

- 5 Стрелок стреляет по трём мишеням. Вероятность попадания в мишень первым выстрелом равна 0,5. Если стрелок промахнулся, он может выстрелить по мишени второй раз. Вероятность попадания в мишень вторым выстрелом равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно одну мишень из трёх.

Ответ: _____.

$$P(\text{попал с 1 раза}) = 0,5$$

$$P(\text{промах 1 выстрела}) = 0,5$$

$$P(\text{попал со 2 раза}) = 0,6$$

$$P(\text{промах 2 выстрела}) = 0,4$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc} \textcircled{V} & \textcircled{XX} & \textcircled{XX} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \textcircled{XV} & \textcircled{XX} & \textcircled{XX} \end{array} \\
 P = & \left(\underbrace{0,5}_I \cdot \underbrace{0,5 \cdot 0,4}_{II} \cdot \underbrace{0,5 \cdot 0,4}_{III} + \underbrace{0,5 \cdot 0,6}_I \cdot \underbrace{0,5 \cdot 0,4}_{II} \cdot \underbrace{0,5 \cdot 0,4}_{III} \right) \cdot 3 = \\
 = & 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,5 (1 + 0,6) = 3 \cdot 1,6 \cdot 0,5^3 \cdot 0,4^2 = \\
 = & 4,8 \cdot 0,125 \cdot 0,16 = 0,6 \cdot 0,16 = 0,096
 \end{aligned}$$

- 5 Из 10 билетов 2 являются выигрышными. Наугад берут 4 билета. Найдите вероятность того, что среди них окажется ровно один выигрышный. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

+ - - - - + - - - - + - - - - +

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} + \dots$$

$$= 4 \cdot \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\begin{array}{r}
 80 \overline{) 15} \\
 \underline{75} \\
 50 \\
 \underline{45} \\
 5
 \end{array}$$

$$P \approx 0,53$$

5

По условиям лотереи каждый пятый билет является выигрышным. Какое наименьшее количество билетов нужно купить, чтобы среди них с вероятностью больше, чем 0,5, оказался выигрышный билет?

Ответ: _____.

$$P(\text{выигр}) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P(\text{проигр.}) = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$P(1 \text{ билет}) = 0,2 \quad (+)$$

$$P(2 \text{ билета}) = 0,8 \cdot 0,2 \quad (+)$$

$$P(3 \text{ билета}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,8^2 \cdot 0,2 \quad (+)$$

$$P(4 \text{ билета}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,8^3 \cdot 0,2 \quad (+)$$

$$P(5 \text{ билетов}) = 0,8^4 \cdot 0,2 \quad (-)$$

...

$$P_{\text{общ}} = 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 0,8^3 \cdot 0,2 + \cancel{0,8^4 \cdot 0,2} + \dots > 0,5$$

$0,8 \cdot 0,2 = 0,16$

$$P_{\text{общ}} = 0,36 + \cancel{0,64 \cdot 0,2} + \cancel{0,64 \cdot 0,16} + \cancel{0,64 \cdot 0,16 \cdot 0,2} + \dots > 0,5$$

$64 \cdot 64 \cdot 2 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot 2 = 2^{13}$

$\begin{array}{r} 64 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$ $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$ $\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ $2^4 \cdot 2^3 = 2^7 = 128$ $\begin{array}{r} 128 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$ $2^7 \cdot 2^6 = 2^{13} = 1024 \cdot 8 = 8192$

$$P_{\text{общ}} = 0,36 + 0,128 + 0,1024 + \cancel{0,08192} + \dots > 0,5$$

$$P_{\text{общ}} = 0,488 + 0,1024 + \cancel{0,08192} + \dots > 0,5$$

$$P_{\text{общ}} = 0,5904 + \cancel{0,08192} + \dots > 0,5$$

Ответ: 4

5

На двух линиях выпускают одинаковые лампы. Первая линия выпускает в три раза больше ламп, чем вторая, но вероятность брака на первой линии равна 0,1, а на второй — 0,06. Все лампы поступают на склад. Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа на складе окажется не бракованной.

