Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных автономных динамических систем первого порядка. Построение фазового портрета

Для исследования устойчивости стационарных состояний и построения фазового портрета нелинейной динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y); \end{cases} \tag{1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{2}$$

надо выполнить следующие действия.

1. Определить особые точки.
2. Найти линеаризации системы в каждой особой точке. Для этого перенести начало координат в особую точку и разложить правые части уравнений в ряд Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка.
3. С помощью теоремы о линеаризации (теоремы Ляпунова) определить, где это возможно, тип особой точки для нелинейной системы. Если особая точка линейной системы является центром, то проанализировать, какой характер будет иметь соответствующая особая точка исходной системы.
4. Построить фазовые портреты на плоскости (x,y) исходной нелинейной системы и локальные фазовые портреты в положениях равновесия. Изобразить поле направлений и, по возможности, несколько траекторий, характеризующих тип каждой особой точки.

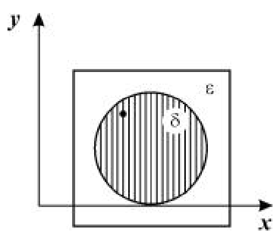
Особая точка динамической системы

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. *Автономными* называются уравнения, правая часть которых не зависит явно от независимой переменной t. Особой точкой системы $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = P(x, y)$ или уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, где функции P и Q непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$. Синонимы термина «*особая точка*»: *стационарное состояние*, *состояние равновесия*.

Устойчивость особой точки

Устойчива или нет особая точка, определяется тем, уйдет или нет изображающая точка при малом отклонении от стационарного состояния. Применительно к системе из двух уравнений определение устойчивости на языке ε, δ выглядит следующим образом.

Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) *можно указать область*



$\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε (см. рисунок).

Исследование устойчивости стационарных состояний нелинейных систем первого порядка

Для исследования особой точки системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x, y) \tag{1}$$

или уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

надо перенести начало координат в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1 + by_1 + \varphi(x_1, y_1), \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = cx_1 + dy_1 + \psi(x_1, y_1), \tag{3}$$

где x_1, y_1 — новые координаты (после переноса), a, b, c, d — постоянные. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0, \quad \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0 \text{ при } x_1 \to 0, \ y_1 \to 0,$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Очевидно, это условие выполняется (при любом $\varepsilon < 1$), если функции P и Q в исследуемой точке дважды дифференцируемы.

Предположим еще, что вещественные части всех корней характеристического уравнения системы

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1 + by_1, \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = cx_1 + dy_1 \tag{4}$$

получаемой отбрасыванием функций φ и ψ, отличны от нуля.

Тогда особая точка $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ системы (3) будет того же типа, что особая точка системы (4)

В том случае, когда для системы (4) особая точка — центр, для системы (3) она может быть фокусом или центром. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы траектории системы (3) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Ось симметрии, очевидно, существует, если уравнение вида (2), к которому можно привести систему (3), не меняется от замены x на $-x$ (или y на $-y$). Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (3) было асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

Русский математик Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918) показал, что в большом числе случаев анализ устойчивости стационарного состояния нелинейной системы можно заменить анализом устойчивости системы, линеаризованной в окрестности стационарного состояния. Справедлива следующая теорема об устойчивости по первому приближению, доказанная Ляпуновым.

ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА

- Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют *отрицательные вещественные части* и, следовательно, все решения уравнений первого приближения (6) затухают, то нулевое состояние равновесия *асимптотически устойчиво;*
- Если *хотя бы один корень* характеристического уравнения системы первого приближения имеет *положительную вещественную часть*, то есть система (6) имеет нарастающие решения, то нулевое состояние равновесия *неустойчиво.*
- Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения нет ни одного с положительной вещественной частью, но есть корни с нулевой вещественной частью (чисто мнимые), то об устойчивости нулевого решения системы (6) нельзя судить на основании исследования только системы первого приближения, а необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений (5).
- В случае, когда все корни характеристического уравнения имеют *отличные от нуля вещественные части* (особая точка не является непростой или центром), фазовые портреты нелинейной системы и ее линеаризации качественно эквиваленты в окрестности особой точки. То есть в этом случае уравнение первого приближения определяют не только устойчивость стационарного состояния, но и характер фазовых траекторий в достаточно малой его окрестности.

