Рациональные выражения

0 курс мехмата ЮФУ*

Дроби

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, называют *обыкновенной дробью*. При этом m называется *числителем дроби*, а n — *знаменателем*.
Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{ap}{bp}, \quad \text{где} \ \ p \neq 0.$$

Действия с обыкновенными дробями

1. $a = \frac{a}{1}$
2. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
3. $\frac{a}{b} \pm \frac{p}{q} = \frac{aq \pm bp}{bq}$
4. $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$
5. $\frac{a}{b} : \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p}$

Пропорция

Пропорция — равенство отношений

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

или

$$a : b = p : q$$

Свойство пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot q = b \cdot p$$

«Быстрое» вычисление квадрата числа, оканчивающегося на 5

$$\square 5^2 = \big[\square \cdot (\square + 1)\big]25$$

$$85^2 = \big[8 \cdot (8+1)\big]25 = [8 \cdot 9]25 = 7225$$

$$125^2 = \big[12 \cdot (12+1)\big]25 = [12 \cdot 13]25 = 15625$$

Формулы сокращённого умножения

1. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
4. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
5. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
6. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
7. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Вычисление квадрата числа

1. По формуле квадрата разности: $78^2 = (80-2)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 2 + 2^2 = 6400 - 320 + 4 = 6084$
2. По формуле квадрата суммы: $78^2 = (75+3)^2 = 75^2 + 2 \cdot 75 \cdot 3 + 3^2 = 5625 + 450 + 9 = 6084$

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: `dolgikh@sfedu.ru`, `@DolgikhTF`.

Свойства степеней

1. $a^1 = a$
2. $a^0 = 1$ при $a \neq 0$[a]
3. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$
7. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
8. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

[a] Выражение 0^0 не определено.

Степень отрицательного числа

Пусть $n \in \mathbb{Z}$ — чётное значение. Тогда

$$(-a)^n = a^n = b > 0$$

Если $n \in \mathbb{Z}$ — нечётное, то

$$(-a)^n = -a^n = b < 0$$

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую со знаком минус, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ и нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное данному $h(x)f(x) = h(x)g(x)$.

Теорема 3. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей в чётную степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части уравнения возвести в одну нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Основные приёмы решения уравнений

Метод разложения на множители. Этот метод заключается в том, что уравнение

$$f(x)g(x)h(x) = 0$$

можно заменить совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{array}\right.$$

Из решений совокупности нужно взять только те решения, которые принадлежат области определения исходного уравнения, остальные отбрасываются.

Метод замены переменной. Этот метод заключается в том, что если уравнение $f(x) = 0$ сводится к уравнению $h(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, затем решить уравнение $h(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1 \\ g(x) = u_2 \\ \dots \\ g(x) = u_n \end{array}\right.$$

Здесь u_1, $u_2, \dots$, u_n — корни уравнения $h(u) = 0$.

Квадратные уравнения

Полное квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Решение таких уравнений получается с помощью вспомогательного значения — *дискриминант*

$$D = b^2 - 4ac.$$

1. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.
2. Если $D = 0$, то получается один корень $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$ кратности 2 (или два совпадающих корня).
3. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если известны корни x_1 и x_2 квадратного уравнения, то квадратный многочлен можно переписать в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

можно решить при помощи теоремы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Неполные квадратные уравнения

1. Уравнение $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ преобразуется в виду $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.
   - Если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.
   - Если $-\dfrac{c}{a} = 0$ (т. е. $c = 0$), то уравнение имеет один корень $x_{1,2} = 0$ кратности 2.
   - Если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то уравнение имеет два различных вещественных корня $x_{1,2} = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.
2. В уравнении $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$, выносится общий множитель $x(ax + b) = 0$. Тогда решениями уравнения будут значения $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Биквадратное уравнение

Биквадратное уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0$$

с помощью замены $t = x^2 \geqslant 0$ сводится к квадратному уравнению

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Неполное уравнение с нечётной степенью

В общем виде уравнение с нечётной степенью n имеет вид

$$\bigl(f(x)\bigr)^n = c.$$

Решение этого уравнения получается путём извлечения корня n-ной степени, т. е.

