

Призма

Призма — многогранник две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы. Эти параллелограммы называются *боковыми гранями*, а равные многоугольники — *основаниями* призмы.

Ключевые элементы:

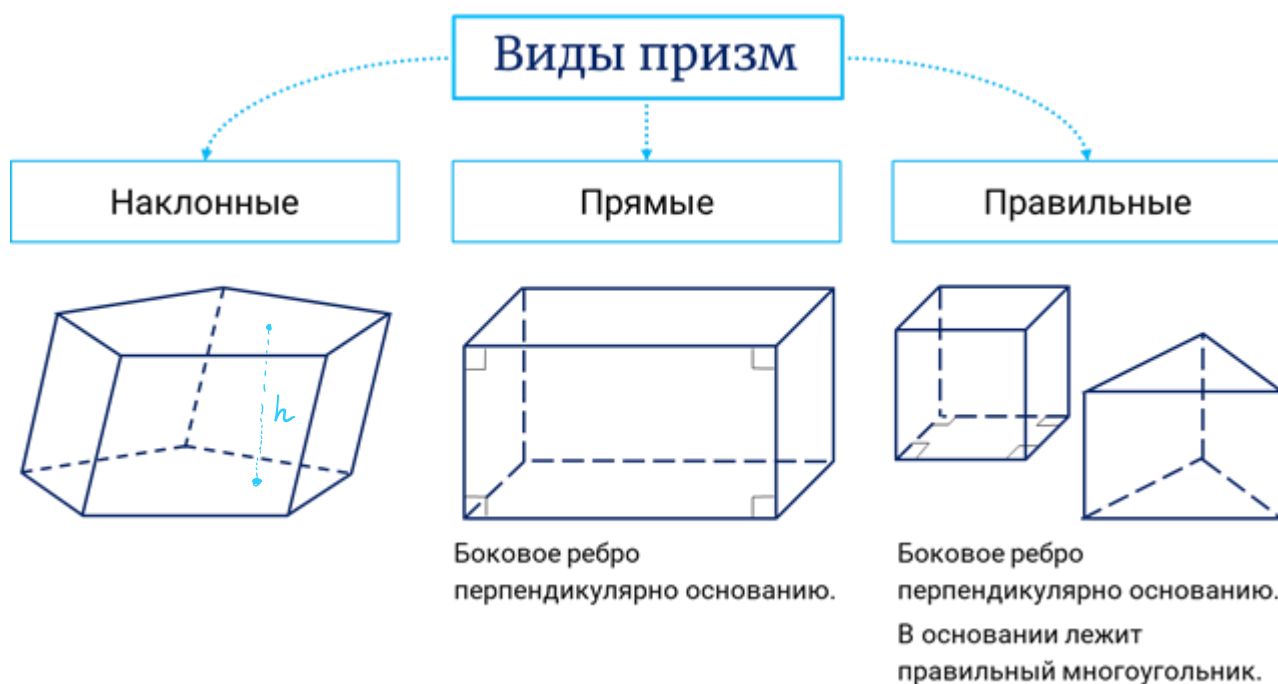
1. основания — два равных параллельных многоугольника;
2. боковые грани — параллелограммы;
3. боковые рёбра — отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований; противолежащие рёбра параллельны и равны между собой;
4. высота — расстояние между плоскостями оснований.

Виды призм:

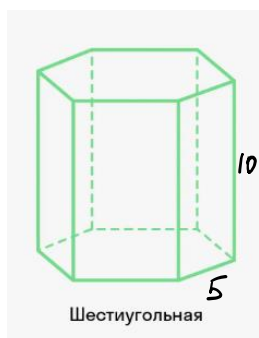
1. *прямая призма*: боковые рёбра перпендикулярны основаниям, а боковые грани — прямоугольники; в прямой призме высота равна боковому ребру;
2. *правильная призма*: это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник;
3. *наклонная призма*: боковые рёбра не перпендикулярны основаниям;
4. по форме основания: *треугольная* призма (основание — треугольник), *четырёхугольная* (частный случай четырёхугольной призмы — параллелепипед), *пятиугольная* и т. д.

Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности $S_{\text{пов}}$ равна сумме площади боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и удвоенному значению площади основания $S_{\text{осн}}$, т. е. $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$;
3. объём призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, h — где высота призмы.



