Четырёхугольники

0 курс мехмата ЮФУ*

Произвольный четырёхугольник

Сумма углов **любого** четырёхугольника равна $360°$.

Если d_1 и d_2 — диагонали четырёхугольника, а φ — угол между диагоналями, то *площадь четырёхугольника* равна

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

Такой способ вычисления площади подходит для **всех** четырёхугольников. При этом необходимо помнить, что синусы смежных углов всегда равны. Например, φ и ψ — смежные углы, т. е. $\varphi + \psi = 180°$. Тогда

$$\sin\varphi = \sin\psi$$

Квадрат

Квадрат — геометрическая фигура, которая является правильным четырёхугольником: у него все стороны равны и все углы прямые.

Диагонали квадрата:

1. равны по длине;
2. пересекаются под прямым углом (перпендикулярны);
3. делят друг друга пополам;
4. делят углы квадрата пополам (каждый угол диагональю делится на $45°$).

Пусть a — длина стороны квадрата. Тогда

- длина диагонали квадрата $d = a\sqrt{2}$;
- периметр квадрата $P = 4a$;
- площадь квадрата $S = a^2$;
- площадь квадрата $S = \frac{1}{2}d^2$.

Прямоугольник

Прямоугольник — это геометрическая фигура, являющаяся четырёхугольником, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

1. противоположные стороны равны и параллельны;
2. диагонали равны по длине и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть a и b — длина и ширина прямоугольника, а d — диагональ прямоугольника. Тогда

- длина диагонали $d = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- периметр прямоугольника $P = 2(a + b)$;
- площадь прямоугольника $S = ab$;
- площадь прямоугольника $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$.

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: `dolgikh@sfedu.ru`, `@DolgikhTF`.

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:

1. противоположные стороны равны;
2. противолежащие углы равны;
3. углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма в сумме равны $180°$;
4. диагонали точкой пересечения делятся попалам.

Признаки параллелограмма: четырёхугольник является параллелограммом, если выполняется одно из условий.

1. Противоположные стороны попарно параллельны (определение).
2. Противоположные стороны попарно равны.
3. Противоположные углы попарно равны.
4. Диагонали делятся точкой пересечения пополам.
5. Две стороны равны и параллельны.

Пусть a, b — стороны параллелограмма, а d_1 и d_2 — диагонали параллелограмма. Тогда

- периметр параллелограмма $P = 2(a + b)$;
- площадь параллелограмма $S = ah_a$, где h_a — высота параллелограмма, проведённая к стороне a;
- площадь параллелограмма $S = ab\sin\alpha$, где α — угол между сторонами a и b;
- площадь параллелограмма $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$;
- теорема параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Ромб

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба:

1. все свойства как у параллелограмма;
2. диагонали пересекаются под прямым углом;
3. диагонали делят углы ромба пополам (каждая диагональ — биссектриса углов).

Пусть a — длина стороны ромба. Тогда

- периметр ромба $P = 4a$;
- площадь ромба $S = ah_a$, где h_a — высота ромба, проведённая к его стороне;
- площадь ромба $S = a^2\sin\alpha$, где α — угол ромба;
- площадь ромба $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2$;
- соотношение между диагоналями и стороной ромба $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

Связь между четырёхугольниками

- Параллелограмм, у которого равны все углы — прямоугольник.
- Прямоугольник, у которого равны все стороны — квадрат.
- Ромб, у которого равны все углы, является квадратом.

Трапеция

Трапеция — это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие — не параллельны.

Основные элементы трапеции:

- Основания a и b — параллельные стороны (обычно a — нижнее основание, b — верхнее основание).
- Боковые стороны c и d — непараллельные стороны.
- Высота h — расстояние между основаниями (перпендикуляр, проведённый между ними).
- Средняя линия m — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Периметр трапеции вычисляется как сумма всех его сторон: $P = a + b + c + d$.

Если в трапеции построить две высоты, то нижнее основание разделится на три отрезка с длинами x, b и y (т. е. $a = x + b + y$), а трапеция будет состоять из трёх фигур: прямоугольник и два прямоугольных треугольника. При этом размер прямоугольника $b \times h$. У первого прямоугольного треугольника буду катеты h, x и гипотенуза c, а у второго прямоугольного треугольника h и y — катеты, а d — гипотенуза.

Основные свойства трапеции:

- Сумма углов, прилежащих к каждой боковой стороне, равна 180°.
- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \dfrac{1}{2}(a + b)$.

Площадь трапеции равна $S = \dfrac{1}{2}(a + b)h = mh$ или $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

Виды трапеций

- Произвольная трапеция (в обще случае у такой трапеции все элементы — стороны и углы, имеют разные величины).
- Равнобедренная (равнобокая) трапеция — трапеция, у которой боковые стороны равны $c = d$. Свойства равнобедренной трапеции:
  - углы при каждом основании равны;
  - высота равнобедренной трапеции $h = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{a - b}{2}\right)^2}$;
  - диагонали равны и их длины могут быть вычислены через стороны трапеции $d = c^2 + ab$ или $d = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2}$.
- У прямоугольной трапеции одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям (образует два прямых угла с ними).