Модули, ДЗ (часть 1)

Задача 2

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{2\sqrt{x}-4:\sqrt{x}}:\sqrt{x}$ при $0<x<2$.

1) $\sqrt{(x+2)^2-8x} = \sqrt{x^2+4x+4-8x} = \sqrt{x^2-4x+4} =$
$= \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

2) $2\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \dfrac{2(\sqrt{x})^2-4}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x-4}{\sqrt{x}}$

3) $\dfrac{A}{\frac{B}{C}} = A:\dfrac{B}{C} = A\cdot\dfrac{C}{B} = \dfrac{A\cdot C}{B}$

$\dfrac{|x-2|}{\frac{2x-4}{\sqrt{x}}} = \dfrac{|x-2|\cdot\sqrt{x}}{2x-4} = \dfrac{-(\cancel{x-2})\cdot\sqrt{x}}{2(\cancel{x-2})} = \dfrac{-\sqrt{x}}{2}$

4) $-\dfrac{\sqrt{x}}{2}:\sqrt{x} = -\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{x}}} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

Задача 15

Решить уравнение $||x^2+52|-76|=1$

Замена: $|x^2+52| = t \geq 0$

Формы ответа:

1. если уравнение имеет один корень, то записать в ответ этот корень;
2. если у уравнения несколько решений, то записать их в порядке возрастания через пробел;
3. если уравнение не имеет корней, то в ответ записать **empty**;
4. для обозначения корня квадратного использовать **sqrt** (например, $\sqrt{3}$ надо записать sqrt(3)).

$|t-76|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-76=1 \\ t-76=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=77 \\ t_2=75 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} |x^2+52|=77 \\ |x^2+52|=75 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+52=77 \\ x^2+52=75 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=25 \\ x^2=23 \end{array}\right.$

$x_{1,2} = \pm 5, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{23}$

$-5, -\sqrt{23}, \sqrt{23}, 5$

Задания с параметрами

Задание 20

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

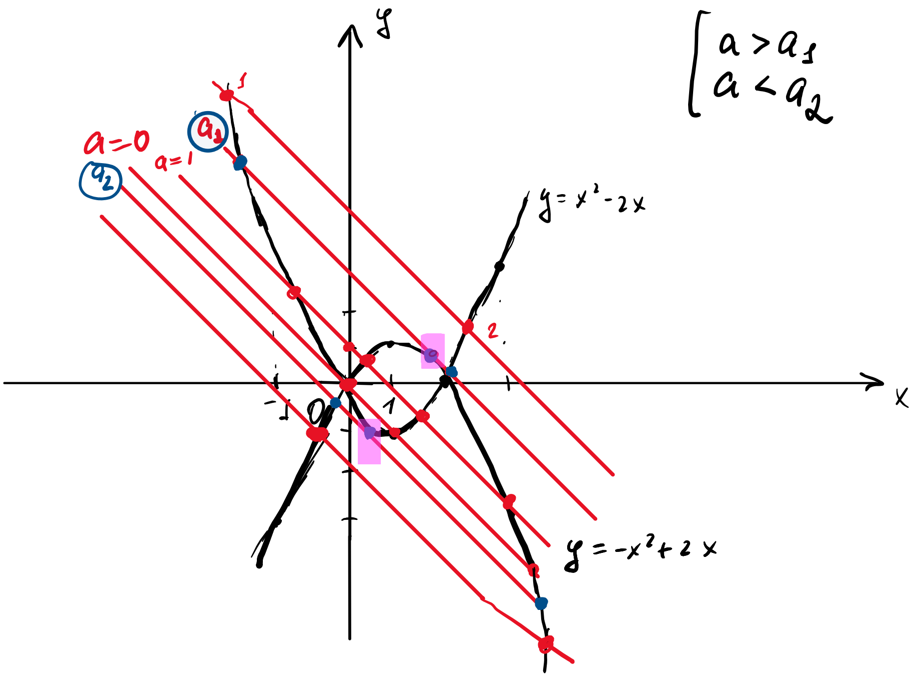
имеет ровно два различных решения.