Ответ: _____

$$P = \frac{\text{кол-во брак.}}{\text{все лампы}}$$

I линия

3x лампы всего

$$P(\text{брак}) = 0,1$$

0,1 · 3x — браков. лампы

II линия

x лампы всего

$$P(\text{брак}) = 0,06$$

0,06 · x — брака

$$P(\text{выбр. брак.}) = \frac{0,3x + 0,06x}{3x + x} = \frac{0,36x}{4x} = 0,09$$

$$P(\text{не брак.}) = 1 - 0,09 = 0,91$$

5

Игральный кубик бросают два раза. Во сколько раз вероятность события «выпадет разное количество очков» больше вероятности события «выпадет одинаковое количество очков»?

Ответ: _____

Всего комбинаций = $6 \cdot 6 = 36$

одинаков

$\begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \\ 55 \\ 66 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{6 шт} \end{array} \right.$

разные числа

$$36 - 6 = 30$$

$$P(\text{разное кол-во очков}) = \frac{30}{36} = P_1$$

$$P(\text{одинак. кол-во очков}) = \frac{6}{36} = P_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{30}{36} : \frac{6}{36} = \frac{30}{36} \cdot \frac{36}{6} = 5$$

5

В верхнем ящике стола лежит 10 белых и 15 чёрных одинаковых по размеру кубиков. В нижнем ящике стола лежит 15 белых и 10 чёрных таких же кубиков. Аня наугад взяла из верхнего ящика два кубика, а Оля — два кубика из нижнего ящика. После этого Аня положила свои кубики в нижний ящик, а Оля — в верхний. Найдите вероятность того, что в верхнем ящике по-прежнему будет 10 белых и 15 чёрных кубиков.

Ответ: _____.

Верх

$$10\delta + 15\tau \rightarrow (10\delta; 15\tau)$$

нижн

$$15\delta + 10\tau$$

- 1) $2\delta \leftrightarrow 2\delta$
 - 2) $2\tau \leftrightarrow 2\tau$
 - 3) $1\delta, 1\tau \leftrightarrow 1\tau, 1\delta$
 - 4) $1\tau, 1\delta \leftrightarrow 1\delta, 1\tau$
 - 5) $1\delta, 1\tau \leftrightarrow 1\tau, 1\delta$
 - 6) $1\tau, 1\delta \leftrightarrow 1\delta, 1\tau$
- } $\times 4$ одну вероят.

$$P = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} +$$

Аня, 2 δ Оля, 2 δ Аня, 2 τ Оля, 2 τ

$$+ 4 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} =$$

Аня, 1 δ +1 τ Оля, 1 δ +1 τ

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 + 4 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 10}{25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 24} =$$

$$= \frac{10 \cdot 15 \cdot (18 \cdot 14 + 600)}{5 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 24} =$$

$$= \frac{2 \cdot 852}{25 \cdot 24 \cdot 24} = \frac{264}{25 \cdot 24} = \frac{66}{25 \cdot 6} = \frac{11}{25} = \frac{44}{100}$$

0,44

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 14 \\ \hline 72 \\ 180 \\ \hline 252 \\ + 600 \\ \hline 852 \\ \underline{-6} \quad | 3 \\ 25 \\ \underline{-24} \\ 12 \end{array}$$

5

На одной полке стоит 36 блюд: 14 синих и 22 красных. На другой полке стоит 36 чашек: 27 синих и 9 красных. Наугад берут два блюда и две чашки. Найдите вероятность, что из них можно будет составить две чайные пары (блюдце с чашкой), каждая из которых будет одного цвета.

Ответ: _____.

$$1) \quad kb + kr, kb + kr$$

$$2) \quad cb + cr, cb + cr$$

$$3) \quad kb + kr, cb + cr \times 4$$

$$\begin{array}{cccc} kb & kr & cb & cr \\ kb & cr & cb & kr \\ cb & cr & kb & kr \\ cb & kr & kb & cr \end{array}$$

6

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{32}{3x-4}} = 1,6$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

ОДЗ:

$$\frac{32}{3x-4} > 0 \Leftrightarrow 3x-4 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = a^2 \end{cases}$$

$$\frac{32}{3x-4} = 2,56 \Rightarrow 2,56 \cdot (3x-4) = 32 \quad | \cdot 100$$

$$256(3x-4) = 3200 \quad | : 4$$

$$64(3x-4) = 800 \quad | : 4$$

$$16(3x-4) = 200 \quad | : 4$$

$$4(3x-4) = 50 \quad | : 2$$

$$2(3x-4) = 25$$

$$6x-8 = 25$$

$$6x = 33$$

$$x = \frac{33}{6} = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$5,5 > \frac{4}{3} \Rightarrow \text{удов. ОДЗ}$$

9

Два тела массой $m=10$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v=8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 480 джоулей.