3.1. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



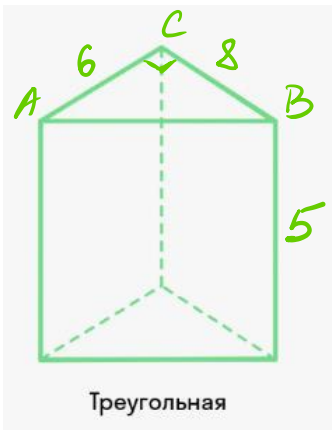
$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\text{гр}}_{\text{прям}}$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 30 \cdot 10$$

300



3.2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объём призмы.



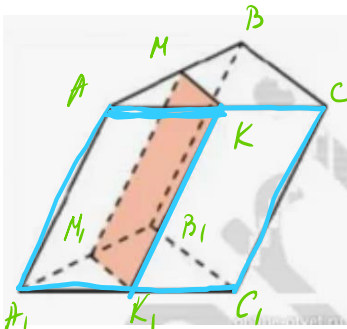
∠C - прямой

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$h = 5, \quad S_{\text{осн}} = S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$V = 5 \cdot 24 = 120$$

3.3. [демо-2014] Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



МК - средняя линия ΔABC
 $(M, K) -$ средняя линия $\Delta A, B, C_1$

$$S_{\text{бок}} = 24$$

$$S_{\text{бок}}_{AMKA, M, K_1} = ?$$

$МК, М_1 \parallel BCC_1B_1$ S в 2 раза меньше
 $ММ_1$ делит пополам AA_1, BB_1
 KK_1 делит пополам AA_1, CC_1

$$S_{\text{бок нов}} = 12$$

II способ : $S_{\text{бок}} = S_{AA_1CC_1} + S_{AA_1BB_1} + S_{BB_1CC_1} = 24$

$$AB = c, \quad AC = b, \quad BC = a, \quad AA_1 = x$$

$$S_{AA_1CC_1} = AC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha = b \cdot x \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AA_1BB_1} = c \cdot x \cdot \sin \beta$$

$$S_{BB_1CC_1} = a \cdot x \cdot \sin \gamma$$

$$S_{\text{бок}} = b \cdot x \cdot \sin \alpha + c \cdot x \cdot \sin \beta + a \cdot x \cdot \sin \gamma = 24$$

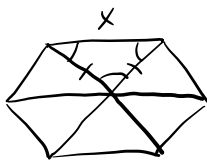
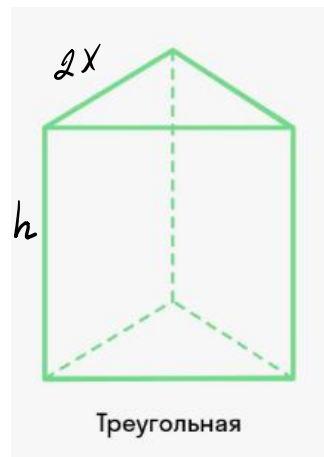
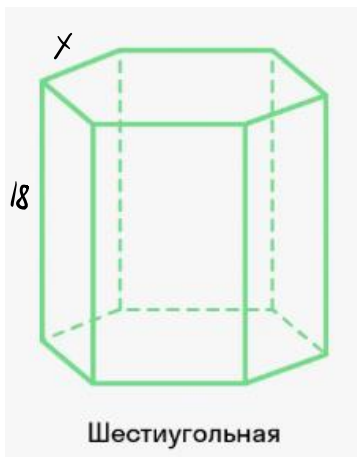
Новая призма

$$S_{\text{бок}} = S_{AA_1K_1K} + S_{AA_1M_1M} + S_{MM_1K_1K}$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} b \cdot x \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} c \cdot x \sin \beta + \frac{1}{2} a \cdot x \sin \gamma =$$

$$= \frac{1}{2} (b x \sin \alpha + c x \sin \beta + a x \sin \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

3.4. [ЕГЭ-2023] Кусок льда представляет собой правильную шестиугольную призму высотой 18 см. Его планируют расплавить и вновь заморозить так, чтобы получилась правильная треугольная призма, сторона основания которой в 2 раза больше стороны основания исходной. Чему будет равна её высота? Ответ дайте в сантиметрах.



$$S_{\text{одн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$h = ?$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$[S_6 \cdot 18 = S_3 \cdot h]$$

