1 Вынужденные антиплоские колебания слоя

Рассмотрим упругий слой, занимающий область

$$\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -H \le x_2 \le H\}$$

Предположим, что волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение колебаний имеет вид:

$$u_{,11} + u_{,22} + k_2^2 u = 0, \tag{2}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\omega^2}{c_2^2}.$$

Граничные условия следующие:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\pm H} = \pm p(x_1), \tag{3}$$

где $p(x_1)$ — финитная функция, то есть $p(x_1) = 0$, если $x_1 \notin (-a, a)$.

Для решения задачи используем преобразование по переменной x_1:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2)e^{i\alpha x_1} dx_1 \tag{4}$$

Уравнение колебаний имеет вид:

$$-\alpha^2\tilde{u} + \tilde{u}'' + k_2^2\tilde{u} = 0, \tag{5}$$

или

$$\tilde{u}'' - \left(\alpha^2 - k_2^2\right)\tilde{u} = 0, \tag{6}$$

Граничные условия приобрели вид:

$$\mu \tilde{u}'\big|_{x_2=\pm H} = \pm p(x_1), \tag{7}$$

Общее решение имеет вид:

$$\tilde{u} = A\mathrm{ch}\gamma x_2 + B\mathrm{sh}\gamma x_2, \tag{8}$$

Подставляем (8) в граничные условия (3):

$$\begin{cases} \mu\gamma\left(A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) = \tilde{p}(\alpha), \\ \mu\gamma\left(-A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) = -\tilde{p}(\alpha) \end{cases} \tag{9}$$

Решаем систему (9), находим

$$\begin{cases} A = \dfrac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu\gamma}\dfrac{1}{\mathrm{sh}\gamma H} = \dfrac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\dfrac{1}{\mathrm{sh}\gamma H}, \\ B = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$p_0(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{\mu}.$$

Подставляем в общее решение:

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}, \tag{11}$$

Обращаем преобразование Фурье:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}e^{-i\alpha x_1}d\alpha, \tag{12}$$

Воспользуемся выражением (4):

$$u = \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_{-a}^{a} p(\xi)d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}e^{-i\alpha(\xi-x_1)}d\alpha, \tag{13}$$

Функцию

$$K(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}e^{-i\alpha(\xi-x_1)}d\alpha$$

Называют функцией Грина краевой задачи. Она позволяет построить решение для любой функции нагрузки.

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения (12). Они определяются уравнением:

$$\gamma\mathrm{sh}\gamma H = 0. \tag{14}$$

Воспользуемся связью между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$i\sin(i\gamma H) = 0$$

следовательно

$$i\gamma H = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Раскроем γ:

$$\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}H = -i\pi n,$$

Возведём в квадрат:

$$\alpha^2 - k_2^2 = -\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2,$$

Получаем набор корней:

$$\alpha_n = \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2} \tag{15}$$

Таким образом, уравнение (14) имеет счётное множество корней, конечное число которых — чисто мнимое. Все особенности являются полюсами первого порядка подынтегральной функции.

Воспользуемся принципом предельного поглощения и добавим в уравнение (2) слагаемые, характеризующие вязкое трение. При этом k_2^2 заменяется на $k_{2\varepsilon}^2 = k_2^2 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. при этом из уравнения (15) видно, что положительые вещественные особенности смещаются в верхнюю полуплоскость, отрицательные — в нижнюю. Для того, чтобы обеспечить равномерный предельный переход при $\varepsilon \to 0$, следует заменить интеграл по вещественной оси на интегрирование по контуру σ, который совпадает с вещественной осью всюду за исключением окрестностей особых точек, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. Положительные особенности огибаются в нижней полуплоскости. отрицательные — в верхней.