Ответ: _____.

$$Q \geq 480 \quad m=10, v=8$$

$$10 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha \geq 480$$

$$\sin^2 \alpha \geq \frac{48}{8 \cdot 8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_{\min} = 60^\circ$$

$$2\alpha = 120^\circ$$

9

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu=2$ моля воздуха объёмом $V_1=18$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 9,15 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, а $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10 980 Дж.

$$\nu=2; V_1=18; \alpha=9,15; T=300; A=10980$$

$$9,15 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{18}{V_2} = 10980$$

$$915 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \log_2 \frac{18}{V_2} = 10980$$

$$\begin{array}{r} 10980 \div 3 = 3660 \\ -9 \\ \hline 19 \\ -18 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\log_2 \frac{18}{V_2} = \frac{10980}{915 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1830}{915} = 2$$

$$\log_2 \frac{18}{V_2} = \log_2 4 \Rightarrow \frac{18}{V_2} = 4 \Rightarrow V_2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

10

Расстояние между пристанями А и В равно 160 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 38 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пусть x км/ч - скорость лоды в неподвижной воде ($x > 2$)

Плот: $S = 38$ км, $b = 2$ км/ч $\Rightarrow t = 19$ ч

Лодка: $t = 19 - 1 = 18$ ч

$$AB + BA = 160 + 160 \text{ (км)}$$

$$v_{AB} \text{ (по течению)} = (x + 2) \text{ км/ч}$$

$$v_{BA} \text{ (против течения)} = (x - 2) \text{ км/ч}$$

$$\frac{160}{x+2} + \frac{160}{x-2} = 18 \quad | \cdot (x+2)(x-2)$$

$$160(x-2) + 160(x+2) = 18(x^2-4) \quad | : 2$$

$$80x - 160 + 80x + 160 = 9x^2 - 36$$

$$9x^2 - 160x - 36 = 0$$

$$D = (-160)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-36) = 160^2 + 36^2 = (4 \cdot 40)^2 + (4 \cdot 9)^2 =$$

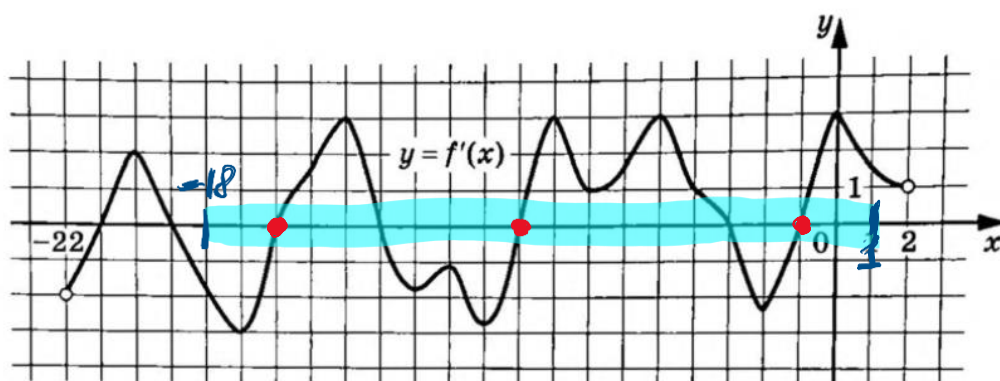
$$= 4^2 (40^2 + 9^2) = 4^2 \cdot 1681 = 4^2 \cdot 41^2 = (4 \cdot 41)^2 = 164^2$$

$$x_{1,2} = \frac{160 \pm 164}{2 \cdot 9} \quad (x > 2)$$

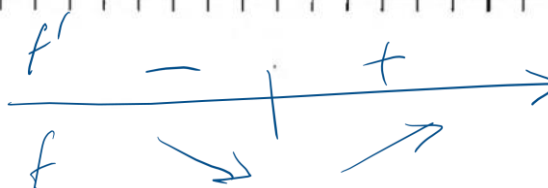
$$x = \frac{160 + 164}{2 \cdot 9} = \frac{80 + 82}{9} = \frac{162}{9} = 18$$

8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-22; 2)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18; 1]$.



