ЕГЭ-5. Сложная вероятность (теоремы теории вероятностей)

Независимые события

Независимые события — это такие события, наступление одного из которых не влияет на вероятность наступления другого (и наоборот).

Вероятность совместного наступления независимых событий. Для независимых событий A и B вероятность их совместного наступления (пересечения $A \cap B$) равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Примеры независимых событий: бросание игрального кубика, подбрасывание монеты, стрельба в тире.

Независимые события могут быть совместными (например, «орёл при первом броске монеты» и «решка при втором»).

Совместные события

Совместные события — это такие события, которые могут произойти одновременно в одном испытании: наступление одного из них не исключает наступления другого.

Теорема сложения совместных вероятностей. Для совместных событий A и B вероятность наступления хотя бы одного из них (объединения $A \cup B$) вычисляется по формуле:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

где $P(A \cap B)$ — вероятность одновременного наступления A и B.

Примеры совместных событий: событие A — «идёт дождь», событие B — «дует ветер»; одновременно эти два события наступить могут.

Задание 1

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.

A – «Биолог» начали 1 матч

B – «Биолог» начали 2 матч

C – «Биолог» начали 3 матч

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Задача 2

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

A - попал $\quad P(A) = 0{,}8$

B - промах $\quad P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$$P(A \cap B \cap B \cap B) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 \cdot 0{,}008 = 0{,}0064$$

Задача 3

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

0,1024

Задача 4

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,2. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

A - перегорели все 3 лампы

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$ - хотя 1 лампа не перегорела

Задача 5

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,5. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

0,875

Задача 6

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

1 способ решения: А – попал, В – промахнулся

$P(A) = 0{,}5; \quad P(B) = 0{,}5$

Условие «стрелок поразил цель с вероятность не менее 0,7» равносильно условию «стрелок промахнулся не менее 0,3»

1) Пусть был 1 выстрел $P(A) = 0{,}5 \not\geq 0{,}7$

2) Пусть было 2 выстрела: промах + попал

$P(\text{2 раза был промах}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$P(\text{попал со 2 раза}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \geq 0{,}7$

2 способ решения: А – при первом выстреле промах, В – при втором выстреле попал. Это совместные события и независимые события

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A)}_{0{,}5} + \underbrace{P(B)}_{0{,}5} - \underbrace{P(A \cap B)}_{0{,}5 \cdot 0{,}5} = 0{,}75$$

Ответ: 2

Задача 7

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Изумруд» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Изумруд» начнёт игру с мячом не больше одного раза.

Знаком «+» обозначим событие -- «Изумруд» начал игру (выиграл жеребьёвку)

Знаком «-» обозначим событие -- «Изумруд» не начал игру (проиграл жеребьёвку)

1 способ решения: по формуле классического определения вероятности

Все исходы события «подбросили монету» $n = 2 \cdot 2 = 4$

Благоприятные исходы: +- или -+ или ++ $m = 3$

$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

2 способ решения: P(«Изумруд» начал хотя бы одну игру) = 1 – P(«Изумруд» не начинал обе игры)

P(«Изумруд» не начинал обе игры) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\text{по усл}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

3 способ решения:

Несовместные события

Несовместные (непересекающиеся) события — это такие события, которые не могут произойти одновременно в одном и том же испытании. Появление одного из них исключает появление другого.

Теорема сложения несовместных вероятностей. Для несовместных событий A и B вероятность наступления хотя бы одного из них (объединения $A \cup B$) равна сумме их вероятностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Примеры несовместных событий: при бросании игрального кубика событие A — выпало 1 очко, событие B — выпало 3 очка; одновременно эти два события наступить не могут.

A – изумруд + –

B – изумруд – +

C – изумруд + +

P(B) = 1

21 1

Рус, = 2 = E

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Ответ: 0,75

Задача 8

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт игру с мячом не более одного раза.

0,5

Задача 9

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

$n = (6-1) \cdot (6-1) = 25$

$m: 5+4,\ 4+5$ $\qquad m = 2$

$P = \frac{m}{n} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0{,}08$

Задача 10

Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

0,08

Задача 11

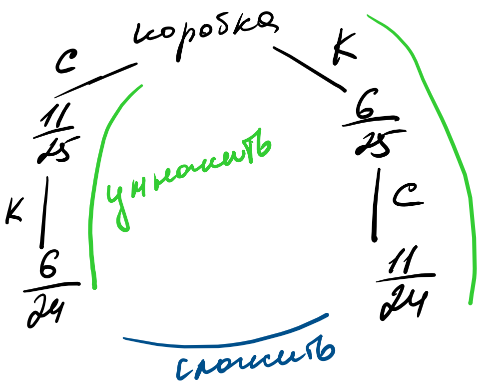
$11 + 6 + 8 = 25$ шт

В коробке лежат 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры?

