Начала теории вероятностей

0 курс мехмата ЮФУ*

Классическое определение вероятности

Типы событий:

1. *невозможное событие* (обозначение $\varnothing$) — это событие, которое не может наступить в результате данного испытания; $P(\varnothing) = 0$
2. *достоверное событие* (обозначение Ω) — это событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания; $P(\Omega) = 1$
3. *случайное событие* (обозначение A, B, C,…) — это событие, которое может произойти или не произойти в результате данного испытания; $0 < P(A) < 1$

Вероятность любого случайного события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{количество всех событий}} = \frac{m}{n}$$

Это и есть *классическое определение вероятности*. Здесь количество всех исходов события A обозначено через n, а количество благоприятных исходов — через m.

Теорема о вероятности противоположного события. *Вероятность противоположного события* $\bar{A}$ определяется через вероятность самого события A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$$

Статистическое определение вероятности

Относительная частота $W(A)$ события A в данной серии испытаний называют отношения числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

При этом число M называется *частотой* события A.

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Закон больших чисел: при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стримится к вероятности этого события, то есть $W(A) \sim P(A)$.

---

*Преподаватель доц., к.ф.-м.н. Т. Ф. Долгих, кафедра ВМ и МФ ИММ и КН им. И. И. Воровича ЮФУ. Контакты: `dolgikh@sfedu.ru`, `@DolgikhTF`.

Основы комбинаторики

Комбинаторика — раздел математики, изучающий способы подсчёта, построения и анализа различных комбинаций объектов, и лежащий в основе алгоритмов перебора, генерации вариантов, анализа вероятностей и оптимизации.

Ключевые понятия и формулы

1. *Перестановка* — способ упорядочить все элементы множества.
   - *Перестановки без повторений* — не учитывается порядок следования компонентов в выборке и все данные элементы входят в составляемые комбинации (из букв А, З, О можно составить 6 перестановок: АЗО, АОЗ, ЗАО, ЗОА, ОАЗ, ОЗА): $P_n = n!$
   - *Перестановки с повторением* — не учитывается порядок следования компонентов в выборке и все данные элементы входят в составляемые комбинации, но имеются повторы компонент по k_i раз (например, из букв А, О, О можно составить 3 перестановки: АОО, ОАО, ООА): $\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_m!}, \;\; k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$

2. *Размещение* — способ выбрать и упорядочить несколько элементов из множества.
   - *Размещение без повторений* — не учитывается порядок следования компонентов в выборке и не все данные элементы входят в составляемые комбинации (из трёх букв А, З, О выбрать и упорядочить две: АЗ, АО, ЗА, ЗО, ОА, ОЗ): $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
   - *Размещение с повторением* — не учитывается порядок следования компонентов в выборке и все данные элементы входят в составляемые комбинации, но имеются повторы выбираемых компонент (из трёх букв А, З, О выбрать и упорядочить две: АА, АЗ, АО, ЗА, ЗЗ, ЗО, ОА, ОЗ, ОО): $\tilde{A}_n^k = n^k$

3. *Сочетание* — способ выбрать несколько элементов из множества без учёта порядка.
   - *Сочетание без повторений* — учитывается порядок следования компонентов в выборке и не все данные элементы входят в составляемые комбинации (из трёх букв А, З, О выбрать две: АО, АЗ, ЗО): $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
   - *Сочетание с повторением* — учитывается порядок следования компонентов в выборке и не все данные элементы входят в составляемые комбинации, но имеются повторы при выборе компонент (из трёх букв А, З, О выбрать две: АА, АО, АЗ, ЗЗ, ЗО, ОО): $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Основные правила подсчёта

1. *Правило сложения.* Если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, и выборы взаимоисключающие (нельзя выбрать и A, и B), то выбрать A или B можно $m + n$ способами.
2. *Правило умножения.* Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пару (A, B) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Несовместные события

Несовместные (непересекающиеся) события — это такие события, которые не могут произойти одновременно в одном и том же испытании. Появление одного из них исключает появление другого.

Теорема сложения несовместных вероятностей. Для несовместных событий A и B вероятность наступления хотя бы одного из них (объединения $A \cup B$) равна сумме их вероятностей:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Примеры несовместных событий: при бросании игрального кубика событие A — выпало 1 очко, событие B — выпало 3 очка; одновременно эти два события наступить не могут.

Совместные события

Совместные события — это такие события, которые могут произойти одновременно в одном испытании: наступление одного из них не исключает наступления другого.

Теорема сложения совместных вероятностей. Для совместных событий A и B вероятность наступления хотя бы одного из них (объединения $A \cup B$) вычисляется по формуле:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

где $P(A \cap B)$ — вероятность одновременного наступления A и B.

Примеры совместных событий: событие A — «идёт дождь», событие B — «дует ветер»; одновременно эти два события наступить могут.

Независимые события

Независимые события — это такие события, наступление одного из которых не влияет на вероятность наступления другого (и наоборот).

Вероятность совместного наступления независимых событий. Для независимых событий A и B вероятность их совместного наступления (пересечения $A \cap B$) равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Примеры независимых событий: бросание игрального кубика, подбрасывание монеты, стрельба в тире.

Независимые события могут быть совместными (например, «орёл при первом броске монеты» и «решка при втором»).

Зависимые события

Зависимые события — это такие события, для которых вероятность наступления одного изменяется в зависимости от того, произошло ли другое событие.

Вероятность совместного наступления зависимых событий. Для зависимых событий A и B вероятность их одновременного наступления (пересечение $A \cap B$) вычисляется через условную вероятность:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

где $P(B|A)$ — вероятность B при условии, что A уже произошло, $P(A|B)$ — вероятность A при условии, что B уже произошло.

Примеры зависимых событий: вытягивание карт из колоды без возвращения.

Несовместные события всегда зависимы (если одно произошло, другое точно не произойдёт).

Условная вероятность

Условная вероятность — это вероятность наступления события A при условии, что событие B уже произошло (или считается произошедшим). Обозначается $P(A|B)$ («вероятность A при условии B»).

Вычисление условной вероятности. Условная вероятность $P(A|B)$ равна доле случаев, когда A происходит среди всех случаев, когда произошло B. То есть если $P(B) > 0$, то:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

где $P(A \cap B)$ — вероятность одновременного наступления A и B.

Если A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.

В общем случае $P(A|B) \neq P(B|A)$. Например, вероятность положительного теста при наличии болезни и вероятность болезни при положительном тесте могут быть совсем разными.

Формула Бернулли

Формула

$$P_n^k(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

нужна для вычисления вероятности того, что в серии из n независимых испытаний событие A произойдёт ровно k раз при условии, что вероятность события в каждом испытании постоянна. Здесь $P_n^k(A)$ — вероятность того, что событие A наступит ровно k раз в n испытаниях, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний (сколько есть способов выбрать k «успехов» из n испытаний), p — вероятность «успеха» в одном испытании, $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в одном испытании.

Схема Бернулли работает при выполнении трёх условий:

1. испытания независимы (результат одного не влияет на другие);
2. в каждом испытании только два исхода: «успех» (событие произошло) и «неудача» (не произошло);
3. вероятность «успеха» p одинакова во всех испытаниях.

Пример применения формулы Бернулли: монету подбрасывают 100 раз; какова вероятность, что «орёл» выпадет ровно 30 раза?