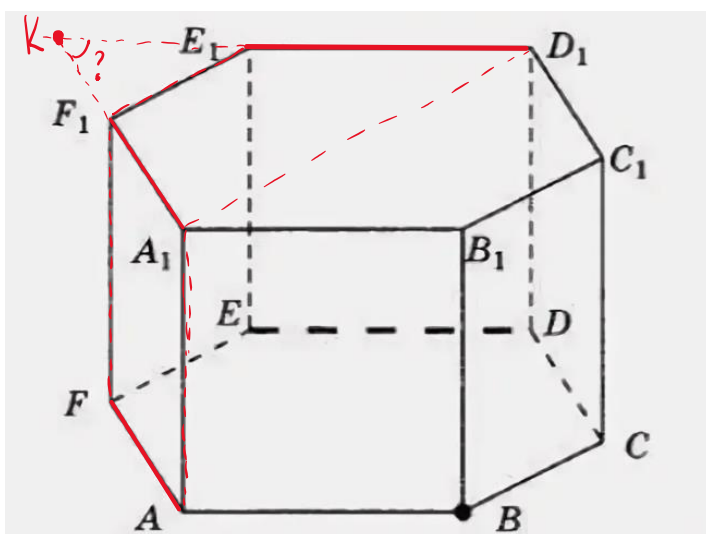
$$S_6 = 6 \cdot S_{\Delta} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2x)^2$$

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 \cdot 18 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot x^2 \cdot h$$

$$h = \frac{6 \cdot 18}{4} = 3 \cdot 9 = 27$$

3.5. [ЕГЭ-2013] В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 5, найдите угол между прямыми FA и $D_1 E_1$. Ответ дайте в градусах.

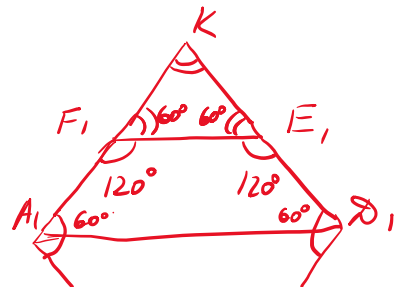


$$\Delta E_1 F_1 K$$

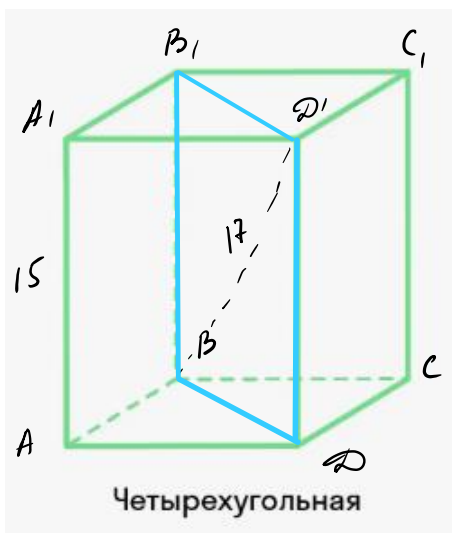
или

$$\Delta A_1 D_1 K$$

$$\angle K = 60^\circ$$

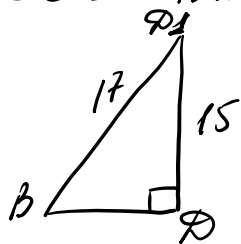


3.6. [ЕГЭ-2015] В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .



$AA_1, CC_1, DD_1 = BB_1, DD_1, DD_1$ - сечение

$$S_{\text{сеч}} = BB_1 \cdot BD = 15 \cdot BD$$



$$BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$S_{\text{сеч}} = 15 \cdot 8 = 120$$

3.7. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в см^3 .

$$V_{\text{в+г}} = V_{\text{в}} + V_{\text{г}} ; \quad V_{\text{в+г}} = 2300 + V_{\text{г}} \Rightarrow$$

$$V_{\text{г}} = V_{\text{в+г}} - 2300$$

$$V_{\text{в+г}} = S_{\text{осн}} \cdot h_{\text{вода}} = S_{\text{осн}} \cdot 27$$

$$V_{\text{в}} = S_{\text{осн}} \cdot h_{\text{вода}} = S_{\text{осн}} \cdot 25 = 2300 \Rightarrow S_{\text{осн}} = \frac{2300}{25}$$

$$S_{\text{осн}} = 23 \cdot 4$$

$$V_{\text{в+г}} = (23 \cdot 4) \cdot 27$$

$$V_{\text{г}} = 23 \cdot 4 \cdot 27 - 2300 = 23 \cdot 4 (27 - 25) = 23 \cdot 4 \cdot 2 = 92 \cdot 2 = 184$$

Пирамида

Пирамида — то многогранник, у которого одна грань (*основание*) является многоугольником, а все остальные грани (*боковые*) — треугольники, имеющие общую вершину (*вершину пирамиды*).

