

## Финансовая математика (ЕГЭ-16)

### Раздел 1. Вклады

16.1. Банковский вклад в мае увеличился на 30%, а в июне уменьшился на 30%, после чего на счёту оказалось 27 300 рублей. Сколько рублей составлял вклад на конец апреля?

Решение

Пусть  $x$  руб - это вклад на конец апреля. Тогда

$$x \cdot 1,3 \cdot 0,7 = 27300$$

Решим это ур-е и получим

$$x = 30000 \text{ (руб)}$$

Ответ: 30000 рублей

16.2. [Ск] Вкладчик снял со своего счёта в банке сначала  $\frac{1}{4}$  вклада, затем  $\frac{4}{9}$  оставшихся денег и ещё 640 рублей. После этого у него на вкладе осталось  $\frac{3}{20}$  всех его денег. Какова сумма первоначального вклада?

Решение.

Пусть  $x$  руб - сумма первоначального вклада.

Тогда

$$\left(x - \frac{1}{4}x\right) \cdot \frac{5}{9} - 640 = \frac{3}{20}x$$

$$\frac{3}{4}x \cdot \frac{5}{9} - 640 = \frac{3}{20}x$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{3}{20}x = 640$$

$$\frac{16}{60}x = 640$$

$$x = \frac{640 \cdot 60}{16} = 40 \cdot 60$$

$$x = 2400 \text{ (руб)}$$

Ответ: 2400 рублей

16.3. Какой вклад выгоднее: первый — на 1 год под 16% годовых или второй — на 4 месяца (с автоматической пролонгацией каждые четыре месяца в течение года с момента открытия вклада) под 15% годовых? При расчётах считайте, что один месяц равен  $\frac{1}{12}$  части года.

Решение.

Пусть  $x$  руб — это сумма вклада.

Рассмотрим первый план вклада:

$x \cdot 1,16$  руб — это итоговая сумма

согласно второму плану в конце года получим итоговую сумму:

$x \cdot 1,05^3$  руб

Вычислим отношение итоговых сумм по двум планам:

$$\frac{x \cdot 1,16}{x \cdot 1,05^3} = \frac{1,16}{1,05^3} = \frac{116}{105 \cdot 1,05^2} = \frac{11600}{105^2 \cdot 1,05} = \frac{1160000}{105^3} = \frac{1160000}{1157625} > 1$$

Сред-но, сумма полученная в первом случае будет больше, чем во втором.

Ответ: выгоднее 1 план

16.4. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при которой через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей. Ответ дайте в млн рублей.

Решение.

Пусть  $x$  млн руб — размер суммы, добавляемый к вкладу в начале 3 и 4 года. Тогда

$$((10 \cdot 1,1^2 + x) \cdot 1,1 + x) \cdot 1,1 \geq 30$$

$$10 \cdot 1,1^4 + \underline{x \cdot 1,1^2 + x \cdot 1,1} \geq 30$$

$$x \cdot 1,1 (1,1 + 1) \geq 30 - 10 \cdot 1,1^4$$

$$x \cdot 1,1 \cdot 2,1 \geq 30 - 14,641$$

$$x \cdot 2,31 \geq 15,359$$

$$X \geq \frac{15,359}{2,33} = \frac{15359}{2310}$$

$$X \geq 6 \frac{1499}{2310}$$

Так как счёт копился на целое число млн руб., то наименьшее значение  $X = 7$  млн рублей

Ответ: 7 млн рублей

16.5. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн, а за четыре года — станут больше 250 млн рублей.

Решение

Пусть  $x$  млн руб — первоначальная сумма, вложенная в проект. Тогда

$$\begin{cases} (x \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 20 > 150 \\ (((x \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 20) \cdot 1,2 + 10) \cdot 1,2 + 10 > 250 \end{cases}$$

Решим 1 пер-во:  $x \cdot 1,2^2 + 20 \cdot 1,2 > 130$

$$x \cdot 1,44 > 106$$

$$x > \frac{106}{1,44} = \frac{10600}{144}$$

$$x > \frac{2650}{36} = \frac{1325}{18}$$

$$x > 73 \frac{11}{18}$$

Решим 2 пер-во:  $x \cdot 1,2^4 + 20 \cdot 1,2^3 + 20 \cdot 1,2^2 + 10 \cdot 1,2 > 240$

$$x \cdot 1,44^2 + 34,56 + 28,8 + 12 > 240$$

$$2,0736 x > 164,64$$

$$x > \frac{164,64}{2,0736} = \frac{1646400}{20736}$$

$$x > \frac{411600}{5184} = \frac{102900}{1296}$$

$$x > \frac{25725}{324} = \frac{8575}{108}$$

$$x > 79 \frac{43}{108}$$

$$\begin{cases} x > 73 \frac{11}{18} \\ x > 79 \frac{43}{108} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x > 79 \frac{43}{108}$$

В проект необходимо вложить минимум 80 млн рублей

Ответ: 80 млн руб.

## Раздел 2. Кредиты

16.1. [демо-2015] 31 декабря 2018 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплат следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

Пусть  $x$  руб - сумма ежегодного платежа. Представим в виде таблицы схему погашения кредита

год	долг после начисления процентов по кредиту, руб	сумма выплаты, руб	долг после начисл. процентов (после выплаты), руб
2018	—	—	9 930 000
2019	$9\,930\,000 \cdot 1,1$	$x$	$10\,923\,000 - x$
2020	$(10\,923\,000 - x) \cdot 1,1$	$x$	$(10\,923\,000 - x) \cdot 1,1 - x$
2021	$(12\,015\,300 - 2,1x) \cdot 1,1$	$x$	0

Составим и решим ур-е для  $x$ :

$$(12\,015\,300 - 2,1x) \cdot 1,1 = x$$

$$3,31x = 13\,216\,830$$

$$x = 3\,993\,000$$

Ответ: сумма ежегодных выплат составляет 3993000 рублей

16.2. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 руб.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение

Пусть  $x$  рублей - сумма кредита. Обозначим

$y = 69\,690\,821$  руб - сумма выплат.

