

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Окружности

Диаметр $d = 2r$

Длина окружности $l = 2\pi r$

Круг

Площадь $S = \pi r^2$

Цилиндр

Площадь боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

Площадь поверхности

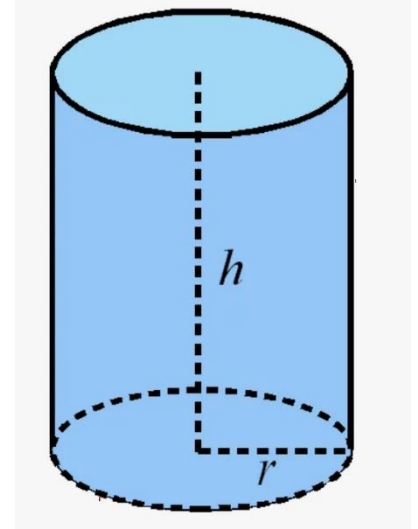
$$S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Площадь осевого сечения

$$S_{\text{ос.сеч}} = 2rh$$

Объём

$$V = S_{\text{осн}} h = \pi r^2 h$$

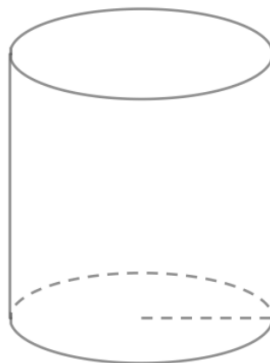


Задание 1

Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= 2\pi r \cdot h = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi \end{aligned}$$

$$\frac{S_{\text{бок}}}{\pi} = 12$$



$$r = 2$$

$$h = 3$$

$$\frac{S_{\text{бок}}}{\pi} = ?$$

Задание 2

Объём цилиндра равен 100π , а площадь боковой поверхности равна 25π . Найдите высоту цилиндра.

$$V = 100\pi$$

$$S_{\text{бок}} = 25\pi$$

$$h = ?$$

$$V = \pi r^2 h = 100\pi \Rightarrow r^2 h = 100$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot h = 25\pi \Rightarrow 2 \cdot r \cdot h = 25$$

$$\begin{cases} r^2 h = 100 \\ 2rh = 25 \end{cases} \quad \frac{r^2 h}{2rh} = \frac{100}{25} \Rightarrow \frac{r}{2} = 4 \Rightarrow r = 8$$

$$2 \cdot 8 \cdot h = 25 \Rightarrow h = \frac{25}{16} = 1,5625$$

Задание 3

Объем цилиндра равен 64π , а площадь боковой поверхности равна 32π . Найдите площадь полной поверхности цилиндра, деленную на π .

$$\begin{aligned} V &= 64\pi \\ S_{бок} &= 32\pi \\ \frac{S_{пол}}{\pi} &= ? \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \pi r^2 \cdot h &= 64\pi \\ 2\pi r \cdot h &= 32\pi \\ 2 \cdot 4 \cdot h &= 32 \Rightarrow h = \frac{32}{8} = 4 \\ S_{пол} &= S_{бок} + 2\pi r^2 = 32\pi + 2\pi \cdot 16 = 64\pi \\ \frac{S_{пол}}{\pi} &= 64 \end{aligned} \right. \quad \frac{r^2 h}{2rh} = \frac{64}{32} \Rightarrow \frac{r}{2} = 2 \Rightarrow r = 4$$

Задание 4

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 125π . Найдите площадь его осевого сечения.

$$\begin{aligned} S_{бок} &= 125\pi \\ S_{ос.сеч} &= ? \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} 2\pi r \cdot h &= 125\pi \Rightarrow 2rh = 125 \\ S_{ос.сеч} &= 2r \cdot h = 125 \end{aligned} \right.$$

Задание 5

Длина окружности основания цилиндра равна 13, высота равна 11. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 13 = l \\ h &= 11 \\ S_{бок} &= ? \end{aligned} \quad \left| \quad S_{бок} = 2\pi r \cdot h = 13 \cdot 11 = 143 \right.$$

Задание 6

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а диаметр основания равен 8. Найдите высоту цилиндра.

$$\begin{aligned} S_{бок} &= 24\pi \\ 2r &= 8 \\ h &= ? \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} S_{бок} &= 2\pi r \cdot h \Rightarrow \\ \pi \cdot 8 \cdot h &= 24\pi \\ h &= 3 \end{aligned} \right.$$

Задание 7

Найдите диаметр основания цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна 12π , а высота 24.

$$\begin{aligned}d &= 2r = ? \\ S_{\text{бок}} &= 12\pi \\ h &= 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\text{бок}} &= 2\pi r \cdot h \Rightarrow \\ 2r \cdot \pi \cdot 24 &= 12\pi \Rightarrow \\ d = 2r &= \frac{12\pi}{24\pi} = \frac{1}{2} = 0,5\end{aligned}$$

