

Многогранники

0 КУРС МЕХМАТА ЮФУ*

Куб

Куб — правильный многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Некоторые элементы куба

1. *Грань* — плоские поверхности, ограничивающие куб, все грани — равные квадраты. У куба 6 граней.
2. *Рёбра* — отрезки, которые соединяют соседние вершины куба. Все рёбра имеют одинаковую длину. У куба 12 рёбер.
3. *Вершины* — точки пересечения трёх рёбер. В каждой вершине куба сходятся три грани, образуя угол в 90 градусов. Всего у куба 8 вершин.
4. *Диагонали граней* — каждая грань куба имеет две диагонали, которые соединяют противоположные углы квадрата. У куба всего 12 диагоналей граней (по 2 на каждую из 6 граней).
5. *Пространственные диагонали (диагонали куба)* — диагонали, которые соединяют противоположные вершины куба через его внутреннее пространство. У куба их всего 4. Все диагонали куба равны.

Пусть a — длина ребра куба. Тогда

- площадь поверхности куба $S_{\text{пов}} = 6a^2$
- объём куба $V = a^3$
- диагональ куба $D = a\sqrt{3}$

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: dolgikh@sfedu.ru, @DolgikhTF.

Прямоугольный параллелепипед

Прямоугольный параллелепипед (кубоид) — многогранник с шестью гранями, каждая из которых является прямоугольником. Также иногда называется *прямолинейным*, так как у него все грани представляют собой прямоугольники, а все двугранные углы — прямые (равны 90°).

Прямоугольный параллелепипед имеет:

1. 6 граней (каждая — прямоугольник); противолежащие грани равны и параллельны;
2. 12 рёбер (противоположные рёбра равны и параллельны); *измерения* — длина, ширина и высота параллелепипеда — длины ребёр, выходящих из одной общей вершины; в частном случае, когда все рёбра параллелепипеда равны, получаем куб;
3. 8 вершин (в каждой сходятся три ребра);
4. 4 диагонали параллелепипеда пересекаются в одной общей точке; все диагонали параллелепипеда равны.

Пусть измерения параллелепипеда равны a , b и c . Тогда

- площадь поверхности параллелепипеда $S_{\text{пов}} = 2(ab + ac + bc)$
- объём параллелепипеда $V = abc$
- диагональ параллелепипеда $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Призма

Призма — многогранник две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы. Эти параллелограммы называются *боковыми гранями*, а равные многоугольники — *основаниями* призмы.

Ключевые элементы:

1. основания — два равных параллельных многоугольника;
2. боковые грани — параллелограммы;
3. боковые рёбра — отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований; противолежащие рёбра параллельны и равны между собой;
4. высота — расстояние между плоскостями оснований.

Виды призм:

1. *прямая призма*: боковые рёбра перпендикулярны основаниям, а боковые грани — прямоугольники; в прямой призме высота равна боковому ребру;
2. *правильная призма*: это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник;
3. *наклонная призма*: боковые рёбра не перпендикулярны основаниям;
4. по форме основания: *треугольная* призма (основание — треугольник), *четырёхугольная* (частный случай четырёхугольной призмы — параллелепипед), *пятиугольная* и т. д.

Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности $S_{\text{пов}}$ равна сумме площади боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и удвоенному значению площади основания $S_{\text{осн}}$, т. е. $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$;
3. объём призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, h — где высота призмы.

Пирамида

Пирамида — то многогранник, у которого одна грань (*основание*) является многоугольником, а все остальные грани (*боковые*) — треугольники, имеющие общую вершину (*вершину пирамиды*).

Ключевые элементы:

1. основание — любой многоугольник;
2. вершина (*апекс*) — общая вершина всех боковых треугольников;
3. боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине;
4. боковые рёбра — отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания;
5. высота — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Виды пирамид:

1. *правильная пирамида*: в основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром основания (центром описанной или вписанной окружности); в такой пирамиде:
 - все боковые рёбра равны;
 - все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
 - *апофема* — высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды в правильной пирамиде;
2. *неправильная пирамида*: это пирамида, для которой не выполняются какие-либо условия правильности (например, вершина не проецируется в центр основания);
3. по форме основания: *треугольная* пирамида (основание — треугольник; частный случай треугольной пирамиды — тетраэдр — все грани равные правильные треугольники), *четырёхугольная*, *пятиугольная* и т. д.;
4. *усечённая пирамида*: многогранник, полученный сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию; у такой пирамиды два основания (одинаковые по форме многоугольники) и боковые грани — трапеции.

Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности $S_{\text{пов}}$ равна сумме площади боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и основания $S_{\text{осн}}$, т. е. $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$;
3. объём пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, h — где высота пирамиды.