Источники: Банк ФИПИ | ЕГЭ 2024, основная волна, Сибирь

Решение

$$\begin{cases} x + y = a \\ \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = -(x^2 - 2x) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + a \\ \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 2x \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} a > a_1 \\ a < a_2 \end{array}\right.$$



По рис. видно, что прямая $y = -x + a$ имеет 2 точки пересечения с параболами при $a > a_1$ или при $a < a_2$

Вычислим значения a_1 и a_2

Прямая $y = -x + a_1$ касается параболы $y = -x^2 + 2x$

$\Rightarrow \quad -x + a_1 = -x^2 + 2x$

$x^2 - 3x + a_1 = 0$

Дискрим. должен быть равен 0, чтобы получилось касание

$D = 9 - 4a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{4}$

Аналогично вычислим a_2 (как точку касания $y=-x+a_2$ и $y=x^2-2x$)

$$-x+a_2 = x^2-2x$$

$$x^2 - x - a_2 = 0$$

$$D = 1+4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$

Задание 21

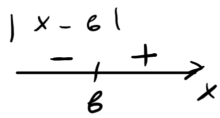
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2-7\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)+4a^2+4=0$$

имеет ровно два различных корня.

Источники: *Банк ФИПИ | ЕГЭ 2025, основная волна 27.05, Центр | Демоверсия ЕГЭ 2026*

Замена: $t = |x-a^2| + |x+1|$

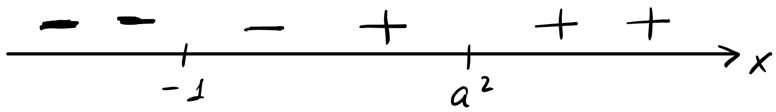


$$t^2 - 7t + \underline{4a^2+4} = 0$$

Исследуем замену. Для этого найдём нули подмодульных выражений:

$x - a^2 = 0$ $x+1=0$

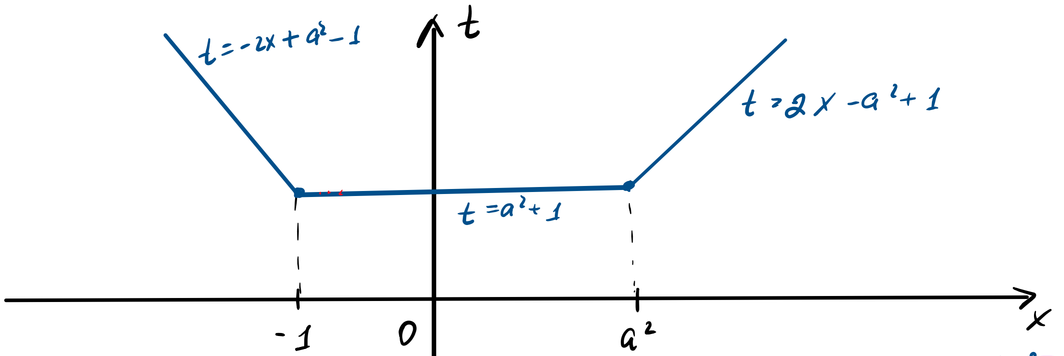
$x = a^2 \geq 0$ $x = -1$



① при $x \leq -1$ $t = -(x-a^2) - (x+1) = -2x + a^2 - 1$

② при $-1 < x < a^2$ $t = -(x-a^2) + (x+1) = a^2+1$

③ при $x \geq a^2$ $t = (x-a)^2 + (x+1) = 2x - a^2 + 1$



Если $t > a^2+1$, то ур-е $t = |x-a^2| + |x+1|$ имеет 2 решения

Если $t = a^2+1$, то ур-е — и — имеет бесконечно много решений

Если $t < a^2+1$, то — и — и — не имеет решений

Для ур-я $t^2 - 7t + 4a^2 + 4 = 0$ вычислим

$$D = 49 - 4(4a^2+4) = 49 - 16(a^2+1)$$

1) необходимо, чтобы ур-е $t^2 - 7t + 4a^2 + 4 = 0$ имело 1 корень $t_0 > a^2+1$, т.е. $D = 49 - 16(a^2+1) = 0$

$$a^2 + 1 = \frac{49}{16} \Rightarrow a^2 = \frac{33}{16} \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

2) либо ур-е $t^2 - 7t + 4a^2 + 4 = 0$ имеет 2 разных корня t_1, t_2: $t_1 < a^2 + 1 < t_2$

Тогда $D > 0 \Rightarrow a < -\frac{\sqrt{33}}{4}$, $a > \frac{\sqrt{33}}{4}$

(продолжение следует)