Предположим, что $x_1 < -a$. Воспользуемся теоремой Жордана и замкнём контур интегрирования в верхней полуплоскости. И интеграл выражается через сумму вычетов. Выражение для волнового поля имеет вид:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H} e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n} \left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H} e^{-i\alpha x_1} \right] \tag{16}$$

Найдем вычеты. Особенности являются полюсами первого порядка и вычеты вычисляются по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$$

Выражение для вычета приобретает вид:

$$\operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n} \left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\,\gamma H} e^{-i\alpha x_1} \right] = \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{\tilde{\mathrm{ch}}\gamma_n x_2}{(\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma H)'_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_n}} e^{-i\alpha_n x_1},$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k_2^2} = \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 - k_2^2} = i\frac{\pi n}{H}$$

Найдём производную знаменателя подынтегрального выражения:

$$(\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma H)'_\alpha = \frac{\alpha}{\gamma}\,\mathrm{sh}\,\gamma H + \alpha H\,\mathrm{ch}\,\gamma H \tag{17}$$

Подставим в выражение (17) $\alpha = \alpha_n$:

$$(\gamma \operatorname{sh} \gamma H)'_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma_n H + \alpha_n H \operatorname{ch} \gamma_n H \tag{18}$$

Рассмотрим выражения

$$\operatorname{sh} \gamma_n H = \operatorname{sh} \left(\frac{i\pi n}{H} H \right) = i \sin \pi n = 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_n H = \operatorname{ch} (i\pi n) = \cos \pi n = (-1)^n$$

Следовательно

$$(\gamma \operatorname{sh} \gamma H)'_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_n} = \alpha_n H (-1)^n \tag{19}$$

и

$$\operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n} \left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\operatorname{ch}\gamma x_2}{\operatorname{sh} \gamma H} e^{-i\alpha x_1} \right] = \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{\cos\left(\pi n \frac{x_2}{H}\right)}{\alpha_n H (-1)^n} e^{-i\alpha_n x_1} = \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{(-1)^n}{\alpha_n H} \cos \left(\pi n \frac{x_2}{H} \right) e^{-i\alpha_n x_1},$$

Окончательно

$$u = i \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{(-1)^n}{\alpha_n H} \cos \left(\pi n \frac{x_2}{H} \right) e^{-i\alpha_n x_1} \tag{20}$$

Дисперсионное уравнение имеет конечное число (N) вещественных корней и бесконечное множество чисто мнимых. Следовательно, волновое поле состоит из суперпозиции N бегущих волн и бесконечного множества экспоненциально затухающих волн.

2 Вынужденные плоские колебания слоя

Рассмотрим упругий слой, занимающий область

$$\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -H \le x_2 \le H\}$$

Предположим, что волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Для решения задачи будем использовать представления Ляме

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \tag{22}$$

Волновые потенциалы φ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2\varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2\psi = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=\pm H} = 0, \\ \sigma_{22}|_{x_2=H} = p^+(x_1), \\ \sigma_{22}|_{x_2=-H} = p^-(x_1) \end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $f(x_2)$, определенную на отрезке $[-H, H]$. Её можно разбить на две части:

$$f(x_2) = f^+(x_2) + f^-(x_2),$$

где

$$f^+(x_2) = \frac{1}{2}\left[f(x_2) + f(-x_2)\right],$$

$$f^{-}(x_2) = \frac{1}{2}\left[f(x_2) - f(-x_2)\right].$$

Таким образом, любую функцию можно разбить на симметричную и антисимметричную часть. Разобъём задачу о вынужденных колебаниях слоя на две:

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ — симметричная функция по x_2, $\psi(x_1, x_2)$ — антисимметричная функция по x_2, то есть

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, -x_2),$$
$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_1, -x_2)$$

В этом случае $u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}$ — симметричная функция по x_2, $u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}$ — антисимметричная функция по x_2.

$$\sigma_{12} = \mu\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)$$

— антисимметричная функция по x_2.

$$\sigma_{22} = \lambda\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu u_{2,2} = \lambda u_{1,1} + \left(\lambda + 2\mu\right) u_{2,2}$$

— симметричная функция по x_2.

