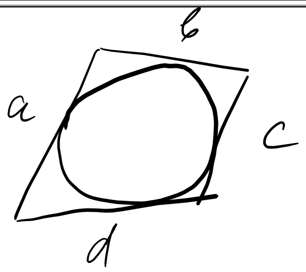
$\sqrt{3}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$3 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 4$

$a = 2$

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.





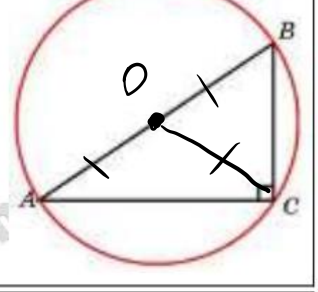
$a + c = b + d$

$AD + CB = DC + AB$

$AB + DC = 8$

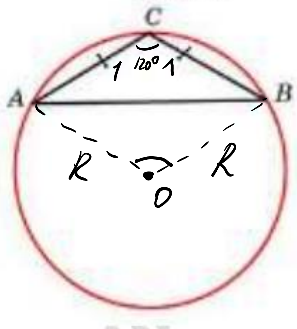
средн. линия: $m = \frac{1}{2}(AB + DC) = 4$

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



$R = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



$\cup AB = 240^\circ$

$\cup ACB = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$

т. косинусов $\triangle ABC$: $AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ$

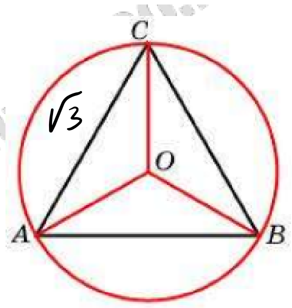
$AB^2 = 2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 2 + 1 = 3$

т. косинусов $\triangle ABO$: $AB^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120^\circ$

$3 = 2R^2 - 2R^2 \cdot (-\frac{1}{2}) \Rightarrow 3R^2 = 3 \Rightarrow R^2 = 1$

$R = 1$

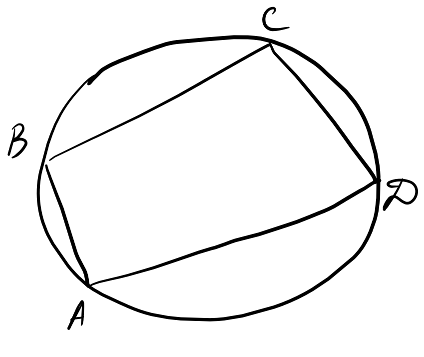
Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



$S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$

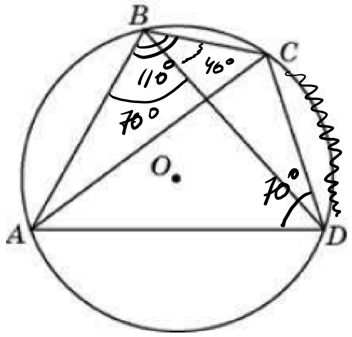
$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4R} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4R} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1$



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $110°$, угол ABD равен $70°$. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



$\angle CBD = 40° = \frac{1}{2} \smile CD \Rightarrow \smile CD = 80°$

~~$\angle B + \angle D = 180°$~~ $\angle CAD = \frac{1}{2} \smile CD = 40°$

$L = 2\pi R$ – длина окружности

$S = \pi R^2$ – площадь круга