МОДУЛЬ

ТЕОРИЯ

Определение

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Примеры:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$

$|17|$; $17 > 0 \Rightarrow |17| = 17$

$|0|$; $0 = 0 \Rightarrow |0| = 0$

$|-11|$; $-11 < 0 \Rightarrow |-11| = -(-11) = 11$

$|1+\sqrt{3}|$; т.к. $1+\sqrt{3} > 0$, то $|1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$

$|1-\sqrt{3}|$; т.к. $\sqrt{3} > 1 \Rightarrow -\sqrt{3} < -1 \Rightarrow 1-\sqrt{3} < 0$, то

$|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3} = \sqrt{3}-1$

Свойство арифметических корней чётной степени

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

$\underline{\underline{abs}}$

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; ...

$\sqrt{x^2}$ $\quad x = 2 \Rightarrow \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Выражения с модулем

Задание 1

Найдите значение выражения $\dfrac{|1-\sqrt{2}|}{1-\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} > 1 \quad | \cdot (-1)$

$-\sqrt{2} < -1 \quad | +1$

$1-\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$

$\dfrac{|1-\sqrt{2}|}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{-\cancel{(1-\sqrt{2})}}{\cancel{1-\sqrt{2}}} = -1$

Задание 2

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{53-12\sqrt{11}}+3}{\sqrt{11}}$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$$\underbrace{\sqrt{53-12\sqrt{11}}}_{a^2+b^2} = \sqrt{53-2\cdot 6\cdot\sqrt{11}} = \sqrt{53-2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{11}} =$$

a^2+b^2 $\quad a=3 \quad a^2=9$

$b=2\sqrt{11} \quad b^2=4\cdot 11=44$

$$= \sqrt{\underbrace{9}_{a^2} - 2\cdot \underbrace{3}_{a}\cdot \underbrace{2\sqrt{11}}_{b} + \underbrace{44}_{b^2}} =$$

$$= \sqrt{(3-2\sqrt{11})^2} = |3-2\sqrt{11}| = -(3-2\sqrt{11})$$

$\sqrt{11}>3 \quad |\cdot(-2)$

$-2\sqrt{11} < -6 \quad |+3$

$3-2\sqrt{11} < -3 < 0$

$$\frac{\sqrt{53-12\sqrt{11}}+3}{\sqrt{11}} = \frac{-(3-2\sqrt{11})+3}{\sqrt{11}} = \frac{-3+2\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = 2$$

Задание 3

Найдите значение выражения $\sqrt{28+6\sqrt{3}}-\sqrt{31+12\sqrt{3}}$.

$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$; $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

1) $28+6\sqrt{3} = 28+2\cdot \underbrace{3\cdot\sqrt{3}}_{a}\cdot \underbrace{1}_{b} = \underbrace{27}_{(3\sqrt{3})^2}+2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 1+1 = (3\sqrt{3}+1)^2$

$a^2=9\cdot 3=27$

$b^2=1$

2) $31+12\sqrt{3} = 31+2\cdot \underbrace{6}_{a}\underbrace{\sqrt{3}}_{b} = 31+2\cdot \underbrace{3}_{a}\cdot \underbrace{2\sqrt{3}}_{b} = 31+2\cdot \underbrace{2}_{a}\cdot \underbrace{3\sqrt{3}}_{b} =$

$+\, a^2=36$, $b^2=3$, $\neq 31$

$+\, a^2=9$, $b^2=(2\sqrt{3})^2=4\cdot 3=12$, $\neq 31$

$+\, a^2=4$, $b^2=(3\sqrt{3})=9\cdot 3=27$, $=31$

$= 4+2\cdot \underbrace{2}_{a}\cdot \underbrace{3\sqrt{3}}_{b}+27 = (2+3\sqrt{3})^2$

3) $\sqrt{(3\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(2+3\sqrt{3})^2} = |3\sqrt{3}+1|-|2+3\sqrt{3}| =$

$= (3\sqrt{3}+1)-(2+3\sqrt{3}) = \cancel{3\sqrt{3}}+1-2-\cancel{3\sqrt{3}} = -1$

Задание 4

Найдите значение выражения $\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}+\sqrt{3}$.

