

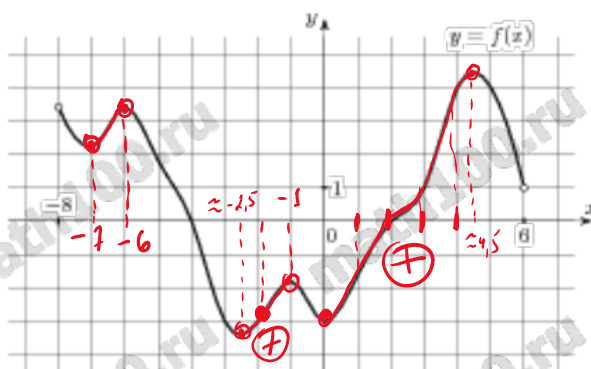
ПРОИЗВОДНЫЕ

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ возрастает $\uparrow$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ убывает $\downarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ max / min

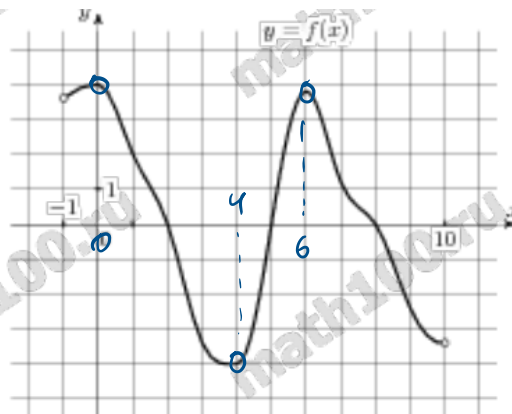
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



В $-2, 1, 2, 3, 4$ $f(x)$ растет $\Rightarrow$ здесь $f'(x) > 0$

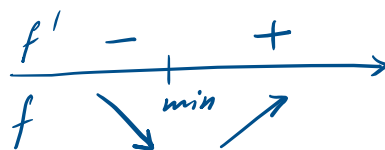
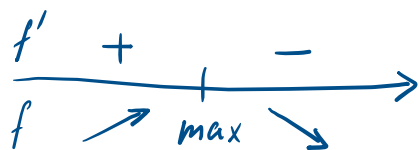
Ответ: 5

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

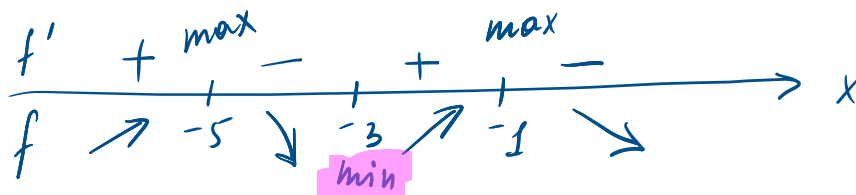
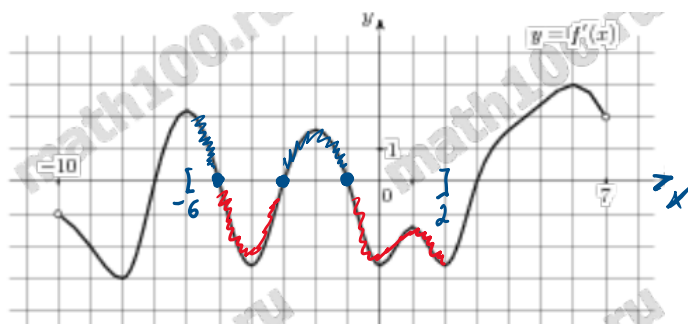


Ответ: 6 (1, 2, 3, 7, 8, 9)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \text{ext}$$

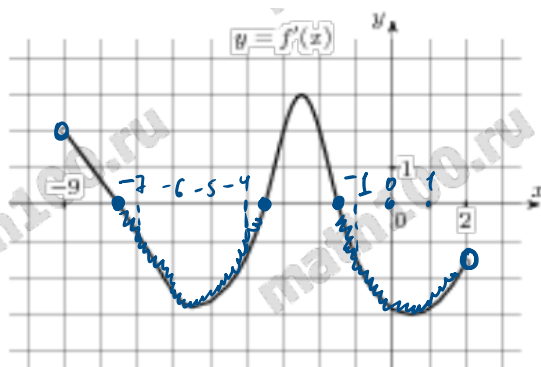


На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 2]$.



