

# Многогранники

0 КУРС МЕХМАТА ЮФУ\*

## Куб

**Куб** — правильный многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

### Некоторые элементы куба

1. *Грани* — плоские поверхности, ограничивающие куб, все грани — равные квадраты. У куба 6 граней.
2. *Рёбра* — отрезки, которые соединяют соседние вершины куба. Все рёбра имеют одинаковую длину. У куба 12 рёбер.
3. *Вершины* — точки пересечения трёх рёбер. В каждой вершине куба сходятся три грани, образуя угол в 90 градусов. Всего у куба 8 вершин.
4. *Диагонали граней* — каждая грань куба имеет две диагонали, которые соединяют противоположные углы квадрата. У куба всего 12 диагоналей граней (по 2 на каждую из 6 граней).
5. *Пространственные диагонали (диагонали куба)* — диагонали, которые соединяют противоположные вершины куба через его внутреннее пространство. У куба их всего 4. Все диагонали куба равны.

Пусть  $a$  — длина ребра куба. Тогда

- площадь поверхности куба  $S_{\text{пов}} = 6a^2$
- объём куба  $V = a^3$
- диагональ куба  $D = a\sqrt{3}$

---

\*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: [dolgikh@sfedu.ru](mailto:dolgikh@sfedu.ru), @DolgikhTF.

### Прямоугольный параллелепипед

**Прямоугольный параллелепипед** (кубоид) — многогранник с шестью гранями, каждая из которых является прямоугольником. Также иногда называется *прямолинейным*, так как у него все грани представляют собой прямоугольники, а все двугранные углы — прямые (равны  $90^\circ$ ).

**Прямоугольный параллелепипед имеет:**

1. 6 граней (каждая — прямоугольник); противоположащие грани равны и параллельны;
2. 12 рёбер (противоположные рёбра равны и параллельны); *измерения* — длина, ширина и высота параллелепипеда — длины рёбер, выходящих из одной общей вершины; в частном случае, когда все рёбра параллелепипеда равны, получаем куб;
3. 8 вершин (в каждой сходятся три ребра);
4. 4 диагонали параллелепипеда пересекаются в одной общей точке; все диагонали параллелепипеда равны.

Пусть измерения параллелепипеда равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда

- площадь поверхности параллелепипеда  $S_{\text{пов}} = 2(ab + ac + bc)$
- объём параллелепипеда  $V = abc$
- диагональ параллелепипеда  $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

## Призма

**Призма** — многогранник две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы. Эти параллелограммы называются *боковыми гранями*, а равные многоугольники — *основаниями* призмы.

### Ключевые элементы:

1. основания — два равных параллельных многоугольника;
2. боковые грани — параллелограммы;
3. боковые рёбра — отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований; противолежащие рёбра параллельны и равны между собой;
4. высота — расстояние между плоскостями оснований.

### Виды призм:

1. *прямая призма*: боковые рёбра перпендикулярны основаниям, а боковые грани — прямоугольники; в прямой призме высота равна боковому ребру;
2. *правильная призма*: это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник;
3. *наклонная призма*: боковые рёбра не перпендикулярны основаниям;
4. по форме основания: *треугольная* призма (основание — треугольник), *четырёхугольная* (частный случай четырёхугольной призмы — параллелепипед), *пятиугольная* и т. д.

### Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности  $S_{\text{бок}}$  равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности  $S_{\text{пов}}$  равна сумме площади боковой поверхности  $S_{\text{бок}}$  и удвоенному значению площади основания  $S_{\text{осн}}$ , т. е.  $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ ;
3. объём призмы  $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ ,  $h$  — где высота призмы.

## Пирамида

**Пирамида** — то многогранник, у которого одна грань (*основание*) является многоугольником, а все остальные грани (*боковые*) — треугольники, имеющие общую вершину (*вершину пирамиды*).

### Ключевые элементы:

1. основание — любой многоугольник;
2. вершина (*апекс*) — общая вершина всех боковых треугольников;
3. боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине;
4. боковые рёбра — отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания;
5. высота — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

### Виды пирамид:

1. *правильная пирамида*: в основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром основания (центром описанной или вписанной окружности); в такой пирамиде:
  - все боковые рёбра равны;
  - все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
  - *апофема* — высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды в правильной пирамиде;
2. *неправильная пирамида*: это пирамида, для которой не выполняются какие-либо условия правильности (например, вершина не проецируется в центр основания);
3. по форме основания: *треугольная* пирамида (основание — треугольник; частный случай треугольной пирамиды — тетраэдр — все грани равные правильные треугольники), *четырёхугольная*, *пятиугольная* и т. д.;
4. *усечённая пирамида*: многогранник, полученный сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию; у такой пирамиды два основания (одинаковые по форме многоугольники) и боковые грани — трапеции.

### Основные формулы:

1. площадь боковой поверхности  $S_{\text{бок}}$  равна сумме площадей всех боковых граней;
2. площадь (полной) поверхности  $S_{\text{пов}}$  равна сумме площади боковой поверхности  $S_{\text{бок}}$  и основания  $S_{\text{осн}}$ , т. е.  $S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ ;
3. объём пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ ,  $h$  — где высота пирамиды.