

18 Изгиб гибкого упругого стержня под собственным весом

Цель работы

Исследовать изгиб тонкого упругого стержня в рамках геометрически нелинейной теории, учитывающей большие перемещения.

Основные теоретические положения

В рамках лабораторной работы рассматриваются следующие задачи:

1. Определить форму прогиба тонкого стержня под собственным весом по теории гибких упругих стержней и по теории балок Бернулли–Эйлера.
2. Сравнить результаты моделирования с экспериментом.
3. Оценить границы применимости модели балок Бернулли–Эйлера.

Математическая модель

Уравнения равновесия стержня при плоской деформации

В общем виде уравнения равновесия гибкого упругого стержня имеют вид [21–24]

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{q} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \frac{d\mathbf{R}}{ds} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} &= 0.\end{aligned}\tag{18.1}$$

Здесь s — координата вдоль несущей линии стержня [23], $\mathbf{R}(s)$ — радиус-вектор точек несущей линии стержня, $\mathbf{q}(s)$ — распределённая нагрузка вдоль несущей линии стержня, $\mathbf{m}(s)$ — моментная распределённая нагрузка вдоль несущей линии стержня, $\mathbf{Q}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$ — усилие и моментное усилие в сечении стержня. В настоящей работе они обозначают действие части стержня, находящейся далее текущей координаты s .

Введём неподвижную декартову систему координат $Oxyz$. Выберем её начало так, чтобы начало стержня находилось в начале координат. Положим, что тонкий упругий стержень деформируется в плоскости xy . В силу малой изгибной жёсткости будем считать, что основная деформация стержня — это изгиб в плоскости деформирования, пренебрегая удлинением.

В силу принятых упрощений определяющие соотношения для гибкого упругого стержня описывают связь изменения кривизны с изгибающим моментом [21]

$$\varkappa - \varkappa_0 = \frac{M_z}{H}.$$

Здесь $\varkappa_0(s)$ и $\varkappa(s)$ — начальная и текущая кривизна несущей линии стержня, $H = EJ_z$ — изгибная жёсткость стержня (E — модуль Юнга, J_z — момент инерции сечения).

Из дифференциальной геометрии известно, что кривизна выражается через изменение угла наклона касательной $\theta(s)$ в виде

$$\varkappa(s) = \frac{d\theta}{ds}.$$

Для изначально прямого стержня $\varkappa_0(s) \equiv 0$, тогда получаем

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_z}{H}. \quad (18.2)$$

С учётом принятых ограничений уравнения равновесия можно представить в декартовой системе координат в виде

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{ds} &= -q_x, \\ \frac{dQ_y}{ds} &= -q_y, \\ \frac{dM_z}{ds} &= -m_z - Q_y \cos \theta + Q_x \sin \theta. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Координаты точек несущей линии в декартовой системе координат можно

выразить через угол θ следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{dX(s)}{ds} &= \cos \theta, \\ \frac{dY(s)}{ds} &= \sin \theta.\end{aligned}\tag{18.4}$$

Таким образом, получили систему шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (18.2), (18.3), (18.4).

Граничными условиями могут быть, например:

- закреплённый конец

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad \theta(0) = 0;\tag{18.5}$$

- свободный конец

$$Q_x(l) = 0, \quad Q_y(l) = 0, \quad M_z(l) = 0;\tag{18.6}$$

- неподвижное шарнирное опирание

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad M_z(0) = 0;\tag{18.7}$$

- подвижное шарнирное опирание (перемещение возможно вдоль оси x)

$$Q_x(l) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad M_z(l) = 0.\tag{18.8}$$

Сформулированная краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений (18.2), (18.3), (18.4) с выписанными граничными условиями (18.5)–(18.8) может быть решена численно.

Изгиб консольной балки под собственным весом

Рассмотрим горизонтальную консольную балку, прогибающуюся под действием собственного веса. Вес балки можно моделировать как равномерно распределённую нагрузку (рис. 34). Определите длину балки l , так чтобы её

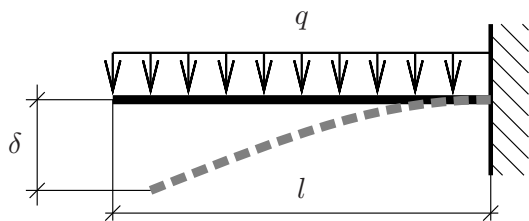


Рис. 34: Консольная балка с равномерной распределённой нагрузкой, моделирующей её вес

свободный конец опустился на величину δ^3 .