$$f(x) = \sqrt[n]{c}.$$

Дробно-рациональное уравнение

Уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Схема Горнера

Рассмотрим для примера многочлен $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Допустим, что необходимо рассмотреть многочлен $f(x)$ при $x = c$. Тогда схема Горнера, представленная в виде таблицы, будет заполнена следующим образом:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$x = c$	$a_4 = b_4$	$c \cdot b_4 + a_3$ $= b_3$	$c \cdot b_3 + a_2$ $= b_2$	$c \cdot b_2 + a_1$ $= b_1$	$c \cdot b_1 + a_0$ $= b_0$

Схема Горнера — эффективный алгоритм для следующих задач:

1. вычисление значения многочлена при заданном $x = c$:
$$f(c) = b_0$$
2. деления многочлена на двучлен вида $x - c$: если $b_0 = 0$, то
$$f(x) = (x - c)(b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1),$$
а если $b_0 \neq 0$, то
$$f(x) = (x - c)(b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1) + b_0,$$
3. проверки, является ли число c корнем многочлена: является, если получаем $b_0 = 0$. При этом корень многочлена $f(x)$ можно искать среди делителей числа a_0.

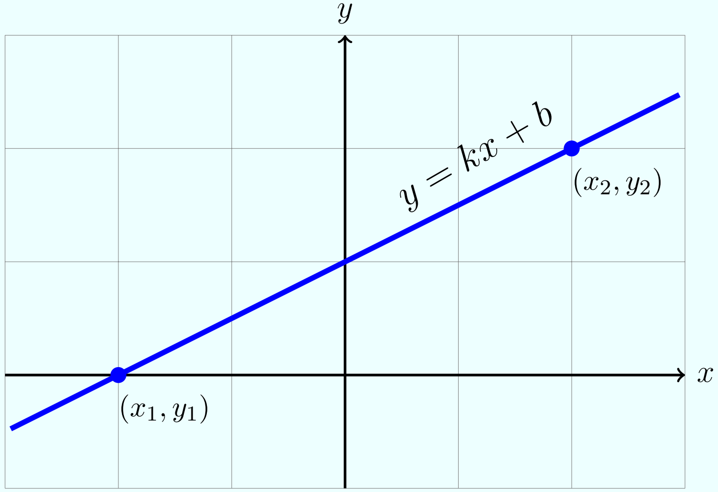
Метод интервалов

1. При решении рациональных неравенств $f(x) > 0$ (или любой другой знак $<$, $\geqslant$, $\leqslant$)
   - в первую очередь необходимо определить корни функции, т. е. решить уравнение $f(x) = 0$.
   - Нанести точки (корни) на числовую прямую при этом если знак неравенства строгий ($>$ или $<$), то рисуем выколотые точки (такие значения не включаются в общий ответ), а если знаки неравенств нестрогие ($\geqslant$ или $\leqslant$), то точки закрашиваются и включаются в решения.
   - Определить знак выражения на каждом интервале. **Важно**: правило чередования знаков работает только, если корни нечётной кратности. Если корень имеет чётную степень, знак при переходе через его корень не меняется.
   - Выделить нужные интервалы: если в неравенстве были знаки $>$ или $\geqslant$, то в ответ включаем интервалы со знаком «+». Если в неравенстве были знаки $<$ или $\leqslant$, то в ответ включаем интервалы со знаком «−».
2. При решении дробно-рационального неравенства $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ (или $<$, $\geqslant$, $\leqslant$)
   - вычисляем корни числителя $f(x) = 0$ и знаменателя $g(x) = 0$.
   - Отмечаем на числовой оси корни: все точки выколотые, если знак неравенства строгий ($>$ или $<$), и точки числителя закрашенные, а точки знаменателя выколотые, если знак неравенства нестрогий ($\geqslant$ или $\leqslant$).
   - Далее действия как при решении рациональных неравенств.

График линейной функции

С помощью изображения графика функции определить значение функции $y = f(x)$ в заданной точке $\tilde{x}$ или определить абсциссу точки x с известным значением $\tilde{y}$.

Перед ответом на вопрос задачи необходимо установить аналитический вид изображённой функции $y = f(x) = kx + b$.

