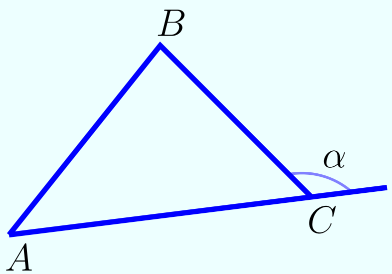
Планиметрия: треугольник

0 курс мехмата ЮФУ*

Углы произвольного треугольника



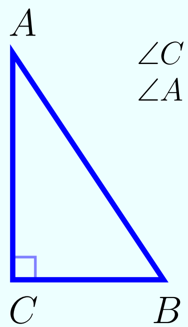
Теорема о сумме углов треугольника. Для любого треугольника ABC верно

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Внешний угол α равен сумме двух углов треугольника, которые не являются смежными для внешнего угла, т. е.

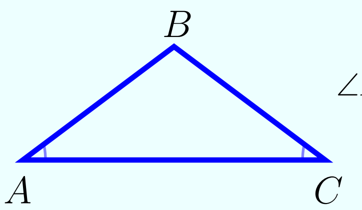
$$\alpha = \angle A + \angle B.$$

Углы прямоугольного треугольника



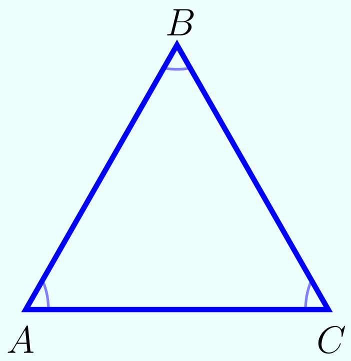
$\angle C = 90^\circ$
$\angle A + \angle B = 90^\circ$

Углы равнобедренного треугольника



$\angle A = \angle C$

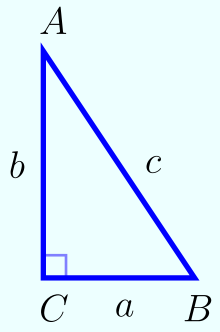
Углы равностороннего треугольника



$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: `dolgikh@sfedu.ru`, `@DolgikhTF`.

Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора. В любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема о синусах и косинусах острых углов. В любом прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения для сторон треугольника

$$\sin\angle A = \frac{b}{c}, \quad \cos\angle A = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{\sin\angle A}{\cos\angle A} = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{ctg}\angle A = \frac{\cos\angle A}{\sin\angle A} = \frac{a}{b},$$

а также верны равенства для острых углов треугольника

$$\sin\angle A = \cos\angle B, \quad \cos\angle A = \sin\angle B,$$

$$\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle B, \quad \operatorname{ctg}\angle A = \operatorname{tg}\angle B.$$

Некоторые сведения из тригонометрии

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Основное тригонометрическое тождество. Для любого угла α выполняется соотношение

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Некоторые тригонометрические соотношения. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta.$$

Пусть α и β — смежные углы. Тогда

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \cos\alpha = -\cos\beta,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta.$$

Некоторые формулы приведения

$$\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha, \ \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \ \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

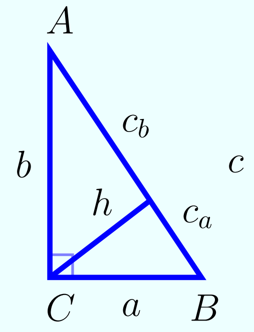
$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Высота, проведённая из прямого угла треугольника



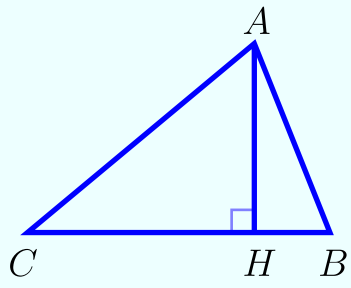
Теорема о проекциях катетов на гипотенузу. Если высота, проведённая из прямого угла прямоугольного треугольника равна h, а проекции катетов a и b на гипотенузу c равны c_a и c_b соответственно, то будут справедливы следующие соотношения

$$h^2 = c_a\cdot c_b, \quad a^2 = c\cdot c_a, \quad b^2 = c\cdot c_b.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch.$$

Высота треугольника



Высота треугольника — это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

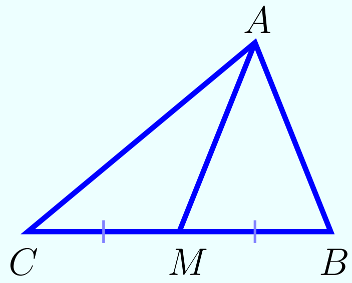
У каждого треугольника три высоты (по одной из каждой вершины). Высоты или их продолжения всегда пересекаются в одной точке (эта точка называется *ортоцентром* треугольника).