Задачи для гибкого стержня с распределённой нагрузкой относятся к классу задач, не сводящихся к основному классу [21]. Большинство таких задач не имеют аналитического решения, но могут быть решены численно.

Описание установки

На специальном устройстве, с заданной преподавателем высотой δ над горизонтальной поверхностью стола, закрепите выданный стержень, так чтобы консольная часть имела вычисленную длину. При правильном расчёте свободный конец балки должен касаться стола. Замерьте отклонение от вычисленной величины. Экспериментально определите длину балки, чтобы она касалась стола.

Порядок проведения работы

1. Получить параметры стержня и условия закрепления.
2. Провести математическое моделирование задачи:
 - (а) Численно решить краевую задачу.
 - (b) Вывести решение задачи в рамках теории балок Бернулли–Эйлера [6, 7, 12].
 - (с) Сравнить результаты моделирования по теории гибких упругих стержней и теории балок Бернулли–Эйлера.
3. Провести эксперимент и сравнить полученные данные с результатами математического моделирования.

³Величину прогиба задаёт преподаватель.

4. Провести анализ влияния параметров задачи на погрешность расчёта.

Отчёт о проделанной работе

Отчёт о проделанной работе должен содержать следующие сведения:

- цель работы;
- расчётные формулы для решения задачи по теории балок Бернулли–Эйлера и формулировку задачи по теории гибких упругих стержней;
- журнал измерений (материал, геометрические размеры балки, значение измеренного прогиба);
- обработка результатов (расчёты прогиба в рамках предложенных подходов и сравнение их значений с полученными экспериментальными данными, анализ влияния параметров задачи на погрешность вычислений);
- выводы.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Выведите уравнения равновесия (18.1) тонкого упругого стержня.
2. Сформулируйте граничные условия для случая скользящей заделки с заданным углом наклона.
3. Сформулируйте граничные условия для конца балки, опирающегося на упругую опору.
4. Оцените пределы применимости приближенного уравнения балок теории Бернулли–Эйлера для рассматриваемой задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. — М. : Наука, 1970. — 104 с.
2. Свешников А. А. Основы теории ошибок. — Л. : Издательство Ленинградского государственного университета, 1972. — 126 с.
3. Кондрашов А. П., Шестопапов Е. В. Основы физического эксперимента и математическая обработка результатов измерений. — М. : Атомиздат, 1977. — 197 с.
4. Измерения прямые многократные ГОСТ 8.736-2011. — 2013.
5. ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. МИ 2083-90. — 1991.
6. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. — 12 изд. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 856 с.
7. Работнов Ю. Н. Труды по механике. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 456 с.
8. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. — 2 изд. — М. : Наука, 1965. — 364 с.
9. Испытание материалов. Справочник / Под ред. Х. Блюменауэр. — М. : Металлургия, 1979. — 448 с.
10. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. — М. : Наука, 1986. — 599 с.
11. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. — 3 изд. — М. : Высшая школа, 2003. — 560 с.

12. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : учебное пособие. — М. : МГТУ им. Баумана, 2018. — 542 с.
13. Металлы. Испытание на растяжение. ГОСТ 1497-84. — 1984.
14. Мехеда В. А. Тензометрический метод измерения деформаций: учеб. пособие. — Самара : Издательство Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. — 54 с.
15. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. — М. : Изд-во иностр. лит., 1954. — 648 с.
16. Ясинский Ф. Собрание сочинений. — Пб., 1902. — Т. 1.
17. Ясинский Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. — М. ; Л. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. — 428 с.
18. Справочник по технической механике / Под ред. А. Н. Динник. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. — 734 с.
19. Металлы. Метод испытания на ударный изгиб при пониженных, комнатной и повышенных температурах. ГОСТ 9454-78. — 1978.
20. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля // Прикладная математика и механика. — 1944. — Т. 8, № 3. — С. 201–224.
21. Попов Е. П. Теория и расчёт гибких упругих стержней. — М. : Наука, 1986. — 296 с.
22. Светлицкий В. А. Механика стержней. Ч.I. Статика. — М. : Высшая школа, 1987. — 320 с.
23. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: Учебное пособие. — СПб. : Изд-во Политехнического университета, 2007. — 100 с.

24. Елисеев В. В., Зиновьева Т. В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней: Учебное пособие. — СПб. : Изд-во Политехнического университета, 2008. — 95 с.
25. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М. : Наука, 1967. — 444 с.
26. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. — М. : Высшая школа, 1980. — 408 с.
27. Культербаев Х. П. Основы теории колебаний. — Нальчик : Издательство КБГУ им. Х.М. Бербекова, 2003. — 126 с.
28. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. — М. : Машиностроение, 1970. — 734 с.