$97-56\sqrt{3} = 97-2\cdot \underbrace{28}_{a}\underbrace{\sqrt{3}}_{b} = 97-2\cdot \underbrace{7}_{a}\cdot \underbrace{4\sqrt{3}}_{b} =$

$\boxed{\sqrt[4]{(a-b)^4} = |a-b|}$

$28^2+3\neq 97$

$a^2+b^2=7^2+(4\sqrt{3})^2=$

$=49+16\cdot 3=97$

$$= 49 - 2\cdot \underset{a}{7}\cdot \underset{b}{4\sqrt{3}} + 48 = (\underbrace{7-4\sqrt{3}}_{(x-y)^2})^2 =$$

$$= \left(7 - 2\cdot \underset{x}{2}\cdot \underset{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(4 - 2\cdot \underset{x}{2}\cdot \underset{y}{\sqrt{3}} + 3\right)^2 = \left((2-\sqrt{3})^2\right)^2 =$$

$x^2 = 4$
$y^2 = 3$
$+$ 7

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

$$= (2-\sqrt{3})^4 \Rightarrow$$

$$\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^4} + \sqrt{3} = |\overbrace{2-\sqrt{3}}^{>0}| + \sqrt{3} =$$

$1 < \sqrt{3} < 2$

$$= 2 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} = \boxed{2}$$

$(a+b)^n$, $(a-b)^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Треугольник Паскаля

n	коэф-ты
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

$$(a\pm b)^2 = +1\cdot a^2\cdot b^0 + 2\cdot a^1\cdot b^1 + 1\cdot a^0\cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = +1\cdot a^3\cdot b^0 + 3\cdot a^2\cdot b^1 + 3\cdot a^1\cdot b^2 + 1\cdot a^0\cdot b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = +1\cdot a^4\cdot b^0 + 4\cdot a^3\cdot b^1 + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a^1\cdot b^3 + 1\cdot a^0\cdot b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = +1\cdot a^5b^0 - 5a^4b^1 + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5a^1b^4 - 1a^0b^5 =$$
$$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Задание 5

Найдите значение выражения $\dfrac{9-4\sqrt{5}}{|2-\sqrt{5}|\cdot(2-\sqrt{5})} = \dfrac{9-4\sqrt{5}}{-(2-\sqrt{5})\cdot(2-\sqrt{5})} =$

$2 \quad \sqrt{5} \quad 3$

$2 < \sqrt{5} < 3$

$= \dfrac{9-4\sqrt{5}}{-(2-\sqrt{5})^2} =$

$9-4\sqrt{5} = 9 - 2\cdot \underset{a}{2}\cdot \underset{b}{\sqrt{5}} = (2-\sqrt{5})^2$

$a^2 = 4$
$+\,b^2 = 5$
9

$= \dfrac{\cancel{(2-\sqrt{5})^2}}{-\cancel{(2-\sqrt{5})^2}} = -1$

Задание 6

Найдите значение выражения $\sqrt{2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

$6 - 4\sqrt{2} = (a-b)^2$

Ответ: 2

Задание 7

Найдите значение выражения $\sqrt{(5+x)^2}$ при $x = -13300$.

$\sqrt{(5+x)^2} = |5+x| = |5-13300| = |-13295| =$

$= 13295$

Задание 8

Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(-11x+3)^4}$ при $x = 0{,}5$.

$\sqrt[4]{(-11x+3)^4} = |-11x+3| = |-11\cdot 0{,}5+3| = |-5{,}5+3| =$

$= |-2{,}5| = 2{,}5$

Задание 9

$32 \quad 100500$

Найдите значение выражения $-w + \sqrt{1024 - 64w + w^2}$, при $w > 100500$.

$\underset{32^2}{1024} - 64w + w^2 = 32^2 - 2\cdot 32\cdot w + w^2 = (32-w)^2$

$-w + \sqrt{(32-w)^2} = -w + |32-w| = -w + (-(32-w)) =$

$= -w-(32-w) = -\cancel{w} - 32 + \cancel{w} = -32$

Задание 10

Найдите значение выражения $\sqrt{-6s+9+s^2}+\sqrt{s^2-26s+169}$, при $3 < s < 12$.

$-6s+9+s^2 = \underline{s}^2 - 6s + \underbrace{9}_{3^2} = (s-3)^2$

$(5-2)^2 = 3^2 = 9$

$(2-5)^2 = (-3)^2 = 9$

$s^2 - 26s + 169 = (13-s)^2$

$\sqrt{(s-3)^2} + \sqrt{(13-s)^2} = |\underbrace{s-3}_{>0}| + |\underbrace{13-s}_{>0}| = \cancel{s} - 3 + 13 - \cancel{s} = 10$

$|s-3| + |s-13| = s-3+(-(s-13)) = s-3+(-s+13) = s-3-s+13 = 10$

Уравнения с модулем

$|0| = 0$

ТЕОРИЯ

1) $|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0$

2) $|f(x)| = C$, $C = const$, $C \neq 0$

$C < 0$, то ур-е не имеет решений

$C > 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) = C \\ f(x) = -C \end{array}\right.$

3) $|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 & (\text{ОДЗ}) \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

4) $|f(x)| = |g(x)| \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Задание 11

Решить уравнение: $|x| = 0$. $\Rightarrow$ $x = 0$

Задание 12

Решить уравнение: $|x-3| = 0.$ $\Rightarrow$ $x-3=0$ $\Rightarrow$ $x = 3$

Задание 13

Решить уравнение: $|x| = 4.$; т.к. $4>0$, то $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ -x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{array}\right.$