- В остроугольном треугольнике все три высоты лежат внутри треугольника, и ортоцентр находится внутри фигуры.
- В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами, а третья опущена из вершины прямого угла на гипотенузу. Ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла.
- В тупоугольном треугольнике две высоты опущены на продолжения сторон (лежат вне треугольника), а одна — на сторону. Ортоцентр находится вне треугольника.

Особые случаи

1. В равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к равным сторонам, равны.
2. В равностороннем треугольнике все три высоты равны.

Медиана треугольника



Длину медианы $AM = m_a$, проведённой к стороне a треугольника со сторонами a, b, c (на рис. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$), можно найти по формуле:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Аналогично вычисляются медианы m_b и m_c, проведённые к сторонам b и c соответственно.

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

У каждого треугольника три медианы — по одной из каждой вершины. Все три медианы пересекаются в одной точке, которая называется *центроидом* (или *центром тяжести*) треугольника.

Теремы о медианах треугольника

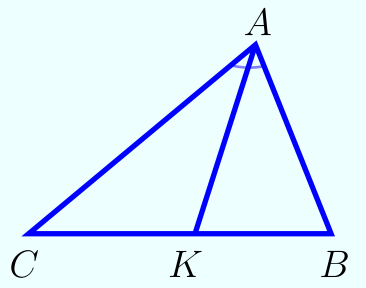
1. Центроид делит каждую медиану на два отрезка в отношении $2 : 1$, считая от вершины (больший отрезок — от вершины до центроида, меньший — от центроида до стороны).
2. Медиана делит исходный треугольник на два треугольника равной площади (*равновеликих*). Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.

Особые случаи

1. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к равным сторонам, равны.
2. В равностороннем треугольнике все три медианы равны.
3. В прямоугольном треугольник медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Дополнительное свойство. Медиана делит пополам любой отрезок, параллельный стороне, к которой она проведена.

Биссектриса треугольника



Длину биссектрисы $AK = l_a$, проведённой из угла $\alpha = \angle BAC$ к стороне $BC = a$ можно найти по формулам:

$$l_a = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} \quad \text{или} \quad l_a = \sqrt{b \cdot c - a_b \cdot a_c},$$

где $AC = b$, $AB = c$ — стороны треугольника ABC, а $CK = a_b$ и $BK = a_c$ — отрезки, на которые биссектриса делит сторону a.

Биссектриса треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делящий угол при вершине на два равных угла.

Свойство равноудалённости. Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла, из которого она выходит.

У каждого треугольника три биссектрисы (по одной из каждой вершины). Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка — центр вписанной в треугольник окружности, которая называется *инцентром*. Точка пересечения биссектрис делит каждую биссектрису в отношении, равном отношению суммы прилежащих сторон к противолежащей (считая от вершины).

Теорема. Биссектриса делит противоположную сторону на два отрезка, пропорциональных прилежащим сторонам, т. е. $\dfrac{CK}{AC} = \dfrac{BK}{AB}$ или $\dfrac{a_b}{b} = \dfrac{a_c}{c}$.

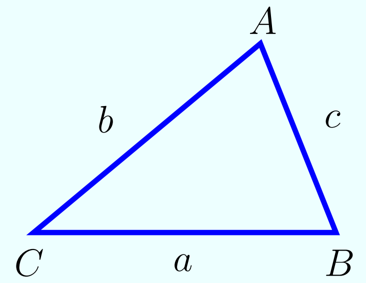
Особые случаи

1. В равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведённые к равным сторонам, равны.
2. В равностороннем треугольнике все три биссектрисы равны.

Свойства высот, медиан и биссектрис для равнобедренных и равносторонних треугольников.

1. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, одновременно является медианой и биссектрисой.
2. В равностороннем треугольнике все три высоты одновременно являются медианами и биссектрисами.

Теорема синусов треугольника



Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R,$$

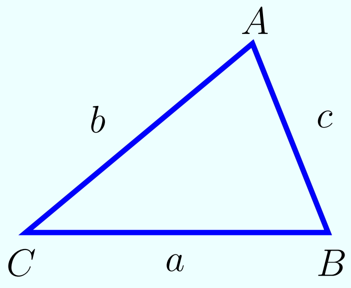
где R — радиус описанной около треугольника окружности.

