

Марковские процессы

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-04-15

Рассмотрим примеры составления уравнений Колмогорова. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = m\xi(t) \quad (1)$$

где $m, \alpha — const$, $\xi(t)$ — белый шум ($S_\xi(\omega) = const$), т.е. корреляционная функция $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$, $M_\xi = 0$.

Уравнение (1) служит хорошей моделью многих физических процессов, например, процессов типа броуновского движения.

Если $\xi(t)$ — белый шум, то U , удовлетворяющее уравнению (1), является Марковским процессом, и ее плотность распределения удовлетворяла дифференциальному уравнению Колмогорова, для этого нам необходимо определить функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$.

$$\begin{aligned}
 a(t, x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) f(t, x; t + \Delta, z) dz = \left| \begin{array}{l} t + \Delta = \tau \\ z = y \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[Y - X | X = x] = \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[U(t + 0) | U(t) = x] \\
 b(t, x) &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[(Y - X)^2 | X = x]
 \end{aligned}$$

Для определения a , b проинтегрируем (1) в пределах $(t, t + \Delta)$

$$\Rightarrow \int_t^{t+\Delta} \frac{dU}{dt} dt + \alpha \int_t^{t+\Delta} U dt = m \int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \Rightarrow$$

$$U(t + \Delta) - U(t) = -\alpha \int_t^{t+\Delta} U dt + m \int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \quad (2)$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей

$$M[U(t + \Delta) - U(t)] = M \left[-\alpha \int_t^{t+\Delta} U dt + m \int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \right]$$

Осуществим предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$ и поделим обе части на $\Delta \Rightarrow$ т.к. $a(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M[U(t + \Delta) | U(t) = x] \Rightarrow$

используем свойство линейности математического ожидания

$$a(t, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[-\alpha M \int_t^{t+\Delta} U(t_1) dt_1 + m \int_t^{t+\Delta} M [\xi(t_1)] dt_1 \right],$$

где $M [\xi(t_1)] dt_1 = 0$ для вычисленного интеграла используем теорему о среднем (при $\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta} U(t_1) dt_1 &= U(t') [t + \Delta - t] \big|_{t' \in [t, t+\Delta]} = \\ &= U(t') \Delta \big|_{\Delta \rightarrow 0, t' \rightarrow t \Rightarrow U(t') \rightarrow U(t) = x} = \Delta x \\ a(t, x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M [-\alpha \Delta x] = -\alpha x \end{aligned}$$

Для определения коэффициента $b(x, t)$, возведем в квадрат (2) и возьмем математическое ожидание

$$M \left[(U(t + \Delta) - U(t))^2 | U(t) = x \right] =$$

$$= M \left[m^2 \left(\int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \right)^2 + \alpha^2 \left(\int_t^{t+\Delta} U dt \right)^2 - 2\alpha m \int_t^{t+\Delta} U dt \int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
b(t, x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M \left[m^2 \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} \xi(t_1) \xi(t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\
&\quad \left. + \alpha^2 \int_t^{t+\Delta} U(t_1) dt_1 \int_t^{t+\Delta} U(t_2) dt_2 - 2\alpha m \int_t^{t+\Delta} U(t_1) dt_1 \int_t^{t+\Delta} \xi(t_2) dt_2 \right] = \\
&= m^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{M}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} \xi(t_1) \xi(t_2) dt_1 dt_2 \stackrel{\text{Т.К. } M[\xi]=0}{=} \\
&= m^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} K_\xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\
&= m^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} K_\xi(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \\
&= m^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = m^2
\end{aligned}$$

$$b(t, x) = m^2$$

Таким образом $a(t, x)$, $b(t, x)$ не зависят от $t \Rightarrow$ получили стационарный случай для уравнения Колмогорова (если $a(t, x) = a(x)$, $b(t, x) = b(x)$, то можно считать, что $f = f(x)$). Воспользуемся вторым уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial y}(af) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(bf) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ af - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}(bf) \right\} = 0$$

$$af - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}(bf) = 0 = \text{const}$$

Так как при $|y| \rightarrow \infty$ $f \rightarrow 0$, тогда устремляем $|y| \rightarrow \infty \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$$-\alpha y f - \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{f} = -\frac{2\alpha y}{m^2} \partial y$$

$$\ln f = -\frac{2\alpha}{m^2} \frac{y^2}{2} + \ln C$$

$$f = C e^{-\frac{\alpha}{m^2} y^2} \quad (3)$$

Осталось найти C , из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\dots) dy = 1 \Rightarrow C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{m^2} y^2} dy = 1$$

(сделаем замену $\frac{\sqrt{\alpha}}{m} y = t \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}}{m} dy = dt \Rightarrow$)

$$\frac{m}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 \Rightarrow C = \frac{\sqrt{\alpha}}{m\sqrt{\pi}}$$

$f(y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{m\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha}{m^2} y^2}$ — нормальный закон распределения.