Ключевые элементы:

1. основание — любой многоугольник;
2. вершина (*апекс*) — общая вершина всех боковых треугольников;
3. боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине;
4. боковые рёбра — отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания;
5. высота — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

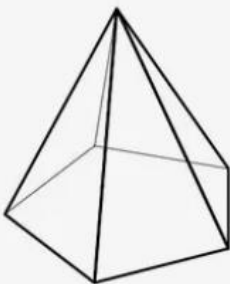
Виды пирамид:

1. *правильная пирамида*: в основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром основания (центром описанной или вписанной окружности); в такой пирамиде:
 - все боковые рёбра равны;
 - все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
 - *апофема* — высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды в правильной пирамиде;
2. *неправильная пирамида*: это пирамида, для которой не выполняются какие-либо условия правильности (например, вершина не проецируется в центр основания);
3. по форме основания: *треугольная* пирамида (основание — треугольник; частный случай треугольной пирамиды — тетраэдр — все грани равные правильные треугольники), *четырёхугольная*, *пятиугольная* и т. д.;
4. *усечённая пирамида*: многогранник, полученный сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию; у такой пирамиды два основания (одинаковые по форме многоугольники) и боковые грани — трапеции.

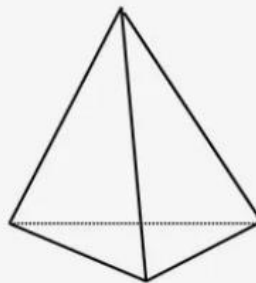
Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности $S_{\text{пов}}$ равна сумме площади боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и основания $S_{\text{осн}}$, т. е. $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$;
3. объём пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$, h — где высота пирамиды.

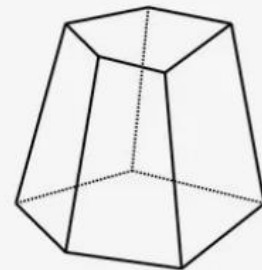
Пирамида называется n -угольной если ее основанием является n -угольник.



Правильная пирамида — основания правильные многоугольники, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.



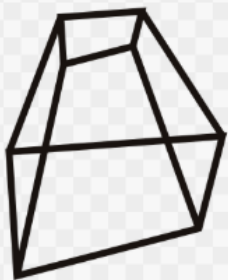
Усеченная пирамида — многогранник, полученный при пересечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию и пересекающей ее боковые ребра



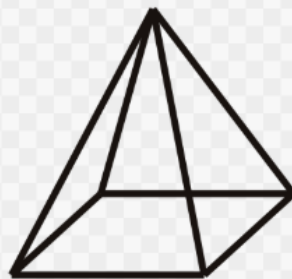
Произвольная пирамида



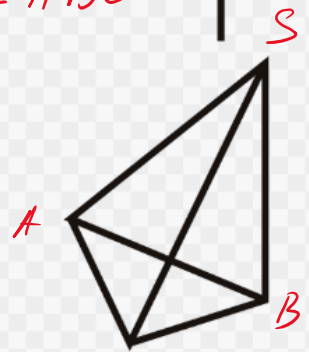
$$ABS \perp ABC$$



Усеченная пирамида

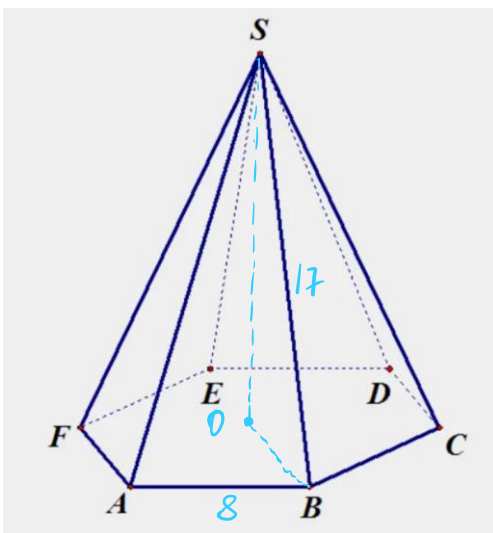


Правильная пирамида



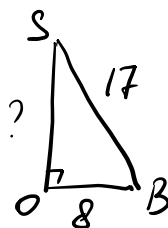
Прямоугольная пирамида

3.8. [ЕГЭ-2015] В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 17, а сторона основания равна 8. Найдите высоту пирамиды.