Ответ: 1

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 2)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

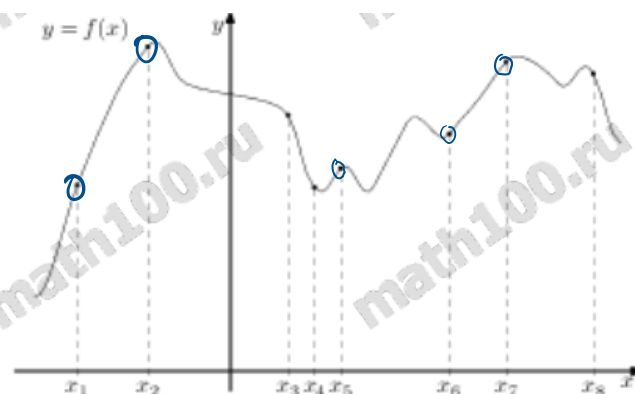


$$f(x) \text{ убывает} \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

$$\underline{-7} - \underline{6} - \underline{5} - \underline{4} - \underbrace{-1 + 0 + 1}_0 = -10 - 12 = -22$$

Ответ: -22

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

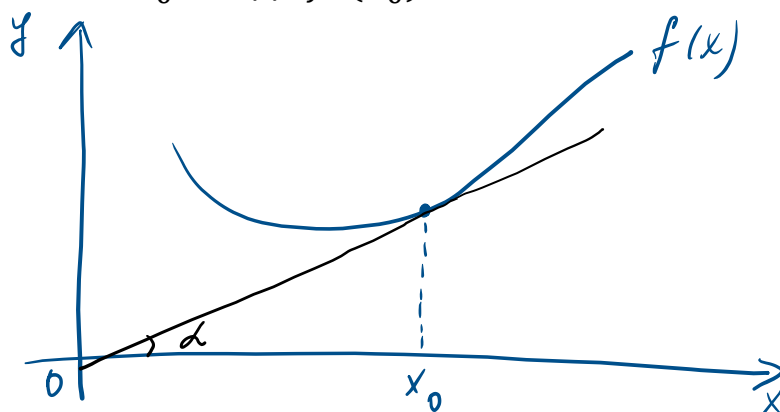


$$f(x) \text{ возр} \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

(5)

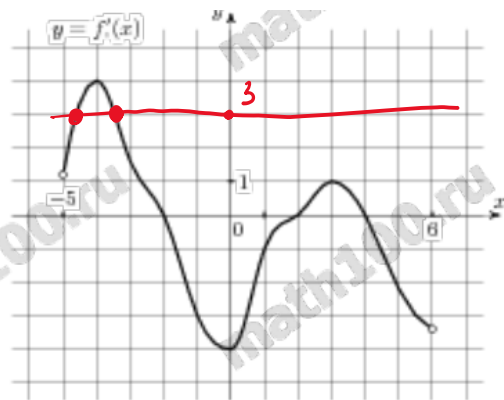
Геометрический смысл производной

Пусть $y = kx + b$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 . Тогда $f'(x_0) = k$.



$$\operatorname{tg} \alpha = k = f'(x_0)$$

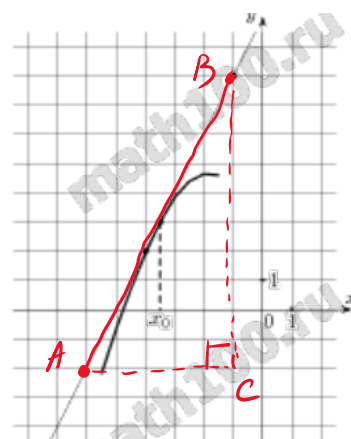
На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 19$ или совпадает с ней.



$$y = 3x + b \Rightarrow k = 3 \Rightarrow f'(x) = 3 \quad x = ?$$

(2)