Схематично напряжения в слое можно изобразить следующим образом:

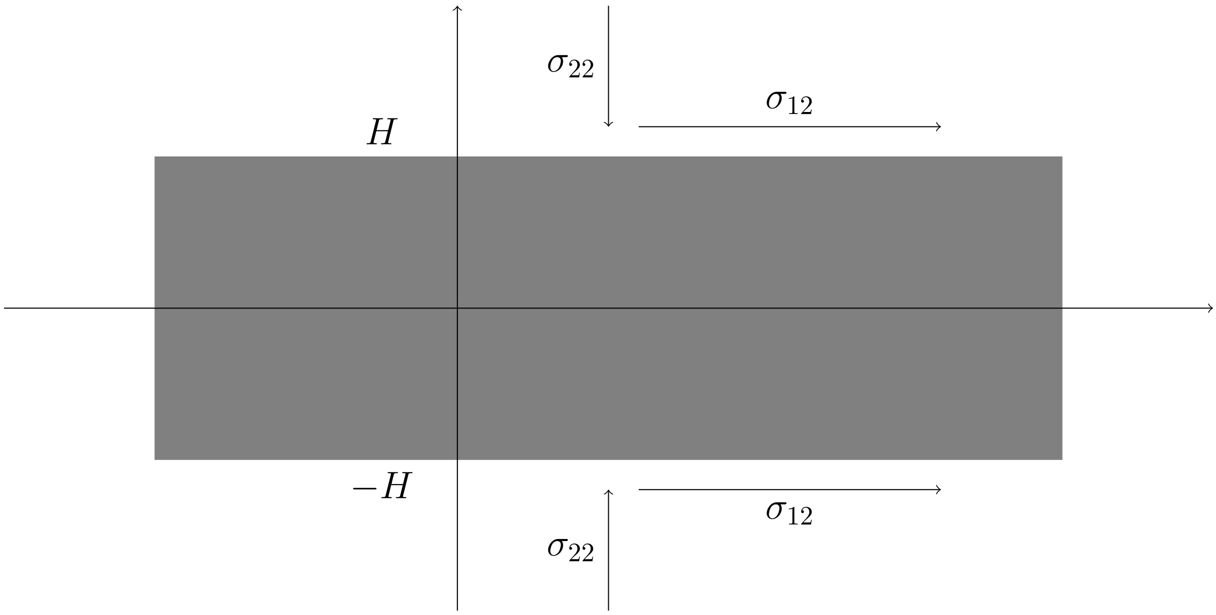

Рис. 1: Схема напряжений

Такая задача может быть истолкована как задача продольного растяжения-сжатия.

2. Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ — антисимметричная функция по x_2, $\psi(x_1, x_2)$ — симметричная функция по x_2, то есть

$$\varphi(x_1, x_2) = -\varphi(x_1, -x_2),$$
$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2)$$

В этом случае u_1 — антисимметричная функция по x_2, u_2 — симметричная функция по x_2, σ_{12} — симметричная функция по x_2, σ_{22} — антисимметричная функция по x_2. Схематично напряжения в слое можно изобразить следующим образом:

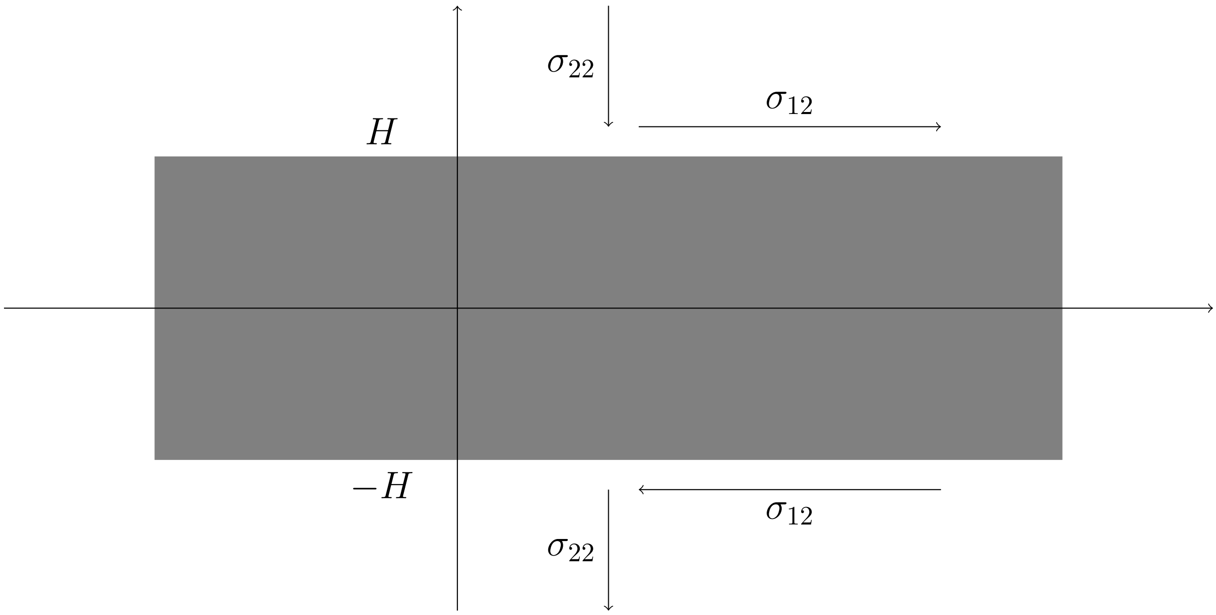

Рис. 2: Схема напряжений

Такая задача может быть истолкована как задача поперечного изгиба.

Рассмотрим симметричную задачу, считаем φ — симметричной функцией по x_2, ψ — антисимметричная функция по x_2.

Для решения задачи используем интегральное преобразование Фурье в виде

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1 \\ \tilde{\psi}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1 \end{cases}$$

Уравнения (23) приобретают вид:

$$\begin{cases} -\alpha^2 \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}'' + k_1^2 \tilde{\varphi} = 0, \\ -\alpha^2 \tilde{\psi} + \tilde{\psi}'' + k_2^2 \tilde{\psi} = 0, \end{cases} \tag{25}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'' - \left(\alpha^2 - k_1^2\right) \tilde{\varphi} = 0, \\ \tilde{\psi}'' - \left(\alpha^2 - k_2^2\right) \tilde{\psi} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Решение симметричной задачи строим в виде:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2, \\ \tilde{\psi} = B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha - k_i^2}$$

Найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -i\alpha\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}' = -i\alpha A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2, \\ \tilde{u}_2 = \tilde{\varphi}' + i\alpha\tilde{\psi} = A\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + i\alpha B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 \end{cases} \tag{28}$$

Найдём напряжения:

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu \left(\tilde{u}_1' - i\alpha u_2\right) = \mu \left(-i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2^2 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 - i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \alpha^2 B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2\right)$$

или

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu \left[-2i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \left(2\alpha^2 - k_2^2\right) B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2\right]$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_{22} = -i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\, \tilde{u}_2' = \\ &= -i\alpha\lambda \left(-i\alpha A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2\right) + (\lambda + 2\mu) \left(A\gamma_1^1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch} \gamma_2 x_2\right) \end{aligned}$$

Соберём множитель при $A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2$:

$$-\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\, \gamma_1^1 = -\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu) \left(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right) = \mu \left(2\alpha^2 - k_2^2\right),$$

Следовательно, σ_{22} приобретает вид:

$$\tilde{\sigma}_{22} = \mu \left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + 2i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch} \gamma_2 x_2\right]$$

Граничные условия для симметричной задачи имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}\big|_{x_2=H} = 0, \\ \sigma_{22}\big|_{x_2=H} = p(x_1), \end{cases} \tag{29}$$

$$p(x_1) = \frac{1}{2}\left[p^{+}(x_1) + p^{-}(x_1)\right]$$

В трансформантах граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} -2i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh}\gamma_1 H + \left(2\alpha^2 - k_2^2\right) B \operatorname{sh}\gamma_2 H = 0, \\ \left(2\alpha^2 - k_2^2\right) A \operatorname{ch}\gamma_1 H + 2i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch}\gamma_2 H = \tilde{p}_0(\alpha), \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\tilde{p}_0(\alpha) = \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Решаем систему (30):