то св-ву прав. 6-угольника

$$AB = OB = 8$$

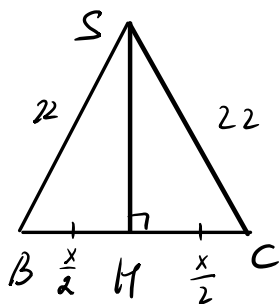
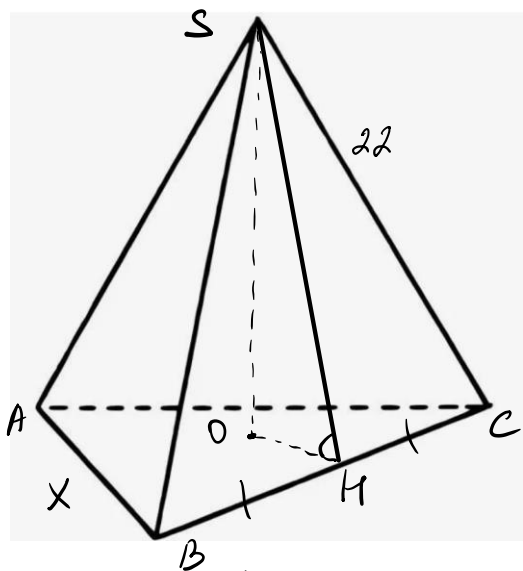


$$SO = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

3.9. [ЕГЭ-2015] В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}$. Найти сторону основания пирамиды.

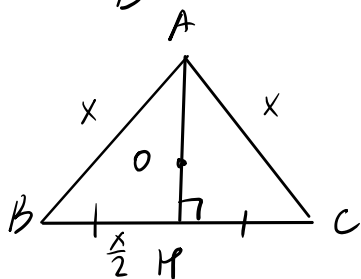
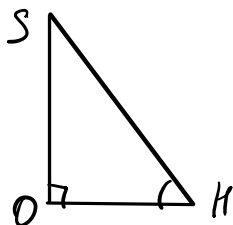
$$\operatorname{tg} \angle HOS = \frac{1}{4} \sqrt{11}$$

$$x = ?$$



$$SH = \sqrt{22^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\operatorname{tg} SHO = \frac{SO}{OH}$$



$$\frac{AO}{OH} = \frac{2}{1}; \quad AH = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$$\operatorname{tg}: \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{SO}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}x = \frac{\sqrt{33}}{24}x$$

$\triangle SOH$: т. Пифагора

$$SO^2 + OH^2 = SH^2$$

$$\frac{33}{24^2}x^2 + \frac{3}{6^2}x^2 = 22^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{33}{576}x^2 + \frac{3}{36}x^2 + \frac{x^2}{4} = 22^2$$

$$\frac{11}{192}x^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{3x^2}{12} = 22^2$$

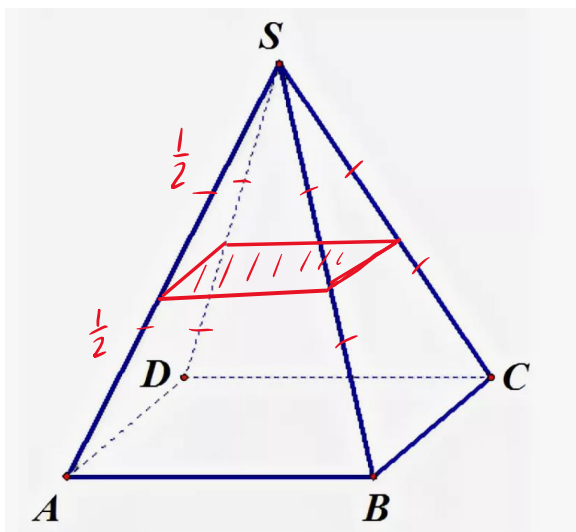
$$\frac{11}{192}x^2 + \frac{x^2}{3} = 22^2$$

