**Исследование устойчивости стационарных состояний линейных автономных динамических систем первого порядка. Построение фазового портрета**

Для исследования устойчивости стационарных состояний и построения фазового портрета линейной динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad (1)$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \qquad (2)$$

надо выполнить следующие действия.

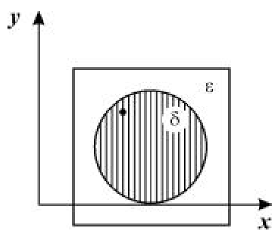
1. Определить особые точки системы.
2. Найти корни характеристического уравнения системы, т.е. собственные числа матрицы коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, и в зависимости от их вида определить характер особых точек.
3. Построить фазовый портрет на плоскости (x,y), изобразив поле направлений и несколько траекторий, характеризующих тип каждой особой точки.

**Особая точка динамической системы**

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. *Автономными* называются уравнения, правая часть которых не зависит явно от независимой переменной $t$. Особой точкой системы $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = P(x, y)$ или уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, где функции $P$ и $Q$ непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$. Синонимы термина «*особая точка*»: *стационарное состояние*, *состояние равновесия*.

**Устойчивость особой точки**

Устойчива или нет особая точка, определяется тем, уйдет или нет изображающая точка при малом отклонении от стационарного состояния. Применительно к системе из двух уравнений определение устойчивости на языке ε, δ выглядит следующим образом.




*Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия* ($\varepsilon$) *можно указать область* $\delta(\varepsilon)$, *окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области* $\delta$, *никогда не достигнет границы* $\varepsilon$ (см. рисунок).

**Виды фазовых портретов линейных систем**

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений (1). Очевидно, что от системы (1) можно перейти к уравнению (2), и наоборот. Для линейной системы $P(x, y) = ax + by$ , $Q(x, y) = cx + dy$ , поэтому решение линейной системы

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

будет зависеть от определителя матрицы коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

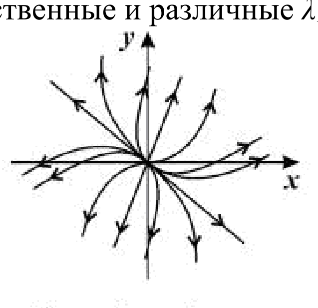
Особой точкой линейной системы будет точка (0,0), если определитель матрицы $A$ отличен от нуля (матрица невырожденная). Если же определитель матрицы $A$ обращается в ноль (матрица вырожденная), значит, коэффициенты правых частей уравнений линейно системы пропорциональны друг другу $a / b = c / d$ , и система имеет своими состояниями равновесия все точки прямой $a \cdot x + b \cdot y = 0$ .

Пусть $\lambda_1$ , $\lambda_2$ – собственные значения матрицы $A$ , т.е. корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

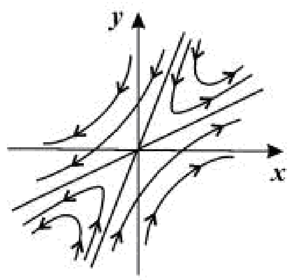
Если оба корня <u>ненулевые</u> (т.е. определитель матрицы системы отличен от нуля), то возможны следующие варианты:

1) Корни $\lambda_1, \lambda_2$ – вещественные и различные $\lambda_1 \neq \lambda_2$


Устойчивый узел.
( $\lambda_1$, $\lambda_2$ отрицательны)

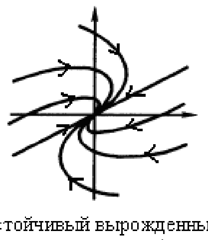



Неустойчивый узел.
( $\lambda_1$, $\lambda_2$ положительны)



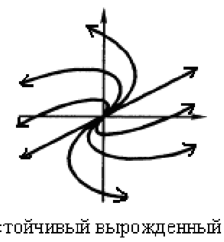

Седло ( $\lambda_1$, $\lambda_2$ - разных знаков)
неустойчивое состояние равновесия

2) Корни $\lambda_1$ , $\lambda_2$ – вещественные и равны между собой $\lambda_1 = \lambda_2$

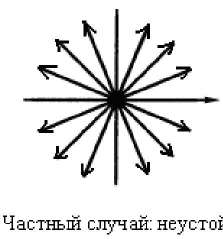


Устойчивый вырожденный узел
(корень отрицателен)

Частный случай: устойчивый
дикритический узел

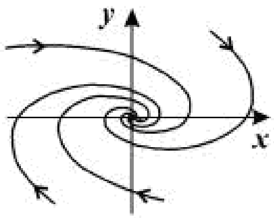


Неустойчивый вырожденный узел
(корень положителен)

