

В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $\angle C = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB .

N19

$$CH = \frac{1}{2} AC$$

$$CH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

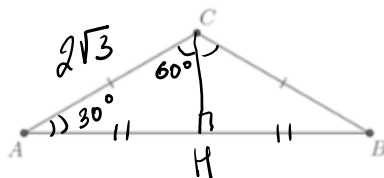
$$AB = 2 \cdot AH$$

г. Пифагора:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

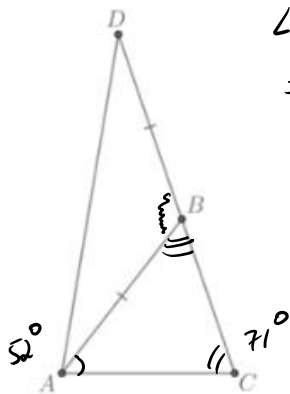
$$= \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$$

$$AB = 2 \cdot 3 = 6$$



В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 52^\circ$, $\angle C = 71^\circ$. На продолжении стороны BC за точку B отложен отрезок $BD = AB$. Найдите $\angle D$ треугольника ABD . Ответ дайте в градусах.

N5



$$\angle B = 180^\circ - (52^\circ + 71^\circ) =$$

$$= 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$$

$$\angle ABD = 180^\circ - 57^\circ =$$

$$= 123^\circ$$

$\triangle ABD$ - равнобедренный

$$\angle BAD = \angle ADB = \angle D$$

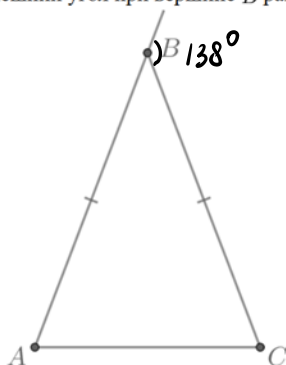
$$\angle D = \frac{1}{2}(180^\circ - 123^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 57^\circ = 28.5^\circ$$

В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, внешний угол при вершине B равен 138° . Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.

$$\angle A + \angle C = 138^\circ$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle C = \frac{1}{2} \cdot 138^\circ = 69^\circ$$

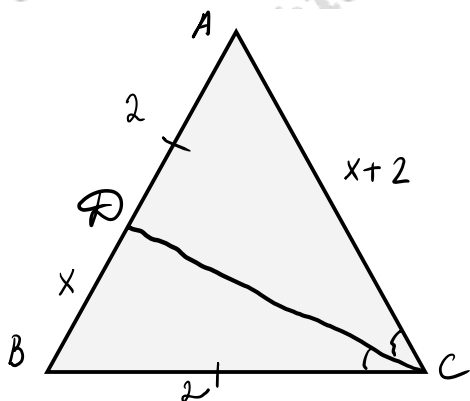


N2

1В. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC = 2$.

а) Докажите, что $CD = BC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC .



Решение

а) Длина биссектрисы

$$CD = \sqrt{AC \cdot BC - AD \cdot BD}$$

Пусть $BD = x$. Тогда $AC = AB = x + 2$

По св-ву биссектрисы:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2}{x+2}$$

$$x(x+2) = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 4 + 16 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Т.к. x — длина отрезка, то $x = -1 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 1$

$$CD = \sqrt{(\sqrt{5}+1) \cdot 2 - 2 \cdot (\sqrt{5}-1)} = \sqrt{2\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}+2} = 2$$

$\Rightarrow CD = BC$ з.т.г.

б) Вычислим S_{ABC} по ф. Герона

$$AB = AC = \sqrt{5} + 1, \quad BC = 2$$

$$P = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) = \frac{1}{2} (2(\sqrt{5}+1) + 2) = \sqrt{5} + 1 + 1 = \sqrt{5} + 2$$

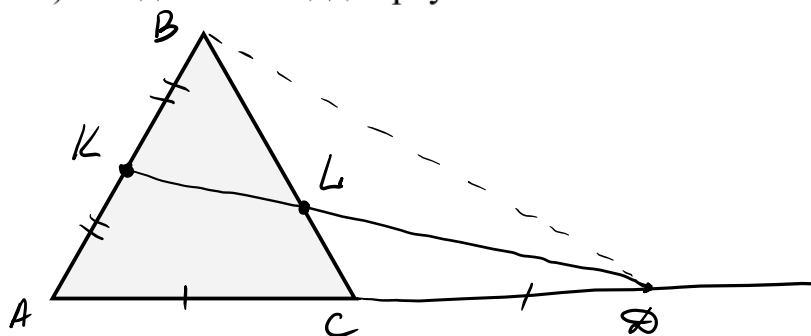
$$S = \sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}+1))^2 \cdot (\sqrt{5}+2-2)} = \sqrt{(\sqrt{5}+2) \cdot 1^2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Ответ: б) $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

2В. Площадь треугольника ABC равна 12. На прямой AC взята точка D так, что точка C является серединой отрезка AD . Точка K — середина стороны AB , прямая KD пересекает сторону BC в точке L .