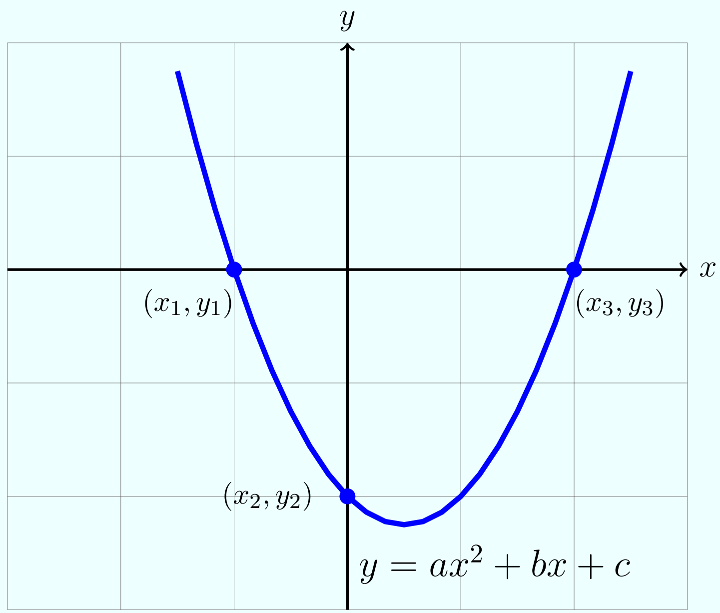


1. **Общий метод решения**. Так как в записи функции есть два неизвестных параметра k и b, то необходимо выбрать две точки с целочисленными координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), составить и решить систему уравнений для определения коэффициентов k и b

$$\begin{cases} y_1 = k \cdot x_1 + b \\ y_2 = k \cdot x_2 + b \end{cases}$$

2. **Частный случай**. Так как $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, то коэффициент $k = \dfrac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$ при $\alpha < 90^\circ$ и $k = -\dfrac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Коэффициент b вычисляется с помощью любого уравнения системы или определяется как ордината точки пересечения линии с осью Oy.

График квадратичной функции



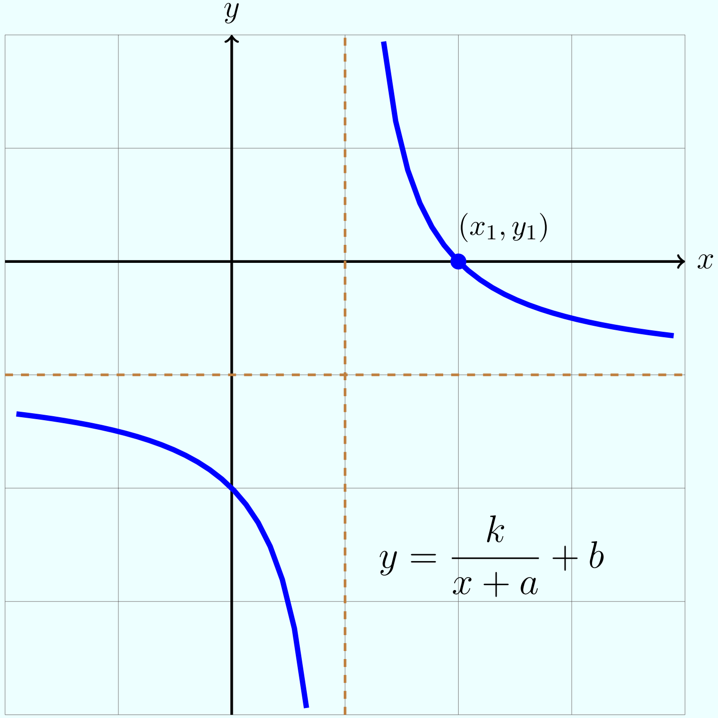
1. **Общий метод решения**. Так как в записи функции есть три неизвестных параметра a, b и c, то необходимо выбрать три точки с целочисленными координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), составить и решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \\ y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c \\ y_3 = a \cdot x_3^2 + b \cdot x_3 + c \end{cases}$$

2. **Частный случай-I**. Если известны корни x_1 и x_3 (обозначения как на рисунке) уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, т. е. точки пересечения с осью абсцисс, то можно воспользоваться записью выражения вида $y = a(x - x_1)(x - x_3)$.

3. **Частный случай-II**. Если известна координата вершины параболы (x_0, y_0), то можно воспользоваться записью выражения вида $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

График дробно-рациональной функции



1. **Общий метод решения**. Так как в записи функции есть три неизвестных параметра a, b и k, то необходимо выбрать три точки с целочисленными координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), составить и решить систему уравнений.
2. **Частный случай**. Асимптоты гиперболы $x = -a$ и $y = b$. Таким образом, можно использовать только одну целочисленную координату для вычисления коэффициента k.