Представим схему погашения кредита в виде таблицы.

сроки	долг после начислен %, руб	Выплата, руб	долг после выплаты, руб
			$x$
1	$x \cdot 1,31$	$y$	$1,31x - y$
2	$(1,31x - y) \cdot 1,31$	$y$	$1,7161x - 1,31y - y$
3	$(1,7161x - 2,31y) \cdot 1,31$	$y$	0

Составим и решим ур-е для значения  $x$ :

$$(1,7161x - 2,31y) \cdot 1,31 = y$$

$$1,7161x \cdot 1,31 = 1,31 \cdot 2,31y + y$$

$$x = \frac{4 \cdot 0261 \cdot 69\,690\,821 \cdot 100}{1,7161 \cdot 1,31}$$

$$x = \frac{40261 \cdot 531\,991 \cdot 100}{17161}$$

$$x = 40261 \cdot 31 \cdot 100$$

$$x = 124809100$$

Ответ: в кредит в банке взяли 124 809 100 рублей

16.3. [ЕГЭ-2022] В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть 200 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько рублей составит платёж в 2029 году?

Решение  
составим в виде таблицы схему погашения  
кредита

год	Долг после начисле- ния %, тыс. руб	Выплата, тыс. руб	Долг после ски- нок, тыс. руб
2026	—	—	500
2027	$500 \cdot 1,2 = 600$	200	400
2028	$400 \cdot 1,2 = 480$	200	280
2029	$280 \cdot 1,2 = 336$	336	0

Ответ: выплата в 2029 году составила  
336 тыс. руб.

16.4. [ЕГЭ-2016] В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн руб)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение. . . . .

год	Долг до выплаты млн руб	Выплата млн руб	Долг после выплаты, млн руб
2016	—	—	$S$
2017	$1,25 S$	$0,55 \cdot S$	$0,7 S$
2018	$1,25 \cdot 0,7 S = 0,875 S$	$0,475 S$	$0,4 S$
2019	$1,25 \cdot 0,4 S = 0,5 S$	$0,5 S$	0

$$\begin{cases} 0,55 S > 5 \\ 0,475 S > 5 \\ 0,5 S > 5 \end{cases}$$

.....

16.5. [демо-2022] 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб.

Решение ....

Дата	Долг на 1-е число, млн руб	Выплата, млн руб	Долг после выплаты, млн руб
15.01	—	—	1
15.02	$1 \cdot K$	$K - 0,6$	0,6
15.03	$0,6 \cdot K$	$0,6K - 0,4$	0,4
15.04	$0,4 \cdot K$	$0,4K - 0,3$	0,3
15.05	$0,3K$	$0,3K - 0,2$	0,2
15.06	$0,2K$	$0,2K - 0,1$	0,1
15.07	$0,1K$	$0,1K$	0

Введено обозначение  $K = 1 + \frac{r}{100}$

Найдём значение  $r$  из неравенства:

$$K - 0,6 + 0,6K - 0,4 + 0,4K - 0,3 + 0,3K - 0,2 + 0,2K - 0,1 + 0,1K < 1,2$$

$$2,6K - 1,6 < 1,2$$

$$2,6K < 2,8$$

$$K < \frac{2,8}{2,6}$$

$$K < \frac{14}{13}$$

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13}$$

.....

16.6. 25-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 10-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- в случае задержки выплат (от 1 до 14 дней) дополнительно взимаются пени: за каждые просроченные сутки 3% от суммы, которую необходимо выплатить в текущем месяце;
- 25-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	25.01	25.02	25.03	25.04	25.05	25.06	25.07
Долг (в тыс. руб.)	1000	700	500	300	200	100	0

Найдите общую сумму выплат сверх взятого кредита, если известно, что клиент осуществлял выплаты 3 февраля, 15 марта, 10 апреля, 8 мая, 19 июня и 6 июля.

**РЕШЕНИЕ.** Согласно условиям возврата клиент задержал выплаты в марте на 5 дней и в июне на 9 дней.

Представим процесс погашения кредита в виде таблицы.

Дата	Долг после начисления процента, тыс. руб.	Сумма выплат, тыс. руб.	Долг после выплаты, тыс. руб.
25.01			1000
25.02	$1000 * 1,1 = 1100$	$1100 - 700 = 400$	700
25.03	$700 * 1,1 = 770$	$770 - 500 = 270 * 1,03 * 5$	500
25.04	$500 * 1,1 = 550$	$550 - 300 = 250$	300
25.05	$300 * 1,1 = 330$	$330 - 200 = 130$	200
25.06	$200 * 1,1 = 220$	$220 - 100 = 120 * 1,03 * 9$	100
25.07	$100 * 1,1 = 110$	110	0

Сумма всех выплат составила:

$$400 + 270 * 1,03 * 5 + 250 + 130 + 120 * 1,03 * 9 + 110 = 890 + 1,03 * (1350 + 1080) = 890 + 1,03 * 2430 = \\ = 890 + 10,3 * 243 = 890 + 2502,9 = 3392,9 \text{ (тыс. руб.)}$$

Ответ: сумма всех выплат составила 3 392 900 рублей.