Иррациональные выражения

0 курс мехмата ЮФУ*

Свойства алгебраических корней

Если степень $n > 1$ алгебраического корня $\sqrt[n]{a}$ является нечётной, например $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, то значение корня определено при любых $a \in \mathbb{R}$. Если n — чётное число, т. е. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то значение $\sqrt[n]{a}$ определено только при $a \geqslant 0$.

- $\sqrt[n]{0} = 0$
- $\sqrt[n]{1} = 1$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

  Частные случаи:

  $\sqrt[2k-1]{a^{2k-1}} = a$

  $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: `dolgikh@sfedu.ru`, `@DolgikhTF`.

Иррациональные уравнения

1. $\sqrt{f(x)} = a$, $a \equiv \mathrm{const}$

   Если $a \geqslant 0$, то преобразуем уравнение к виду $f(x) = a^2$. Если $a < 0$, то уравнение не имеет решения.

2. $\sqrt{f(x)} = g(x)$

   Решением уравнения являются значения системы вида: $\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

   Решением уравнения являются значения системы вида: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ или $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$ или $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$

   Уравнение дважды необходимо возвести в квадрат, чтобы избавится от иррациональностей. После решения *ОБЯЗАТЕЛЬНО* провести проверку полученных корней.

5. $\sqrt[n]{f(x)} = a$, $a = \mathrm{const}$, $n > 2$ — натуральное значение

   Если n — нечётное, то решение уравнения имеет вид: $f(x) = a^n$.
   Если n — чётное, то решение уравнения в виде $f(x) = a^n$ существует только в случае $a \geqslant 0$. При $a < 0$ уравнение не имеет решений.