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta}\left(2\alpha^2 - k_2^2\right)\operatorname{sh}\gamma_2 H \\ B = -\dfrac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta} 2i\alpha\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 H, \end{cases} \tag{31}$$

$$\Delta = 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_1 H \operatorname{ch}\gamma_2 H - \left(2\alpha^2 - k_2^2\right)^2 \operatorname{sh}\gamma_2 H \operatorname{ch}\gamma_1 H$$

Подставляем (31) в общее решение (28) и получаем:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = \dfrac{i\alpha\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta}\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right)\operatorname{sh}\gamma_2 H \operatorname{ch}\gamma_1 x_2 - 2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_1 H \operatorname{ch}\gamma_2 x_2\right], \\ \tilde{u}_2 = -\dfrac{\gamma_1\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta}\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right)\operatorname{sh}\gamma_2 H \operatorname{sh}\gamma_1 x_2 - 2\alpha^2 \operatorname{sh}\gamma_1 H \operatorname{sh}\gamma_2 x_2\right] \end{cases} \tag{32}$$

Осталось только обратить преобразование Фурье:

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1(\alpha,x_1)e^{-i\alpha x_1}d\alpha, \\ \tilde{u}_2(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_2(\alpha,x_1)e^{-i\alpha x_1}d\alpha \end{cases} \tag{33}$$

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения (33). Они определяются уравнением

$$\Delta(\alpha,\omega) = 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_1 H \operatorname{ch}\gamma_2 H - \left(2\alpha^2 - k_2^2\right)^2 \operatorname{sh}\gamma_2 H \operatorname{ch}\gamma_1 H \tag{34}$$

Дисперсионное уравнение (34) называется уравнением Релея-Лэмба. Рассмотим его при $\alpha = 0$:

$$\Delta(\alpha,\omega) = -k_2^4 \operatorname{sh}\sqrt{-k_2^2}H \operatorname{ch}\sqrt{-k_1^2}H = -k_2^4 i \sin k_2 H \cos k_1 H \tag{35}$$

Уравнение (35) распадается на множители:

$$\sin k_2 H = 0,\ \cos k_1 H = 0.$$

Решаем эти уравнения:

$$k_2 H = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$$

следовательно

$$\omega_n^{(1)} = \frac{\pi n c_2}{H}$$

$$k_1 H = \frac{\pi(2n+1)}{2},\ n \in \mathbf{Z}$$

и

$$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi(2n+1)c_1}{2H}$$

$\omega_n^{(1)}$ и $\omega_n^{(2)}$ образуют два семейства критических частот. В дальнейшем считаем, что частота не совпадает ни с одной из критических.

Свойства дисперсионного уравнения

1. $\Delta(\alpha, \omega)$ — аналитическая функция по α и ω;

2. $\Delta(\alpha, \omega)$ — симметричная по α и ω. Если α — корень дисперсионного уравнения. то корнями также являются $-\alpha$, $\bar{\alpha}$, -$\bar{\alpha}$.

3. Каждая из дисперсионых кривых пересекает ось абсцисс под прямым углом;

