Домашнее задание:

1) ЕГЭ-2023

Решите неравенство $\log_{0,1}(x^3-5x^2-25x+125) \leqslant \log_{0,01}(x-5)^4$.

ОТВЕТ: $[-4;5)\cup(5;+\infty)$

$$\log_{0,1}(x^3-5x^2-25x+125) \le \frac{1}{2}\cdot\log_{0,1}(x-5)^4$$

$$\log_{0,1}(x^3-5x^2-25x+125) \le \log_{0,1}(x-5)^2$$

$$\begin{cases} x^3-5x^2-25x+125>0 \\ x\ne 5 \\ x^3-5x^2-25x+125 \geqslant (x-5)^2 \end{cases}$$

1) $x^3-5x^2-25x+125>0$

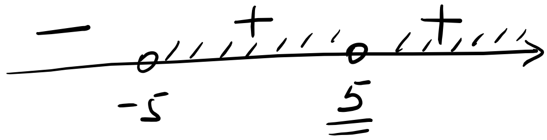
$\underbrace{x^3-5x^2}\underbrace{-25x+125}=0$

$x^2(x-5)-25(x-5)=0$

$(x-5)(x^2-25)=0$

$(x-5)(x-5)(x+5)=0$

$(x-5)^2(x+5)=0$



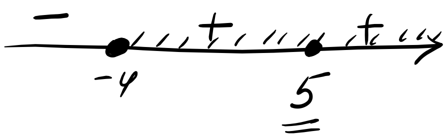
2) $x^3-5x^2-25x+125 \geqslant (x-5)^2$

$(x-5)^2(x+5) \geqslant (x-5)^2$

$(x-5)^2(x+5)-(x-5)^2 \geqslant 0$

$(x-5)^2(x+5-1) \geqslant 0$

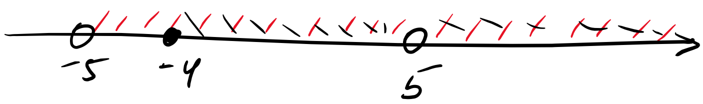
$(x-5)^2(x+4) \geqslant 0$



$$\begin{cases} -5<x<5, \quad x>5 \\ x\ne 5 \\ x\geqslant -4 \end{cases}$$

$-4\le x<5, \quad x>5$

Ответ: $[-4;5)\cup(5;+\infty)$



2) ЕГЭ-2018

Решите неравенство $\log_{x^2+1}\dfrac{2\cdot 4^x-15\cdot 2^x+23}{4^x-9\cdot 2^x+14}\geqslant 0.$

ОТВЕТ: $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup\{\log_2 3\}\cup(\log_2 7\,;+\infty)$

$\log_a x \quad a>0,\ a\neq 1,\quad x>0$

$\log_a 1=0$

Решение

$$\log_{x^2+1}\frac{2\cdot 4^x-15\cdot 2^x+23}{4^x-9\cdot 2^x+14}\geqslant \log_{x^2+1}1$$

$x^2\geqslant 0 \Rightarrow x^2+1\geqslant 1$ для любого $x\in\mathbb{R}$

с учетом ОДЗ основания log : $x^2+1>1$ $(x\neq 0)$

$$\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4^x-15\cdot 2^x+23}{4^x-9\cdot 2^x+14}>0\\[2ex] \dfrac{2\cdot 4^x-15\cdot 2^x+23}{4^x-9\cdot 2^x+14}\geqslant 1\end{cases}$$

Замена : $t=2^x>0$

$$\begin{cases}\dfrac{2t^2-15t+23}{t^2-9t+14}>0\\[2ex] \dfrac{2t^2-15t+23}{t^2-9t+14}\geqslant 1\end{cases}$$

1) $\dfrac{2t^2-15t+23}{t^2-9t+14}>0$

найдем нули числителя и знаменателя:

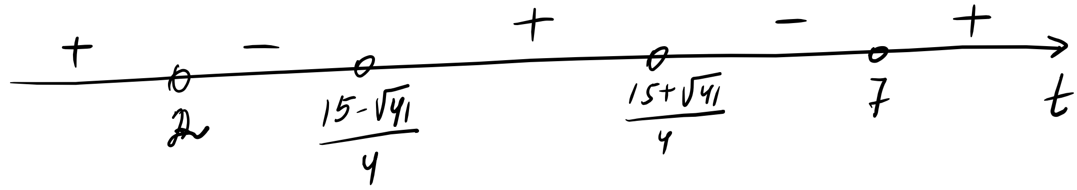
$2t^2-15t+23=0$

$D=(-15)^2-4\cdot 2\cdot 23=225-184=41$

$t_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{41}}{4}$

$t^2-9t+14=0$

$t_1=2,\ \ t_2=7$



$t<2,\quad \dfrac{15-\sqrt{41}}{4}<t<\dfrac{15+\sqrt{41}}{4},\quad t>7$

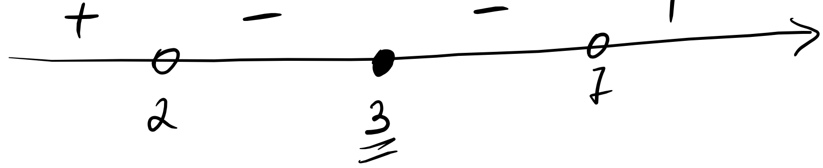
2) $\dfrac{2t^2-15t+23}{t^2-9t+14}\geq 1$

$\dfrac{2t^2-15t+23-(t^2-9t+14)}{t^2-9t+14}\geq 0$

$\dfrac{t^2-6t+9}{t^2-9t+14}\geq 0$

$t^2-6t+9=0 \quad\Rightarrow\quad (t-3)^2=0$

$t_1=t_2=3$

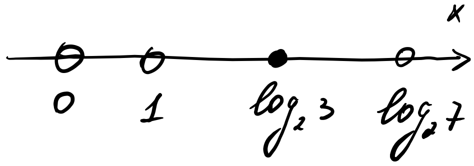


$t<2,\ t=3,\ t>7$

$$\begin{cases} t<2,\ \dfrac{15-\sqrt{41}}{4}<t<\dfrac{15+41}{4},\ t>7 \\ t<2,\ \ t=3,\ \ t>7 \end{cases}$$

$t<2,\ \ t=3,\ \ t>7$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x < 2 \\ 2^x = 3 \\ 2^x > 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x = \log_2 3 \\ x > \log_2 7 \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0;1) \cup \{\log_2 3\} \cup (\log_2 7; +\infty)$

13.4. [А. Ларин] а) Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x - \sin 5x} = -2\cos x$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$.

Решение а)

$$\begin{cases} -2\cos x \geq 0 \\ \cos 2x - \sin 5x = 4\cos^2 x \end{cases}$$

$$\cos 2x - \sin 5x - 4\cos^2 x = 0$$

$$\cos 2x - \sin 5x - 4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$

$$\cos 2x - \sin 5x - 2 - 2\cos 2x = 0$$

$$-\sin 5x - \cos 2x = 2$$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ $\qquad$ $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$1 \geq -\sin\alpha \geq -1$ $\qquad$ $1 \geq -\cos\alpha \geq -1$

$-1 \leq -\sin\alpha \leq 1$ $\qquad$ $-1 \leq -\cos\alpha \leq 1$

$$-2 \leq -\sin\alpha + (-\cos\alpha) \leq 2$$

$-\sin 5x = 1$ $\qquad$ $-\cos 2x = 1$

$\sin 5x = -1$ $\qquad$ $\cos 2x = -1$

- - - - - . . .