$$\frac{75}{192}x^2 = 22^2 \Rightarrow x^2 = \frac{22^2 \cdot 192}{75}$$

$$x = 22 \cdot \sqrt{\frac{192}{75}} = 22 \cdot \sqrt{\frac{64}{25}} = 22 \cdot \frac{8}{5} = \frac{176}{5}$$

$$x = 35,2$$

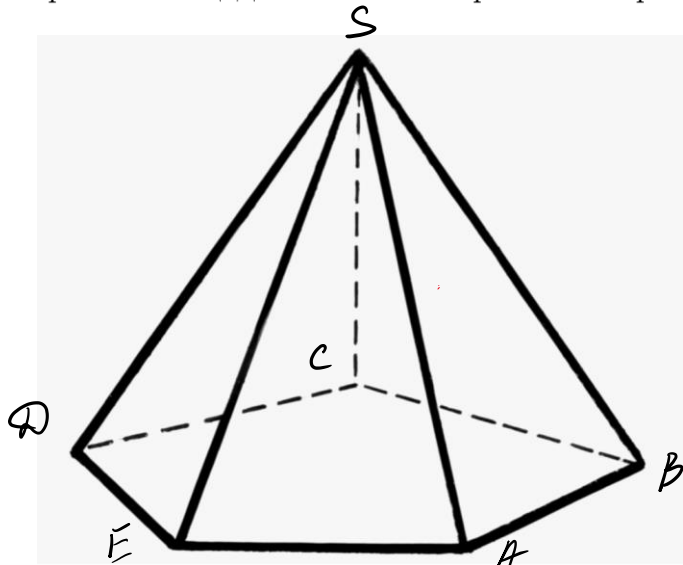
3.10. [ЕГЭ-2014] В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



сечение // основанию
сечение - квадрат
со сторонами $\frac{1}{2}$

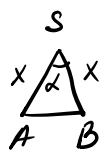
$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{4}$$

3.11. [ЕГЭ-2013] Площадь боковой поверхности пятиугольной пирамиды равна 13. Чему будет равна площадь боковой поверхности пирамиды, если все её рёбра уменьшить в 2 раза?



$$S_{\text{бок}} = 5 \cdot S_{\Delta} = 5 \cdot S_{ABS} = 13$$

$$S_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin \alpha$$



$$5 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha = 13$$

Новая :

$$S_{\text{бок}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sin \alpha = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{5 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha}_{13}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{13}{4} = 3,25$$

Если пирамида неправильная

$$S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 13$$

$$\frac{1}{2} AS \cdot BS \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} BS \cdot CS \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} CS \cdot DS \cdot \sin \gamma + \frac{1}{2} DS \cdot ES \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} ES \cdot AS \cdot \sin \psi = 13$$

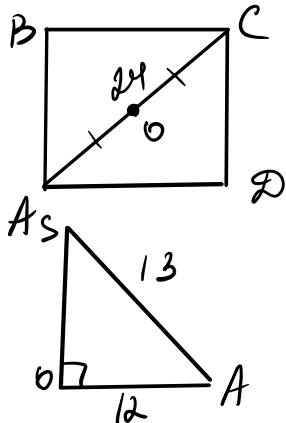
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AS \cdot \frac{1}{2} BS \cdot \sin \alpha + \dots = \frac{1}{4} \left[\frac{S_{\text{бок}}}{\text{чисел}} \right] = \frac{13}{4}$$

3.12. [ЕГЭ-2013] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2. Объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot SO = 6 \Rightarrow SO = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

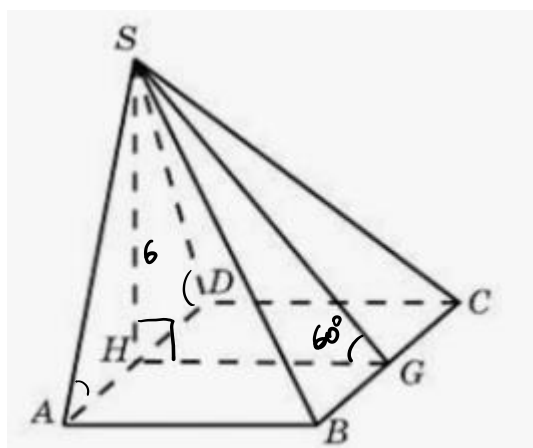
3.13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SB = 13$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO .