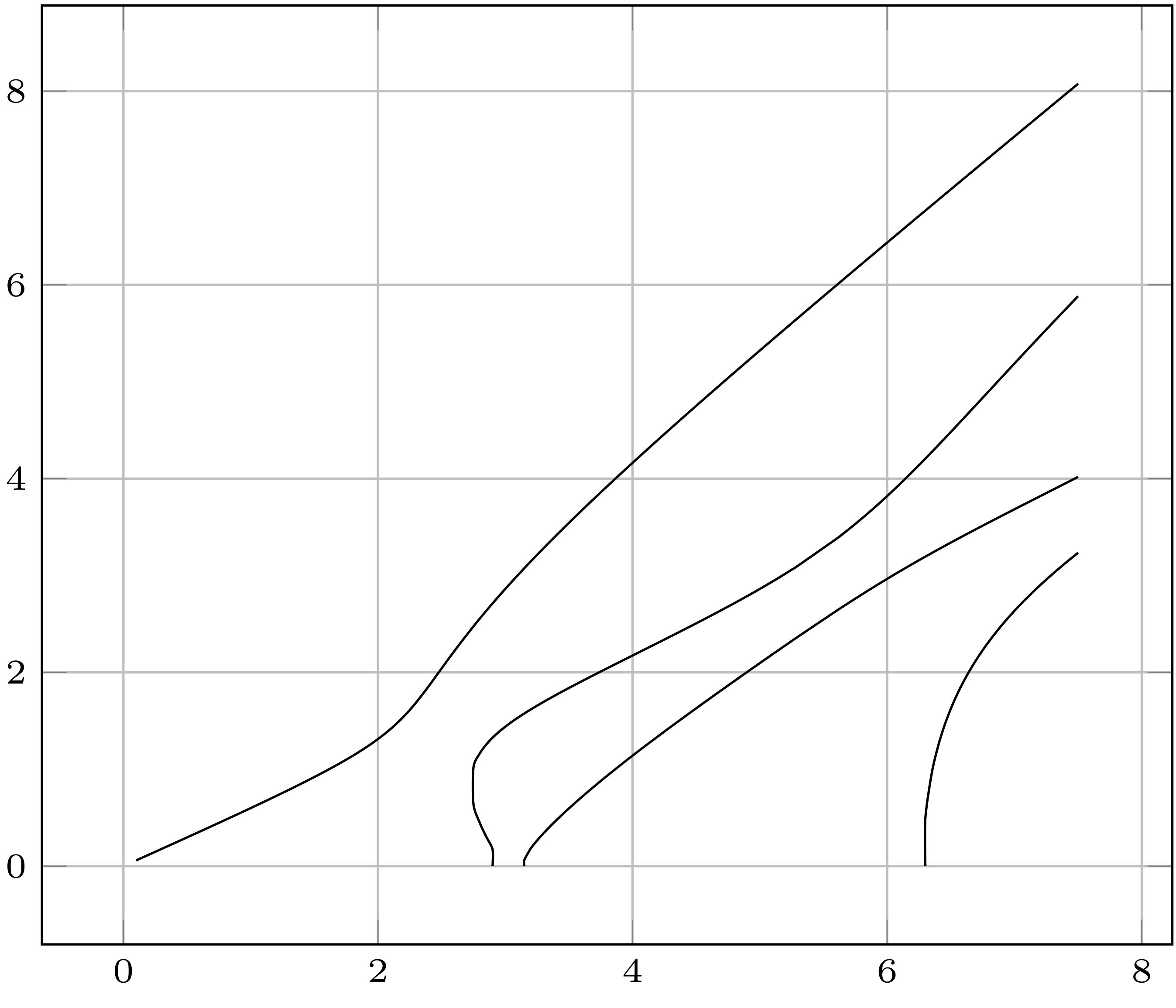

Рис. 3: График дисперсионных кривых. Вертикальная ось соответствует α, горизонтальная — $k_2 = \omega/c_2$

Подынтегральные выражения (33) имеют конечное число вещественных полюсов первого порядка и бесконечное множество комплексных.

Воспользуемся принципом предельного поглощения. Добавим в уравнения колебаний слагаемые, характеризующие вязкое трение. При этом ω заменяется на $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Каждый из корней дисперсионного уравнения зависит от частоты колебаний:

$$\alpha = \alpha(\omega),$$

Если α и ω являются комплексными величинами ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$), то из соотношений Коши-Римана следует, что

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_2}$$

Из последнего равенства при $\omega_2 > 0$ следует, что

$$\mathrm{sgn}\alpha_2 = \mathrm{sgn}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1}$$

и направление смещения корней при добавлении в уравнении слагаемых, характеризующих вязкое трение, зависит от угла наклона дисперсионной кривой. Разделяют следующие случаи:

1. Первый регулярный случай.