Примеры построения фазовых портретов в Maple

Требуется построить нелинейный фазовый портрет заданной системы и локальные фазовые портреты в особых точках.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = -\sin y; \end{cases} \quad \text{линеаризованная в (0,0) система} \quad \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y; \end{cases}$$

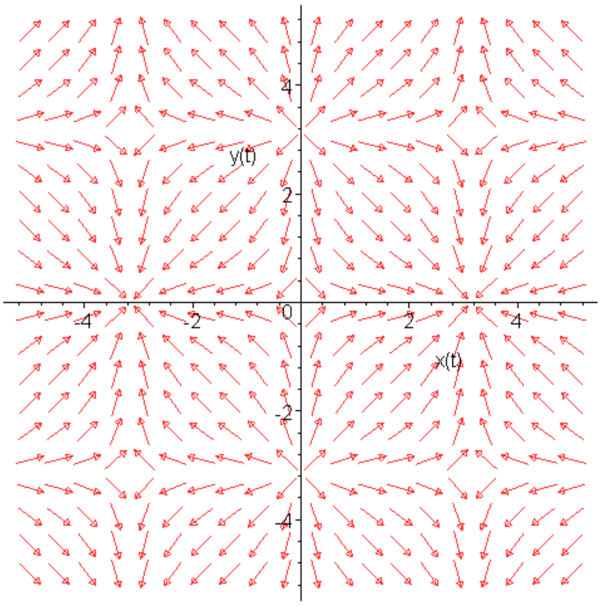


Рис.1 Нелинейный фазовый портрет

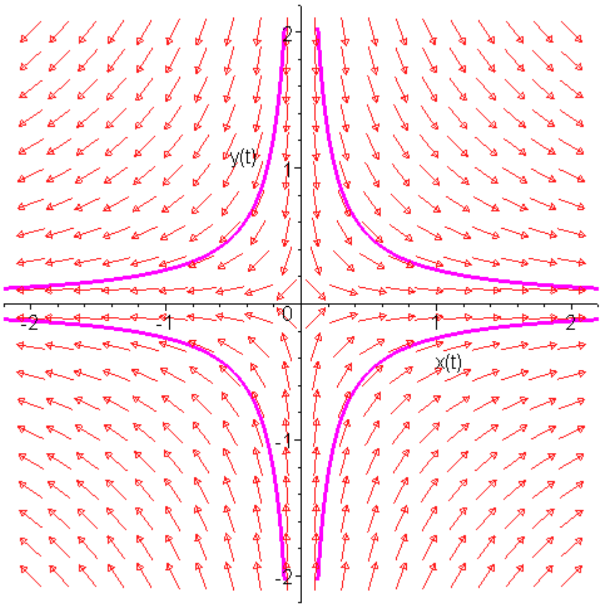


Рис.2 Линеаризация в (0,0): седло

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^3, \\ \dot{y} = y + x^3; \end{cases} \quad \text{линеаризованная в (0,0) система} \quad \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y; \end{cases}$$

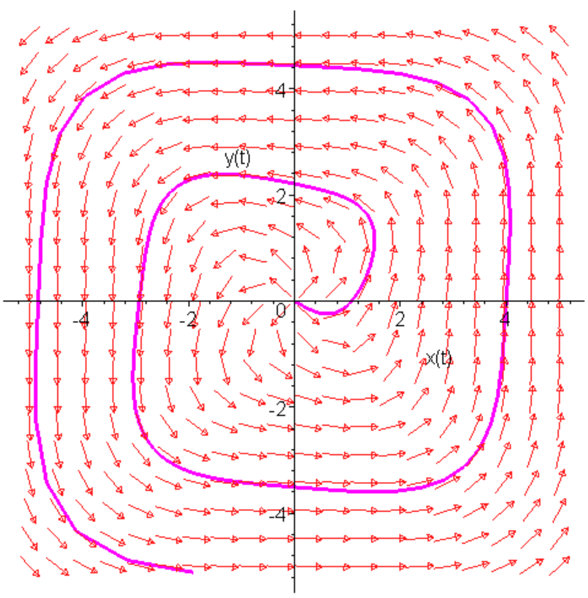


Рис.3 Нелинейный фазовый портрет

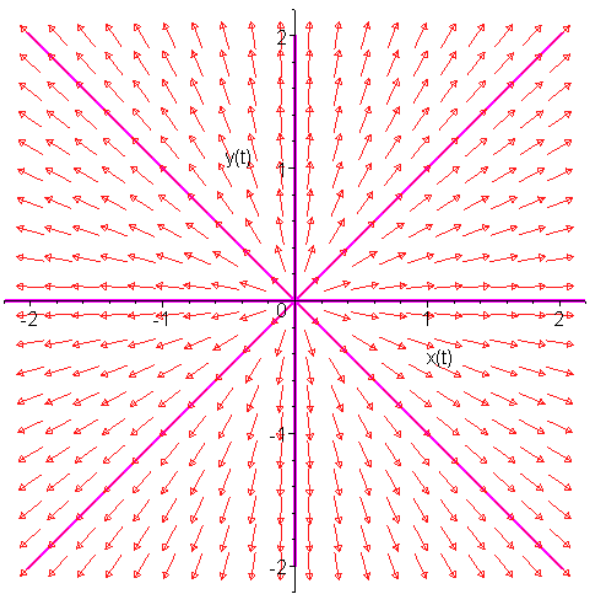


Рис.4 Линеаризация в (0,0): дикритический узел