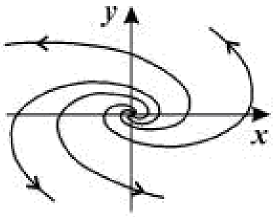


Частный случай: неустойчивый
дикритический узел

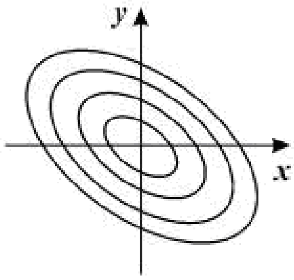
3) Корни $\lambda_1$, $\lambda_2$ – комплексные




Устойчивый фокус
( $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$)



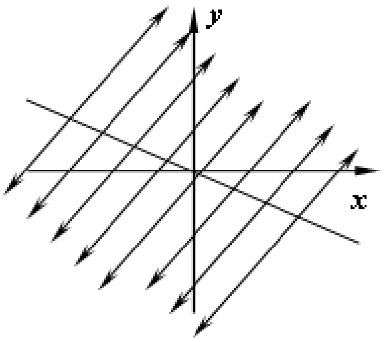

Неустойчивый фокус
( $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$)




Центр ( $\lambda_1$, $\lambda_2$ - чисто мнимые)
устойчивое состояние равновесия

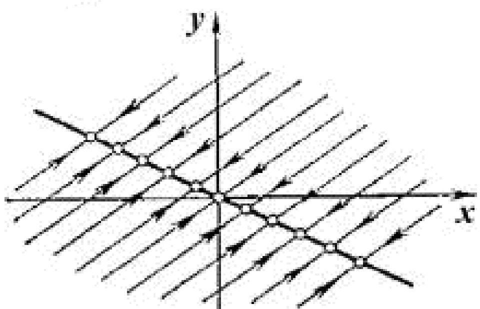
Если <u>один из корней равен нулю</u> (т.е. определитель матрицы системы равен нулю, матрица вырожденная), то особая точка вырождается в прямую и называется в этом случае *непростой*. Возможные варианты:

1) Один из корней равен нулю, а другой – положителен




Непростая особая точка,
неустойчивое состояние равновесия

2) Один из корней равен нулю, а другой – отрицателен




Непростая особая точка, устойчивое
состояние равновесия

**Примеры построения фазовых портретов линейных систем в Maple**

Пример 1.

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}$$

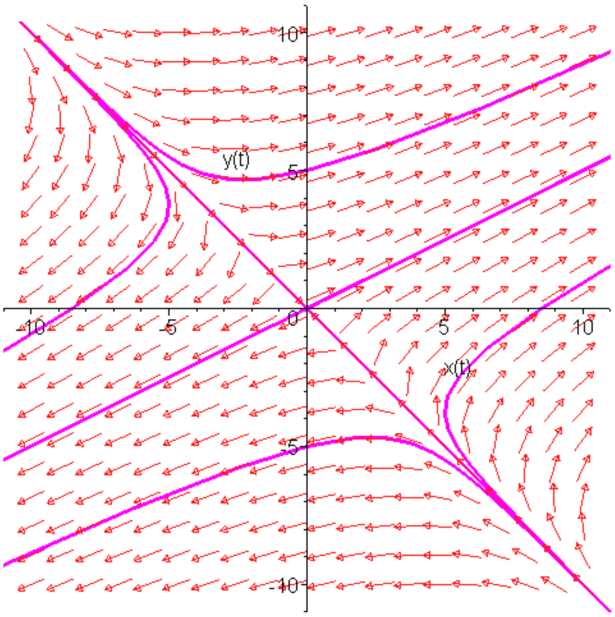



Рис.1 Фазовый портрет: седло

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

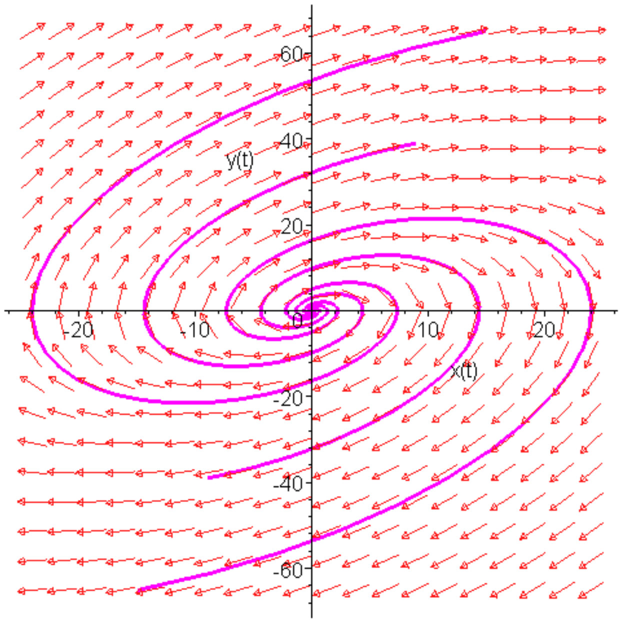



Рис.2 Фазовый портрет: неустойчивый фокус

Отметим, что для линейных автономных динамических систем первого порядка фазовые портреты в окрестности особой точки не зависят от выбранного диапазона по осям, что видно из рисунков выше.