Пример. Рассмотрим тело массы m , которое движется горизонтально под действием силы $R = R_0 + \Delta R$, где R_0 – номинальное значение силы тяги, ΔR – случайная составляющая. Сила сопротивления среды $F(v)$.
Уравнение движения тела

$$m\dot{v} = R_0 + \Delta R - F(v)$$

Случайная функция ΔR представляет собой процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией типа:

$$m(\Delta R) = 0, \quad K_{\Delta R} = \sigma_{\Delta R}^2 \delta(t - t_1)$$

Определить установившееся распределение вероятностей $f(v_1)$ и v_1 . Положим, что $v = v_0 + v_1$, v_1 – разброс скорости, вызванный действием ΔR . Разложим $F(v)$ в ряд, вблизи $v = v_0$ считая, что сила сопротивления является нечетной от v_1

$$F(v) = F(v_0) + \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=v_0} (v - v_0) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \Big|_{v=v_0} (v - v_0)^3 + \dots$$

В результате (из уравнения движения) получаем следующее уравнение:

$$\dot{v}_1 + F_1(v_1) = \xi(t); \quad \dot{v}_0 + \frac{F(v_0)}{m} = \frac{R_0}{m}$$

где $F_1(v_1) = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=v_0} v_1 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \Big|_{v=v_0} v_1^3 \right)$, $\xi(t) = \frac{\Delta R}{m}$

Для определения коэффициентов a и b уравнения Колмогорова проинтегрируем последнее выражение в пределах от t до $t + \Delta$

$$v_1(t + \Delta) - v_1(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v_1) dt + \int_t^{t+\Delta} \xi(t) dt \quad (*)$$

Рассмотрим математическое ожидание от обеих частей

$$M[v_1(t + \Delta) - v_1(t)] = -M[F_1(v_1)\Delta] + M\left[\int_t^{t+\Delta} \xi(t)dt\right]$$

Поделим обе части на Δ и осуществим предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$

$$a(t, v_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M[v_1(t + \Delta) - v_1(t)] = -F_1 + \int_t^{t+\Delta} m_\xi(t)dt, \quad m_\xi(t) = 0$$

Для определения коэффициента $b(v, t)$, рассмотрим квадрат математического ожидания от (*)

$$\begin{aligned}
M \left[(v_1(t + \Delta) - v(t))^2 \right] &= M \left[\left(-F_1(v_1)\Delta + \int_t^{t+\Delta} \xi(t_1) dt_1 \right)^2 \right] = \\
&= F_1^2(v_1)\Delta^2 - 2F_1(v_1)\Delta \int_t^{t+\Delta} m_\xi dt_1 + \\
&+ \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} M [\xi(t_1)\xi(t_2)] dt_1 dt_2 = \\
&= F_1^2(v_1)\Delta^2 - 2F_1(v_1)m_\xi\Delta^2 + \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{m^2} \int_t^{t+\Delta} \int_t^{t+\Delta} \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \\
&= F_1^2(v_1)\Delta^2 - 2F_1(v_1)m_\xi\Delta^2 + \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{m^2} \Delta
\end{aligned}$$

Деля на Δ и осуществляя предельный переход при $\Delta \rightarrow 0$ получим

$$b = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(F_1^2(v_1) \Delta^2 - 2F_1(v_1)m_\xi \Delta^2 + \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{m^2} \Delta \right) = \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{m^2} \Delta$$

$$a = -F_1(v_1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sigma_{\Delta R}^2}{m^2} = \sigma^2$$

Тогда второе уравнение Колмогорова для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 f}{dv_1^2} + \frac{d}{dv_1} [F_1(v_1)f] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{df}{dv_1} + F_1(v_1)f = \text{const}$$

C — определяем из условия убывания $f \xrightarrow{|v_1| \rightarrow \infty} 0$ (т.е. предполагаем, что вероятность появления больших значений v_1 мала, поэтому плотность вероятности должна удовлетворять условию $f(v_1) \xrightarrow{|v_1| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\frac{\sigma^2}{2} \frac{df}{dv_1} + F_1(v_1)f = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{df}{f} = -\frac{2F_1(v_1)}{\sigma^2} dv_1 \Rightarrow \ln f = -\frac{2}{\sigma^2} \int F_1(v_1) dv_1 \Rightarrow f = C_1 e^{-\frac{2}{\sigma^2} \int F_1(v_1) dv_1}$$

C_1 — определяем из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f dv_1 = 1$, например, при

$F_1 = a_1 v_1 + a_2 v_1^3$ имеем $f = C_1 e^{-\frac{2}{\sigma^2} \left(a_1 \frac{v_1^2}{2} + a_2 \frac{v_1^4}{4} \right)}$, если $a_2 = 0$ — нормальный закон распределения, если $a_2 \neq 0$ — не является нормальным законом распределения.

Как указывалось выше, для того, чтобы процесс был Марковским, необходимо, чтобы поведение процесса в момент $t > t_0$ зависело только от значений случайной функции $X(t)$ в момент t_0 .

Возникает вопрос, какие механические системы удовлетворяют этому условию, т.е. поведение каких механических систем во времени целиком определяется начальным положением системы.