$$S_{\text{осн}} = AB^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{24^2}{2} = 12 \cdot 24$$

$$h = SO = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$$

3.14. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



$$\begin{aligned} \angle SHG &= 90^\circ \\ \angle SGH &= 60^\circ \\ \angle SAD &= 60^\circ \\ \angle SDA &= 60^\circ \end{aligned} \quad SH = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot AD \cdot SH$$

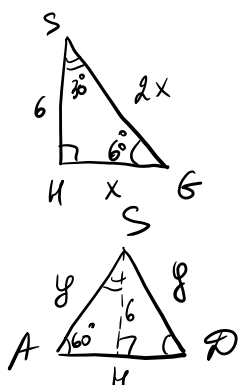
$$6^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 6^2$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} = AB$$

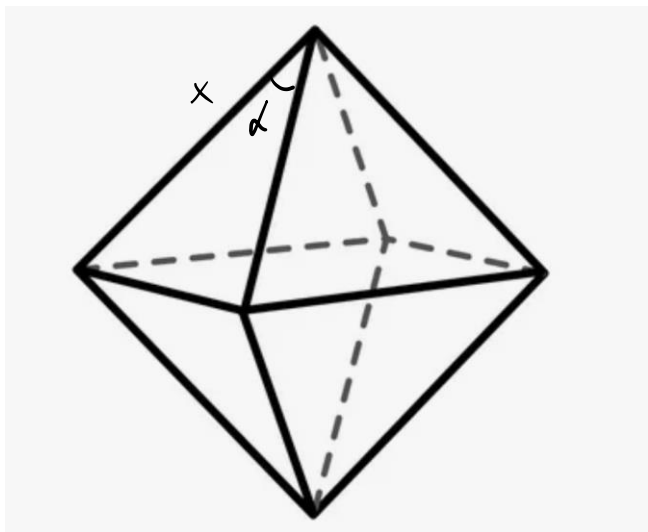
$$\sin 60^\circ = \frac{6}{y} \quad (\sin SAH = \frac{SH}{AS})$$

$$y = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} = AD$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 48$$



3.15. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



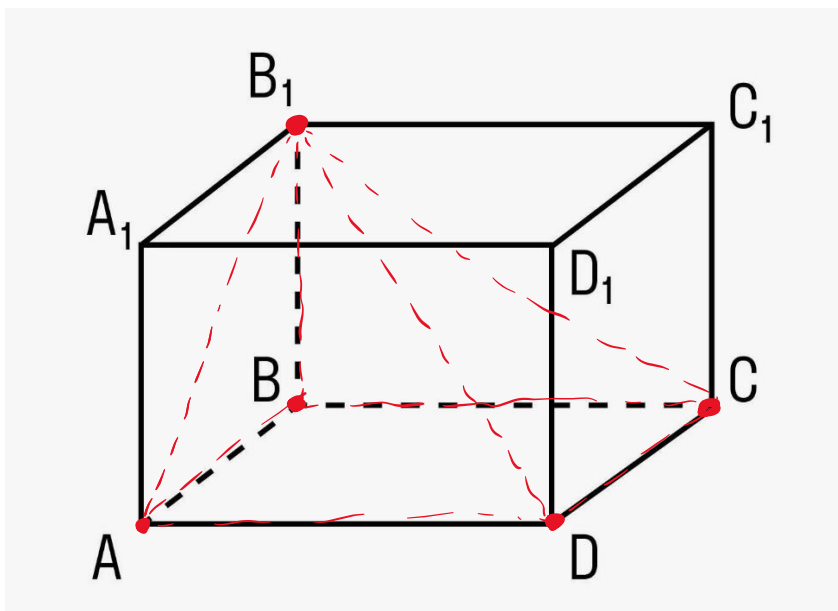
$$S_{\text{ок}}^c = 8 \cdot S_{\Delta} =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\text{ок}}^н = 8 \cdot \frac{1}{2} (3x)^2 \sin \alpha =$$

$$= 9 \cdot \underbrace{8 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha}_{S_{\text{ок}}^c}$$

3.16. [ЕГЭ-2023] Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, BC = 7, BB_1 = 5$.



$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot AB \cdot \underbrace{AD}_{BC} \cdot BB_1 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 35$$