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

$$f'(x_0) = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{Ответ: } 2$$

Правила дифференцирования (вычисления производных)

$$① \quad C' = 0, \quad C \equiv \text{const}$$

$$② \quad (x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

$$x' = 1 \quad (x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1)$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$③ \quad (C \cdot x^p)' = C p x^{p-1}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(C \cdot x^p)' = \underbrace{C'}_0 \cdot x^p + C \cdot (x^p)' = C \cdot p x^{p-1}$$

$$(3x^2)' = 6x \quad ((3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x)$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3} \cdot x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$(-0,2x^4)' = -0,2 \cdot 4x^3 = -0,8 \cdot x^3$$

$$(4) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(x^5 + x^4)' = (x^5)' + (x^4)' = 5x^4 + 4x^3$$

$$(x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$$

$$(x^2 + 4x - 12)' = 2x + 4$$

$$(x^2 + 4x - 12)' = (x^2)' + (4x)' - 12' = 2x + 4 \cdot \underbrace{1 \cdot x^0}_{=1} - 0$$

$$(5) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(6) \quad \left(\frac{1}{x^p}\right)' = (x^{-p})' = -p \cdot x^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}}$$

$$\left(\sqrt[m]{x^n}\right)' = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \underbrace{\ln e}_1} = \frac{1}{x}$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln e = \log_e e = 1$$

$$(\sin x)' = \cos x ; (\cos x)' = -\sin x$$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \text{ext}$$

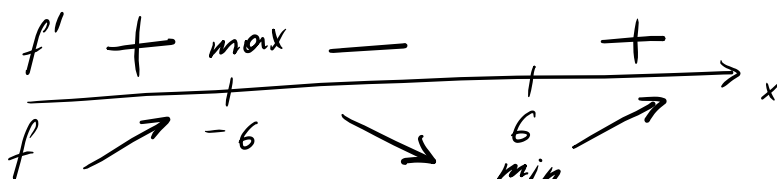
$$f(x) = x^3 - 108x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 108$$

$$3x^2 - 108 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$



$$x - \text{max} = -6$$

Ответ: -6

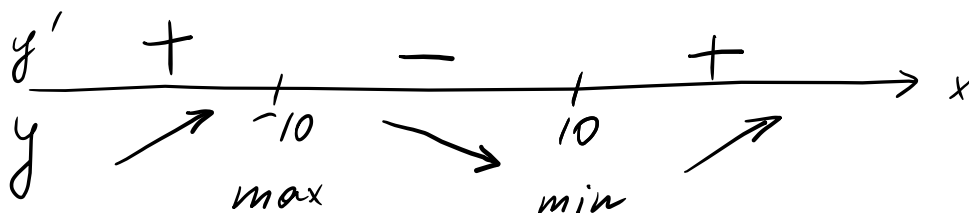
Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 300x + 19$

$$y' = (x^3 - 300x + 19)' = 3x^2 - 300$$

$$y' = 0: 3x^2 - 300 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

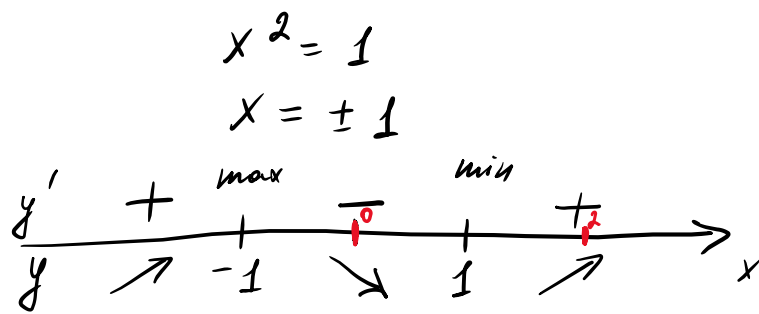


Ответ: 10

Найдите **наименьшее значение функции** $y = x^3 - 3x + 23$ на отрезке $[0; 2]$

$$y' = (x^3 - 3x + 23)' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0: 3x^2 - 3 = 0 \quad | :3$$