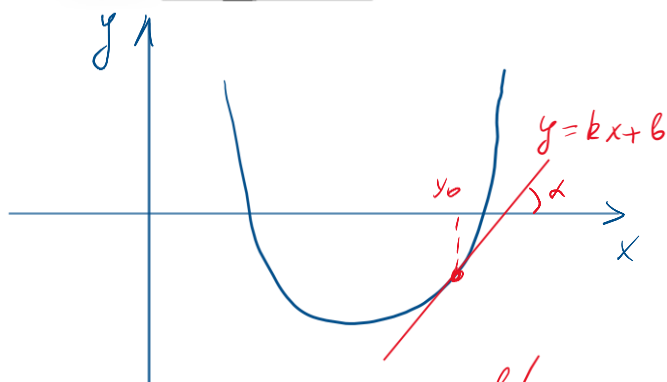
Ответ: 3.



8

Прямая $y = 7x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.



$$y = kx + b \parallel y = 7x + 11 \Rightarrow$$

$$k = 7$$

$$k \equiv \tan \alpha = f'(x_0)$$

x_0 — точка касания

$$f = x^2 + 8x + 6$$

$$f' = 2x + 8$$

В точке x_0 f' должно быть равно 7:

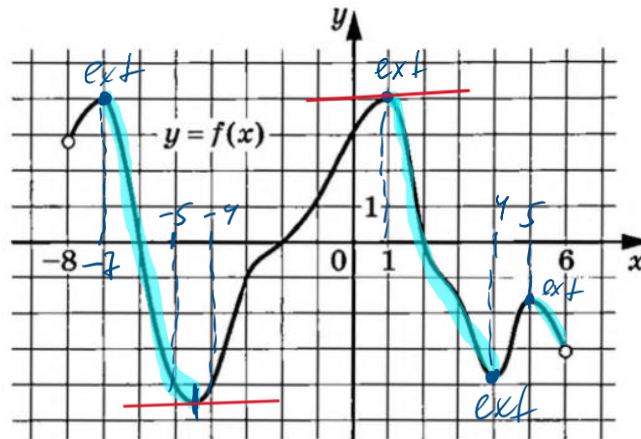
$$2x_0 + 8 = 7 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённый на интервале $(-8; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

$$f' < 0$$

$$f \rightarrow$$

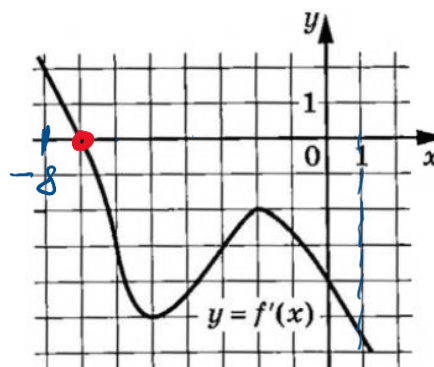


$-6, -5, 2, 3$

Ответ: 4.

8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, принадлежащей отрезку $[-8; 1]$, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: -7.

касая $\parallel y = 0$ (ось абсцисс)

$k = f'(x_0)$ — геом. смысл производ.

$$y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \cdot x + 0 \Rightarrow k = 0 \quad | \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

Физический смысл
производной

$x(t)$ — расстояние

$v(t) = x'(t)$

$a(t) = v'(t)$

8

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = t^2 + 7t + 13,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 25 м/с?

Ответ: _____.

$$v = 25 \text{ м/с}$$

$$v(t) = x'(t) = 2t + 7$$

$$2t + 7 = 25$$

$$2t = 18$$

$$t = 9 \text{ (с)}$$