$$P(1\text{син и }1\text{кр}) = P(\text{син})\cdot P(\text{кр}) + P(\text{кр})\cdot P(\text{син}) =$$

$$= \frac{11}{25}\cdot\frac{6}{24} + \frac{6}{25}\cdot\frac{11}{24} = \frac{11}{25\cdot 4} + \frac{11}{25\cdot 4} = \frac{22}{25\cdot 4} =$$

$$= 0{,}22$$



$$\frac{11}{25}\cdot\frac{6}{24} + \frac{6}{25}\cdot\frac{11}{24} = 0{,}22$$

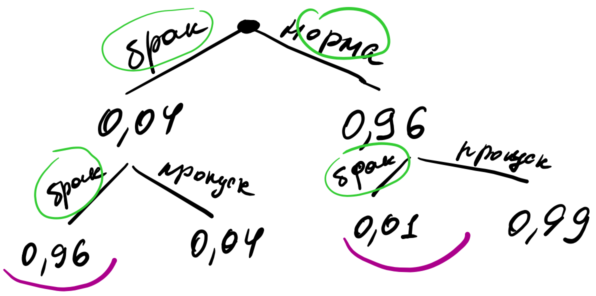
Задача 12

В коробке 6 синих, 9 красных и 10 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

0,18

Задача 13

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.



$$0{,}04\cdot 0{,}96 + 0{,}96\cdot 0{,}01$$

$$0{,}96(0{,}04+0{,}01) = 0{,}96\cdot 0{,}05 = 0{,}0480$$

Ответ: 0,048

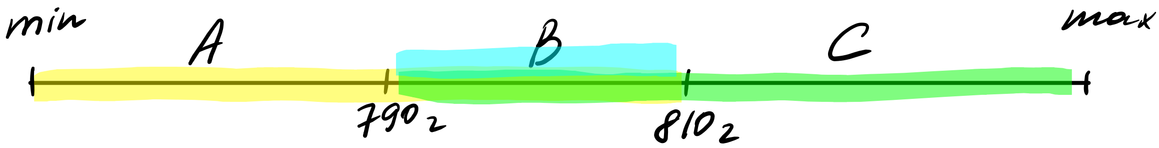
Задача 14

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,93. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

0,039

Задача 15

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,95. Вероятность того, что масса буханки окажется больше 790 г, равна 0,84. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.



$$\begin{cases} P(A)+P(B)+P(C)=1 \\ P(A)+P(B)=0,95 \\ P(B)+P(C)=0,84 \end{cases} + \qquad P(B)=?$$

$$\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{1}+P(B)=0,95+0,84$$

$$P(B)=0,95+0,84-1=0,84-0,05$$

Ответ: 0,79

Задача 16

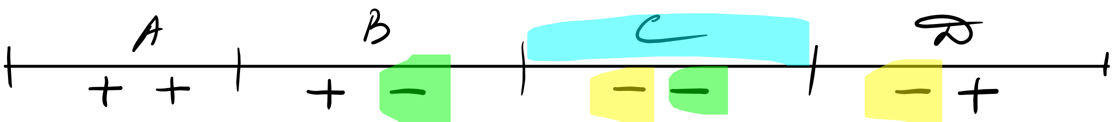
При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

0,78

Задача 17

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

A – кофе остался в 1 и 2 автоматах
B – кофе остался в 1 автомате, но закончился во 2 автомате
C – кофе закончился в обоих автоматах
D – кофе закончился в 1 автомате, но остался во 2 автомате



$$\begin{cases} P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \\ P(B)+P(C)=0,1 \\ P(C)+P(D)=0,1 \\ P(C)=0,03 \end{cases} \qquad P(A)=?$$

$$P(B)+P(C)+P(D)+\underbrace{P(C)}_{0,03}=0,1+0,1$$

$$P(B)+P(C)+P(D)=0,2-0,03=0,17$$

$$P(A)+\underbrace{P(B)+P(C)+P(D)}_{0{,}17}=1 \Rightarrow P(A)=1-0{,}17=0{,}83$$

Задача 18

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

0,6

Задача 19

Стрелок стреляет по одному разу по каждой из пяти одинаковых мишеней. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени»?

Формула Бернулли

Формула

$$P_n^k(A)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

нужна для вычисления вероятности того, что в серии из n независимых испытаний событие A произойдёт ровно k раз при условии, что вероятность события в каждом испытании постоянна. Здесь $P_n^k(A)$ — вероятность того, что событие A наступит ровно k раз в n испытаниях, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний (сколько есть способов выбрать k «успехов» из n испытаний), p — вероятность «успеха» в одном испытании, $q=1-p$ — вероятность «неудачи» в одном испытании.

Схема Бернулли работает при выполнении трёх условий:

1. испытания независимы (результат одного не влияет на другие);
2. в каждом испытании только два исхода: «успех» (событие произошло) и «неудача» (не произошло);
3. вероятность «успеха» p одинакова во всех испытаниях.

Пример применения формулы Бернулли: монету подбрасывают 100 раз; какова вероятность, что «орёл» выпадет ровно 30 раза?

$n=5$ выстрелов

$p=0{,}8$ – попал

$q=1-p=0{,}2$ – промах

1) $k=4$ попали

$$P_5^4=C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^{5-4}$$

$$P_5^4=\frac{5!}{4!\,1!}\,0{,}8^4\cdot 0{,}2$$

$$n!=\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\cdot n = (n-1)!\cdot n;\quad 1!=1$$

$$P_5^4=\frac{\cancel{4!}\cdot 5}{\cancel{4!}\cdot 1}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2$$

$$P_5^4=5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2$$

2) $k=3$ раза попали в мишени

$$P_5^3=\frac{5!}{3!\,2!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2=10\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2$$

3) $$\frac{P_5^4}{P_5^3}=\frac{5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2}{10\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2}=\frac{0{,}8}{2\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}8}{0{,}4}=2$$