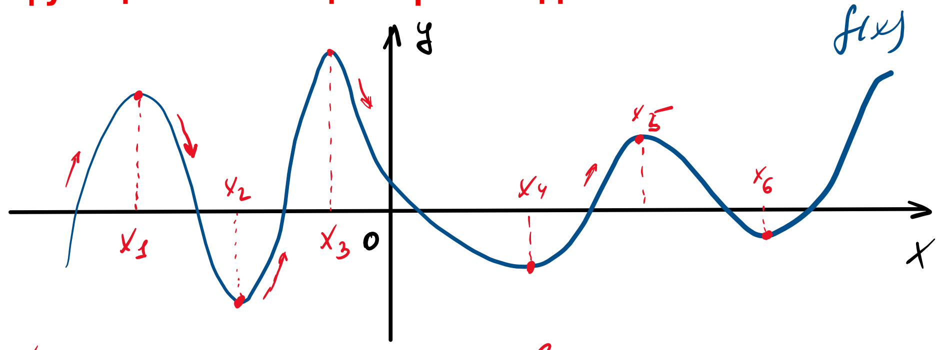
Исследование функций с помощью производных



$x_1, x_2, \ldots, x_6$ — точки экстремума

точка макс. x_1, x_3, x_5

точка мин. x_2, x_4, x_6

$y = f(x)$ точки экстремума вычисляем из ур-я $y' = 0$

$y' = f'(x)$ — производная ф-ции $y = f(x)$

① Производная константы C:

$$C' = 0$$

$5' = 0, \quad (-11)' = 0, \quad \left(\frac{5}{6}\right)' = 0, \quad \pi' = 0, \ldots$

② Производная x^p, p - число

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

$(x^7)' = 7 \cdot x^6, \quad (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-4}, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$

$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1, \quad (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

③ Ф-ция $f = f_1 \pm f_2 \Rightarrow f' = f_1' \pm f_2'$

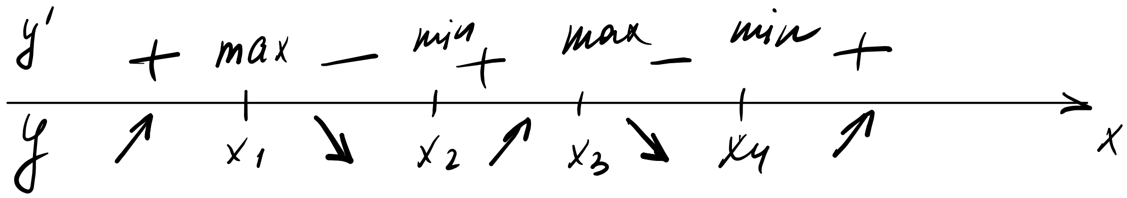
$f = x^2 + 4 \Rightarrow f' = (x^2)' + 4' = 2x + 0 = 2x$

$f = x^3 - \sqrt{x} = x^3 - x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f' = (x^3)' - (x^{\frac{1}{2}})' = 3x^2 - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$f' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

④ Производная $C \cdot f$: $(C \cdot f)' = C \cdot f'$

$(8x^4)' = 8 \cdot 4x^3 = 32x^3; \quad (x^5 - 4x^2)' = 5x^4 - 4 \cdot 2x = 5x^4 - 8x$



x_1, x_2, x_3, x_4 – точки экстремума (решения ур-я $y'=0$)

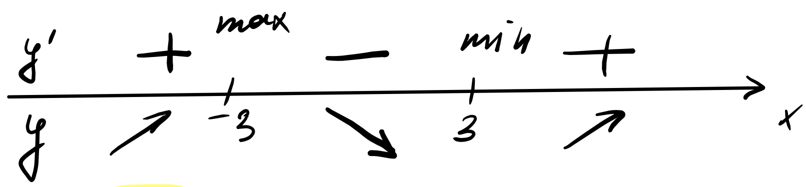
Задание 1

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 27x + 14$.

1) $y' = (x^3 - 27x + 14)' = (x^3)' - (27x)' + 14' =$
$= 3x^2 - 27 \cdot 1 + 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 27$

2) $y' = 0$: $3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$

3)



$y' = 3x^2 - 27$

Ответ: -3

Задание 2

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 23$.

$y' = 3x^2 - 108$; точки экст. $x_{1,2} = \pm 6$

Ответ: -6

Задание 3

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

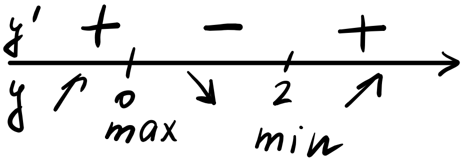
1) $y' = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

2) $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

$3x = 0$ $\quad$ $x - 2 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 2$

3)



Ответ: 2

Задание 4

Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 27x^2 + 11$.