Теорема косинусов треугольника

В любом треугольнике квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$

Площадь треугольника

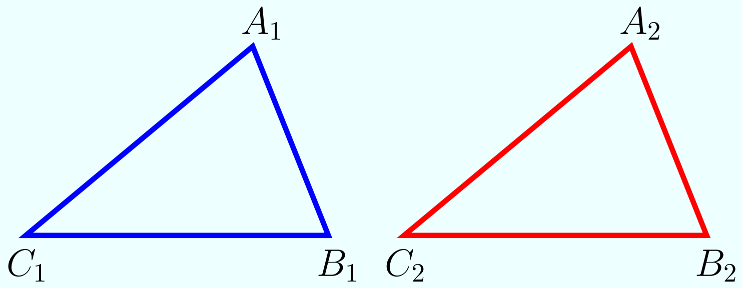


1. $S = \frac{1}{2} a h_a$, где h_a — высота, проведённая к стороне a
2. $S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$
3. **Формула Герона**: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где через p обозначен полупериметр треугольника, т. е. $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$
4. $S = pr$, где r — радиус вписанной в треугольник окружности
5. $S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной около треугольника окружности

Площадь равностороннего треугольника:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

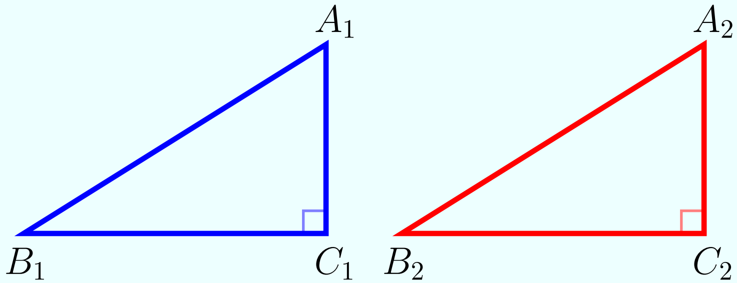
Равенство треугольников



Признаки равенства треугольников

1. *По двум сторонам и углу между ними (первый признак).* Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad A_1C_1 = A_2C_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2.$$
2. *По стороне и двум прилежащим углам (второй признак).* Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B_1 = \angle B_2.$$
3. *По трём сторонам (третий признак).* Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad A_1C_1 = A_2C_2, \quad B_1C_1 = B_2C_2.$$

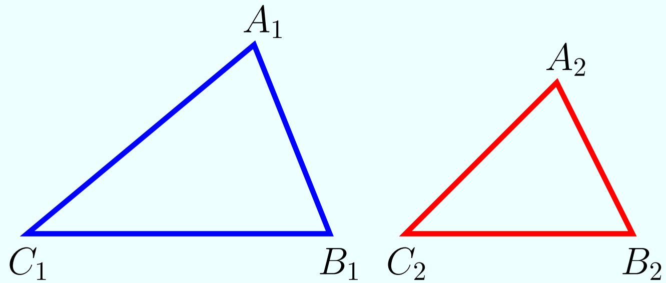
Равенство прямоугольных треугольников



Так как у прямоугольных треугольников уже есть равный элемент — прямой угол, то **признаки равенства прямоугольных треугольников** немного упрощаются

1. *По двум катетам.* Если два катета одного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1C_1 = A_2C_2, \quad B_1C_1 = B_2C_2.$$
2. *По катету и гипотенузе.* Если катет и гипотенуза одного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad A_1C_1 = A_2C_2.$$
3. *По катету и прилежащему острому углу.* Если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1C_1 = A_2C_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2.$$
4. *По гипотенузе и острому углу.* Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны:
$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2.$$

Подобие треугольников



Подобные треугольники — это треугольники с соответственно равными углами и стороны одного пропорциональны сторонам другого (отношение сторон называется *коэффициентом подобия* k).

Признаки подобия треугольников

1. *По двум углам* (*первый признак*). Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны:
$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B_1 = \angle B_2.$$
2. *По двум сторонам и углу между ними* (*второй признак*). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны:
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k, \quad \angle A_1 = \angle A_2.$$
3. *По трём сторонам* (*третий признак*). Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны:
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k.$$

Следствия из подобия треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия: $S_{A_1B_1C_1} : S_{A_2B_2C_2} = k^2$.
2. Соответственные элементы (медианы, биссектрисы, высоты) и периметры подобных треугольников также относятся как k.