Задание 14

Решить уравнение: $|x| + 9 = 1$ $\Rightarrow$ $|x| = -8$

т.к. $-8<0$, то ур-е не имеет решений

Задание 15

Решить уравнение: $|2x-5| = \underset{>0}{3}.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 2x-5=3 \\ -(2x-5)=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

Задание 16

Решить уравнение: $|x^2-3x| = 4.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x^2-3x=4 \\ -(x^2-3x)=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0 \\ x^2-3x+4=0 \end{array}\right.$

$x^2-3x-4=0$

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4) = 9+16=25$

$x_{1,2}=\frac{3\pm5}{2}$

Ответ: -1; 4

$x^2-3x+4=0$

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4 = 9-16<0$

нет действ. корней

Задание 17

Решить уравнение: $|3x^2-4| = 11x.$

$\left\{\begin{array}{l} 11x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2-4=11x \\ 3x^2-4=-11x \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{3}, x_2=4 \\ x_3=-4, x_2=\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$

$3x^2-4=11x$

$3x^2-11x-4=0$

$D=(-11)^2-4\cdot3\cdot(-4)=$

$=121+48=169=13^2$

$x_{1,2}=\frac{11\pm13}{6}$

$3x^2-4=-11x$

$3x^2+11x-4=0$

$D=11^2-4\cdot3\cdot(-4)=13^2$

$x_{3,4}=\frac{-11\pm13}{6}$

Задание 18

Решить уравнение: $|x+9| = |4x-3|$.

$$\left[\begin{array}{l} x+9=4x-3 \\ x+9=-(4x-3) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-4x=-3-9 \\ x+4x=3-9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -3x=-12 \\ 5x=-6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=-1{,}2 \end{array}\right.$$

$|f(x)| = |g(x)|$

1) $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$
$f(x) = g(x)$

2) $f(x) \geq 0,\ g(x) < 0$
$f(x) = -g(x)$

3) $f(x) < 0,\ g(x) \geq 0$
$-f(x) = g(x)$

4) $f(x) < 0,\ g(x) < 0$
$-f(x) = -g(x)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$

Задание 19

Решить уравнение: $\big||2x+3|-6\big| = 11$.

Замена: $t = |2x+3| \geq 0$

$$|t-6| = 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-6=11 \\ t-6=-11 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=17 \\ t_2=-5<0 \end{array}\right.$$

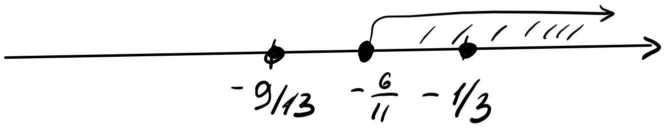
$$|2x+3| = 17 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=17 \\ 2x+3=-17 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=14 \\ 2x=-20 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_2=-10 \end{array}\right.$$

$$\big||2x+3|-6\big| = 11x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 11x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} |2x+3|-6=11x \\ |2x+3|-6=-11x \end{array}\right. \end{array}\right.$$

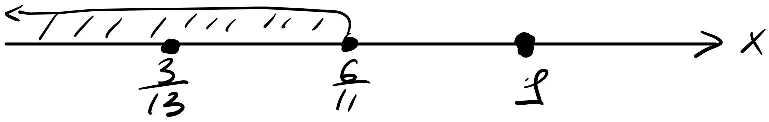
1) $|2x+3|-6=11x \Rightarrow |2x+3| = 11x+6$

$$\left\{\begin{array}{l} 11x+6 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x+3=11x+6 \\ -(2x+3)=11x+6 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 11x \geq -6 \\ \left[\begin{array}{l} -9x=3 \\ -13x=9 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \geq -\frac{6}{11} \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{3} \\ x_2=-\frac{9}{13} \end{array}\right. \end{array}\right.$$



② $|2x+3| - 6 = -11x \Rightarrow |2x+3| = 6 - 11x$

$$\begin{cases} 6 - 11x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x+3 = 6-11x \\ -(2x+3) = 6-11x \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} -11x \geq -6 \\ \left[\begin{array}{l} 13x = 3 \\ 9x = 9 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{6}{11} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{13} \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$



③ $$\begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{3}{13} \end{array}\right. \end{cases}$$

Задания с параметрами

Задание 20

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Источники: *Банк ФИПИ | ЕГЭ 2024, основная волна, Сибирь*

Задание 21

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x - a^2| + |x + 1|\right)^2 - 7\left(|x - a^2| + |x + 1|\right) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Источники: *Банк ФИПИ | ЕГЭ 2025, основная волна 27.05, Центр | Демоверсия ЕГЭ 2026*