Ответ: -18

Задание 5

Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 14x^2 + 49x + 8$.

1) $y' = 3x^2 + 14 \cdot 2x + 49 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \boxed{y' = 3x^2 + 28x + 49}$

2) $y' = 0$: $3x^2 + 28x + 49 = 0$

$D = 28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 49 = 28(28 - 21) = 28 \cdot 7 = 4 \cdot 7^2$

$\sqrt{D} = 2 \cdot 7 = 14$

$x_{1,2} = \frac{-28 \pm 14}{2 \cdot 3} = \frac{-14 \pm 7}{3}$ $\quad x_1 = -7$, $x_2 = -\frac{7}{3}$

3) y': $+$ max $-$ min $+$

y: $\nearrow$ -7 $\searrow$ $-\frac{7}{3}$ $\nearrow$ x

Ответ: -7

Задание 6

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 17$.

Ответ: 9

Задание 7

Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 1$.

1) $y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 24x + 1 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} - 24x + 1$

$y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 24 \cdot 1 + 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 24}$

2) $y' = 0$: $\frac{3}{2}\sqrt{x} - 24 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x} = 24 \Rightarrow \sqrt{x} = 24 \cdot \frac{2}{3}$

$\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 256$

3) y': $-$ min $+$

y: $\searrow$ 256 $\nearrow$

Ответ: 256

Задание 8

Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 18x + 29.$

Ответ: 144

Задание 9

Найти точку минимума функции $y = \dfrac{225}{x} + x + 8.$

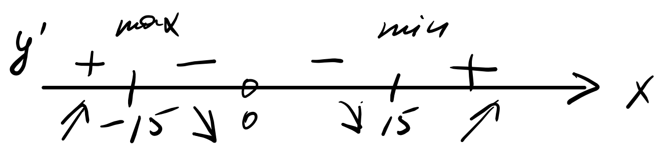
1) $y = 225 \cdot \frac{1}{x} + x + 8 = 225 \cdot x^{-1} + x + 8$

$y' = 225 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 1 + 0 \Rightarrow y' = -\frac{225}{x^2} + 1$

2) $y' = 0$: $-\frac{225}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{225}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 225$

$x_{1,2} = \pm 15$

Ответ: 15

3) 

Задание 10

Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{25}{x} + x + 25.$

Ответ: 5

Задание 11

Найти точку максимума функции $y = \dfrac{x^2 + 49}{x}.$

Ответ: −7

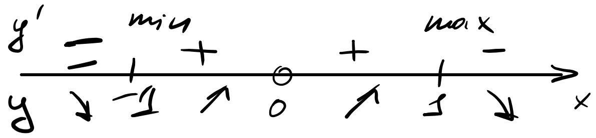
Задание 12

Найти точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2+1}{x}$.

1) $y = -\dfrac{x^2+1}{x} = -\left(\dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = -x - \dfrac{1}{x} = -x - x^{-1}$

$y' = -1 - (-1)\cdot x^{-2} \Rightarrow y' = -1 + \dfrac{1}{x^2}$

2) $y' = 0$: $-1 + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

3) 

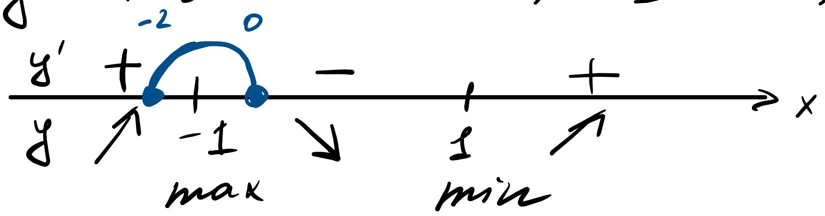
Ответ: -1

Задание 13

Найдите наибольшее (max) значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$.

1) $y' = 3x^2 - 3\cdot 1 + 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$

2) $y' = 0$: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

3) 

4) наиб. знач. ф-ции в т. max

Подставить в y значение x max

$y = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6$

Ответ: 6

Задание 14

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 5]$.

Задание 15

Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 9x + 25$ на отрезке $[1; 50]$.

Задание 16

Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 3$ на отрезке $[0; 40]$.

Задание 17

Найдите наименьшее значение функции $y = x + \dfrac{4}{x}$ на отрезке $[1; 3]$.

Задание 18

Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

Физический смысл производной

Задание 19

► 33. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Задание 20

► 34. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Задание 21

► 35. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 27t + \sqrt{\pi} - 22$ (где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ускорение этой точки было равно 12 м/с^2?