$$x_{\min} = 1 \in [0; 2]$$

$$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 23 = 21$$

Ответ: 21

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$

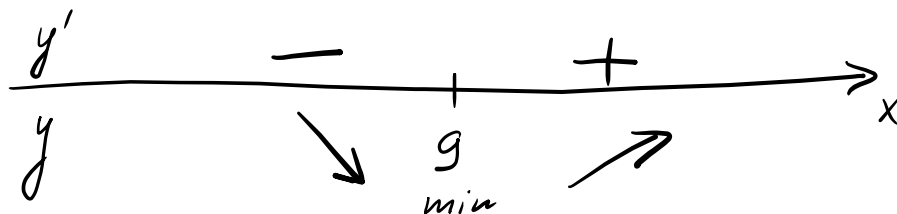
$$y' = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot 1 + 0$$

$$y' = \sqrt{x} - 3$$

$$y' = 0: \quad \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$



$$x_{\min} \in [1; 9] \Rightarrow x_{\min} = 9$$

$$y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = \frac{2}{3} \cdot 3^{2 \cdot \frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 26 = 2 \cdot 3^2 - 26 = 18 - 26 = -8 - \text{other}$$

Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 6x - x\sqrt{x}$ на отрезке $[14; 23]$

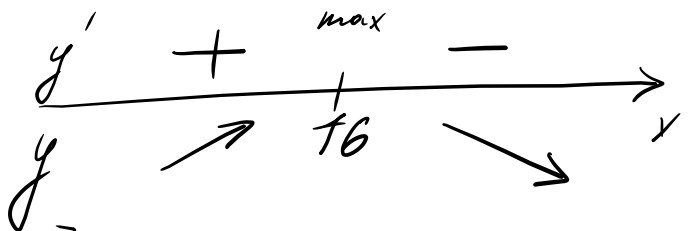
$$y = 5 + 6x - x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5 + 6x - x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = (5 + 6x - x^{\frac{3}{2}})' = 0 + 6 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$6 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$4 - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 16$$



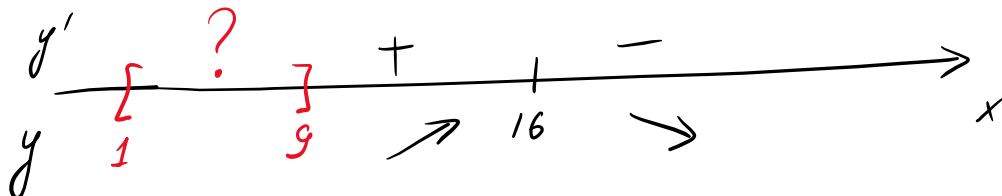
$$x_{\max} = 16 \in [14; 23]$$

$$\begin{aligned} y(16) &= 5 + 6 \cdot 16 - 16 \cdot \sqrt{16} = \\ &= 5 + \underline{6 \cdot 16} - \underline{4 \cdot 16} = 5 + 2 \cdot 16 = 5 + 32 = 37 \end{aligned}$$

Ответ: 37

Найти наибольшее значение функции $y = 5 + 6x - x\sqrt{x}$ на отрезке $[1; 9]$.

$$y' = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x} ; \quad x_{\text{ext}} = 16$$



$$y(1) = 5 + 6 \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{1} = 11 - 1 = 10$$

$$y(9) = 5 + 6 \cdot 9 - 9 \cdot \sqrt{9} = 5 + 54 - 9 \cdot 3 = 59 - 27 = 32$$

Ответ: 32

Прямая $y = 8x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

$$y = 8x + b \text{ - касательная} \Rightarrow k = 8$$

$$y'(x_0) = 8$$

$$y' = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3$$

$$2x_0 - 3 = 8$$

$$2x_0 = 11$$

$$x_0 = 5,5$$

Физический смысл производной

$S(t)$, t - время движения
 S - путь движения

$$v(t) = S'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 4t + 15$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

$$v(t) = x'(t)$$

$$v(t) = \left(-\frac{1}{3}t^2 + 4t + 15\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 2t + 4 = -\frac{2}{3}t + 4$$

$$v(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = -2 + 4 = 2 \quad \text{Ответ: } 2$$