

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Кафедра теории упругости

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ОПЫТНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРЕМ БЕТТИ И МАКСВЕЛЛА
(ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ)

Ростов-на-Дону 2020

Цель работы

Опытным путем убедиться в справедливости утверждения: «Работа первой системы сил на перемещениях, вызванных второй системой сил, равна работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой сил».

Основные теоретические положения

Рассмотрим упругую балку, лежащую на двух опорах. Сначала прикладывается первая система сил $P_1, P_2 \dots P_n$ (см. рисунок 1) в n точках. В результате в этих точках возникают смещения $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$.

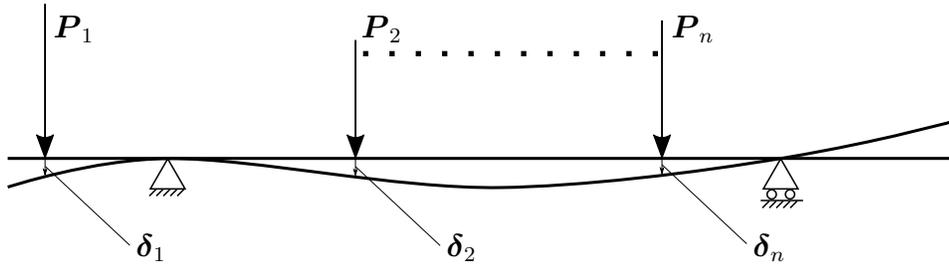


Рис. 1: Первая система сил

Затем к балке статически прикладывается вторая система сил $F_1, F_2 \dots F_m$ в m точках (см. рисунок 2).

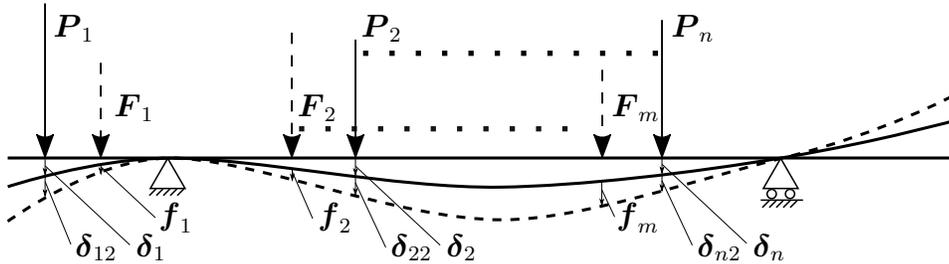


Рис. 2: Первая и вторая система сил

Вследствие действия этой системы к смещениям $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$ добавляются смещения $\delta_{12}, \delta_{22} \dots \delta_{n2}$. Суммарная внутренняя энергия деформации, накопленная в балке при действии обеих систем сил, по определению будет равна:

$$U_1 = \frac{1}{2} P_1 \cdot \delta_1 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_n + \frac{1}{2} F_1 \cdot f_1 + \dots + \frac{1}{2} F_m \cdot f_m + P_1 \cdot \delta_{12} + \dots + P_n \cdot \delta_{n2} \quad (1)$$

Здесь f_1, f_2, \dots, f_m — вызванные второй системой сил смещения балки в точках приложения сил F_1, F_2, \dots, F_m . Аналогично, энергия деформации упругой балки, нагруженной сначала второй системой сил $F_1, F_2 \dots F_m$, а затем статически догруженной первой системой сил P_1, P_2, \dots, P_n будет равна:

$$U_2 = \frac{1}{2} F_1 \cdot f_1 + \dots + \frac{1}{2} F_m \cdot f_m + \frac{1}{2} P_1 \cdot \delta_1 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot \delta_n + F_1 \cdot f_{11} + \dots + F_m \cdot f_{m1} \quad (2)$$

Здесь $f_{11}, f_{21} \dots f_{m1}$ — вызванные первой системой сил прогибы балки в точках приложения второй системы сил. Согласно принципу независимости действия сил для упругого тела имеем:

$$U_1 = U_2 \quad (3)$$

Из этого равенства получаем математическую запись теоремы взаимности работ:

$$F_1 \cdot f_{11} + F_2 \cdot f_{21} + \dots + F_m \cdot f_{m1} = P_1 \cdot \delta_{12} + P_2 \cdot \delta_{22} + \dots + P_n \cdot \delta_{n2} \quad (4)$$

В частности, если $m = n = 1$ и $P_1 = F_1$, из (4) имеет место теорема о взаимности перемещений: «Перемещение точки A под действием силы, приложенной в точке B равно перемещению точки B под действием той же силы, но приложенной в точке A ».

Следует отметить, что полученные результаты являются верными только для малых упругих перемещений, пока к системе может быть применен принцип независимости действия сил.

Порядок проведения работы

Опыт выполняется на балке в виде стальной полосы, расположенной на двух опоры (одна — в виде трехгранной призмы, другая — в виде цилиндрического стержня). Для измерения перемещений в точках приложения сил используются индикаторы часового типа (типа «КИ»).

Опыт проводится в следующей последовательности:

1. Измерить геометрические размеры балки. Получить от преподавателя схему расположение точек приложения сил и рассчитать допустимые нагрузки для каждой системы. Расчеты проводятся отдельно для каждой системы сил. Кроме того, во избежание опрокидывания балки во время эксперимента необходимо рассчитать допустимую нагрузку консольной части балки при отсутствии нагрузки на остальной части балки.
2. К балке согласно схеме при помощи серыг крепятся подвески, на которые будут устанавливаться грузы, выполняющие роль систем сил.
3. Установить и откалибровать индикаторы в точках приложения первой и второй систем сил.
4. Приложить первую систему сил путем статической установки грузов на соответствующие серыги.
5. Замерить смещения в точках приложения второй системы сил и полученные данные занести в журнал измерений.
6. Разгрузить балку. Откалибровать индикаторы.
7. Приложить вторую систему сил путем статической установки грузов на соответствующие серыги.
8. Замерить смещения в точках приложения первой системы сил и полученные данные занести в журнал измерений.

9. Сравнить значение работы первой системы сил A_{12} на перемещениях, вызванных второй системой сил A_{21} , со значением работы второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой сил по формуле

$$\Delta = |A_{12} - A_{21}| \quad (5)$$

Отчет по проделанной работе

Отчет о проделанной работе должен содержать следующие сведения:

- цель работы;
- расчетные формулы;
- журнал измерений, включающий схематический чертеж установки и схемы приложения систем сил с указанием расстояний, размеры балки, расчеты допускаемой нагрузки для каждой системы сил, полученные экспериментальные данные о смещениях и значениях сил;
- обработка результатов (вычисление и сравнение значений работ для каждой системы сил, используя формулы (4)–(5));
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Бетти.
2. Сформулируйте теорему Клапейрона.
3. Как проводится расчет допустимой нагрузки?
4. В каких случаях работа силы является положительной величиной, а в каких — отрицательной?
5. В каких единицах измеряются значения смещений, сил и работы сил?

Список литературы

- 1 Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – 2-е изд., заново перераб. – Ленинград ; Москва : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1939. – 649 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=105442>
- 2 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Феодосьев. — Электрон. дан. — Москва : , 2018. — 542 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/106484>