   Дисперсионное уравнение имеет N положительных вещественных корней, для каждого из которых

   $$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} > 0$$

   В этом случае все положительные вещественные корни смещаются в верхнюю полуплоскость, отрицательные — в нижнюю. Контур интегрирования по вещественной оси заменяется на контур σ всюду, за исключением окрестностей полюсов подынтегральной функции, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. При этом положительные корни дисперсионного уравнения огибаются в нижней полуплоскости, отрицательные — в верхней. Поле перемещений при этом складывается из суперпозиции N бегущих волн, распространяющихся на бесконечность от источника колебаний и бесконечного мможества затухающих волн.

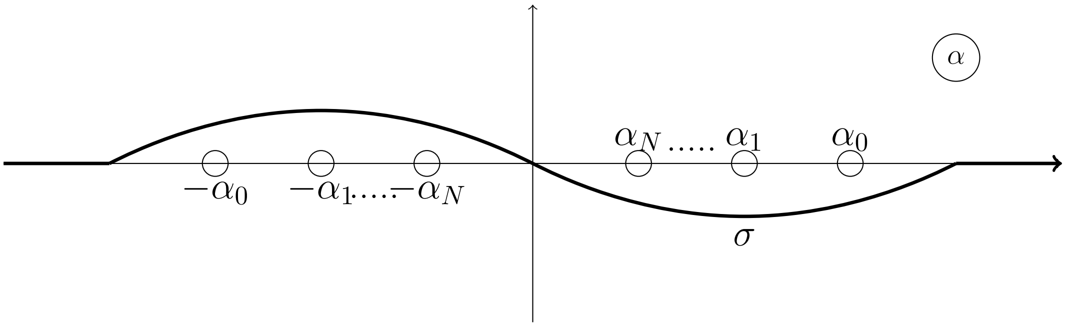

Рис. 4: Контур интегрирования

2. Второй регулярный случай

Дисперсионное уравнение имеет $N-1$ положительный вещественный корень, для каждого из которых

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} > 0$$

и ещё один положительный вещественный корень, наименьший по величине, для которого

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} < 0$$

Положительные вещественные корни отклоняются в верхнюю полуплоскость, за исключением наименьшего, который отклоняется в нижнюю полуплоскость.

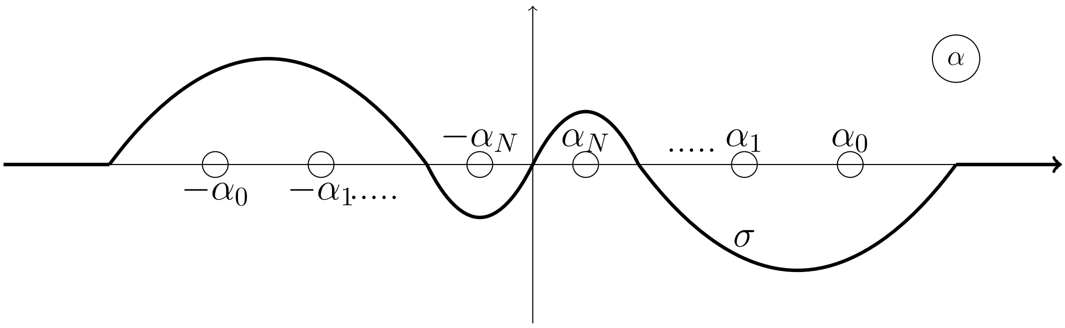

Рис. 5: Контур интегрирования

Контур интегрирования по вещественной оси заменяется на контур σ всюду, за исключением окрестностей полюсов подынтегральной функции, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. При этом положительные корни дисперсионного уравнения огибаются в нижней полуплоскости, за исключением наименьшего, который огибается в верхней. Отрицательные корни дисперсионного уравнения огибаются в верхней полуплоскости, за исключением наименьшего по абсолютной величине, который огибается в верхней. Поле перемещений при этом складывается из суперпозиции $N-1$ бегущей волны, распространяющихся на бесконечность от источника колебаний, одной волны, идущей из бесконечности к источнику колебаний, и бесконечного ммножества затухающих волн.

Возникновение обратной волны также называют аномальной дисперсией волн.

3. Нерегулярный случай.

Существует корень дисперсионного уравнения, для которого

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = 0$$

— каждый раз требует отдельного рассмотрения.