а) Докажите, что $BL : LC = 2 : 1$.

б) Найдите площадь треугольника BLK .



Решение

а) В $\triangle ABD$
 KD и BC явл.
 медианами $\Rightarrow$

$$\frac{DL}{KL} = \frac{BL}{CL} = \frac{2}{1}$$

т.к. медианы точкой
 пересечения делятся в
 отношении 2 к 1, считая
 от вершины $\triangle$. т.е. г.

$$\text{б) } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = 12$$

$$S_{BKL} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot BL \cdot \sin B$$

$$\text{т.к. } BK = \frac{1}{2} AB, \quad BL = \frac{2}{3} BC, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} S_{BKL} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \frac{2}{3} BC \cdot \sin B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \\ &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \end{aligned}$$

4В (ЕГЭ 2014). В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N . $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

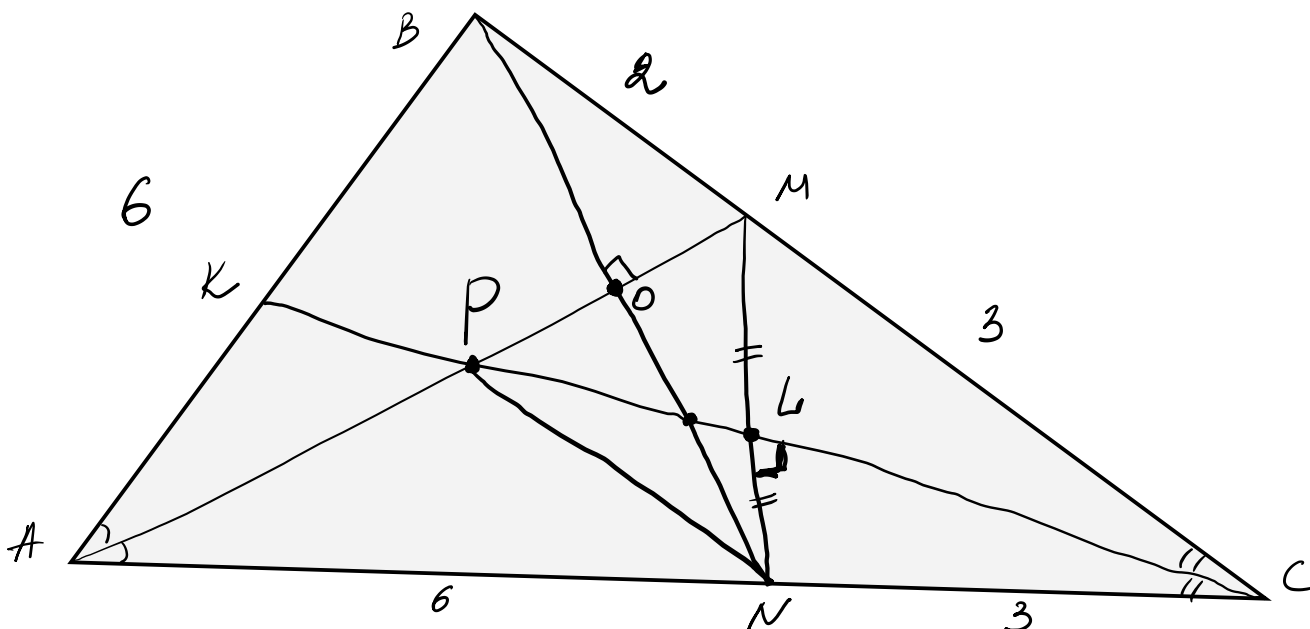
а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP : PN$.

Решение

а) Док-то, что $ML = LN$

$$AB = 6, \quad BC = 5, \quad AC = 9$$



Решение:

а) В $\triangle ABN$ AO евл. биссектрисой и $AO \perp BN \Rightarrow$
 $\triangle ABN$ - равнобедр (и AO евл. также медианой)

$$AB = AN = 6$$

$$\text{Тогда } CN = AC - AN = 9 - 6 = 3$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad \frac{BM}{AB} = \frac{CM}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{6} = \frac{CM}{9} \Rightarrow$$

$$\text{и } BM = 6 CM \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow BM = \frac{2}{3} CM$$

$$\text{При этом } BM + CM = BC = 5$$

$$\frac{2}{3} CM + CM = 5 \Rightarrow \frac{5}{3} CM = 5 \Rightarrow CM = 3$$

$$\Rightarrow BM = 2$$

$\triangle CMN$: $CM = CN \Rightarrow \triangle CMN$ - равнобедр

$\Rightarrow CL$ евл. не только биссектрисой, но
 и медианой и высотой $\Rightarrow ML = NL$
 ч. т. д.

$$8) \frac{AP}{PN} = ?$$

$\triangle ACM$: CP — медиана $\Rightarrow$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PM}{CM} \Rightarrow \frac{AP}{9} = \frac{PM}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$$

$\triangle PMN$: PL — явл. высотой и медианой $\Rightarrow$

$$PM = PN \Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{3}{1}$$

Ответ: 8) $3:1$