Задание 8

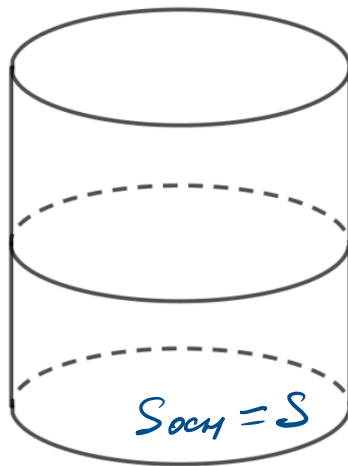
В цилиндрический сосуд налили 10 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,9 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

$$V_{\text{вода}} = 10$$

$$V_{\text{дет}} = x$$

$$V_{\text{обш}} = V_{\text{вода}} + V_{\text{дет}}$$

$$h_{\text{обш}} = 1,9 \cdot h_{\text{вода}}$$



$$V_{\text{вода}} = S \cdot h_{\text{вода}} = 10$$

$$V_{\text{обш}} = 10 + x = S \cdot h_{\text{обш}}$$

$$h_{\text{вода}} = \frac{10}{S}$$

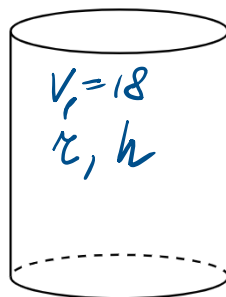
$$10 + x = S \cdot 1,9 \cdot \frac{10}{S}$$

$$10 + x = 19 \Rightarrow x = 9$$

Задание 9

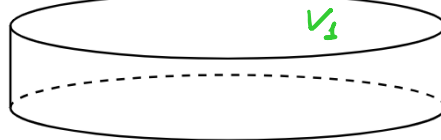
Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

$$V_1 = \pi r^2 \cdot h = 18$$



$$\frac{h}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi = V_2$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{r^2 \pi \cdot h}_{V_1} = \frac{4}{3} \cdot 18 = 4 \cdot 6 = 24$$



24

Конус

Образующая конуса

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Площадь боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

Площадь поверхности

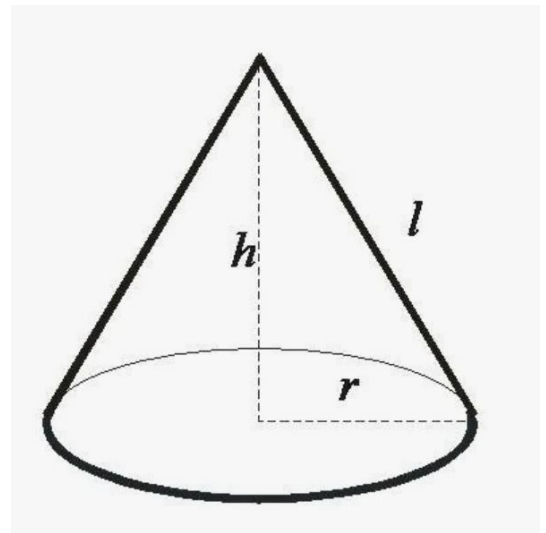
$$S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

Площадь осевого сечения

$$S_{\text{ос.сеч}} = r h$$

Объём

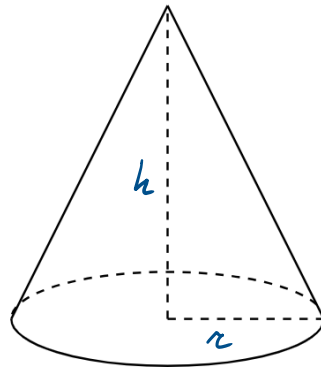
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Задание 10

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 11 раз, а высота останется прежней?

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \\ V_2 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (11r)^2 \cdot h = \\ &= 121 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \pi r^2 h}_{V_1} = \\ &= 121 \cdot V_1 \end{aligned}$$



$$V_1 \rightarrow V_2 = 121 \cdot V_1$$

Ответ: 121

Задание 11

Образующая конуса равна 20, длина окружности основания конуса равна 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

$$l = 20$$

$$L = 8$$

$$S_{\text{бок}} = ?$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot l \cdot r = \pi \cdot 20 \cdot r$$

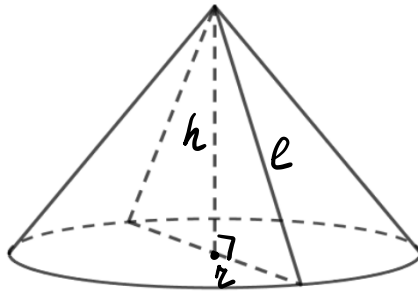
$$L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 20 \cdot \frac{4}{\pi} = 80$$

Задание 12

Диаметр основания конуса равен 160, а длина образующей равна 100. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

$$d = 160$$
$$l = 100$$
$$S_{\text{ос. сеч}} = ?$$



$$S_{\text{ос. сеч}} = r \cdot h$$
$$d = 2r \Rightarrow r = 80$$
$$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow$$
$$h = \sqrt{l^2 - r^2} =$$
$$= \sqrt{100^2 - 80^2} =$$

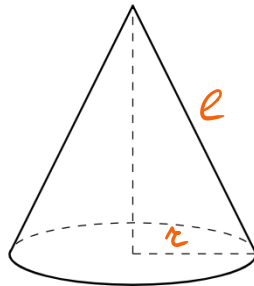
$$= \sqrt{20 \cdot 180} = \sqrt{3600} = 60$$

$$S_{\text{ос. сеч}} = 80 \cdot 60 = 4800$$

Задание 13

Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 4 раза, а образующая увеличится в 5 раз?

$$S_{\text{бок}}^1 = \pi \cdot r \cdot l$$
$$S_{\text{бок}}^2 = \pi \cdot \frac{r}{4} \cdot 5l =$$
$$= \frac{5}{4} \cdot \pi r l = \frac{5}{4} \cdot S_{\text{бок}}^1$$

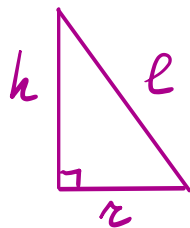


$$\frac{5}{4} = 1,25$$

Задание 14

Высота конуса равна 12, а диаметр основания — 10. Найдите образующую конуса.

$$h = 12$$
$$d = 10$$
$$l = ?$$



$$d = 2r \Rightarrow r = 5$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$$
$$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Задание 15

Площадь полной поверхности конуса равна 84. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

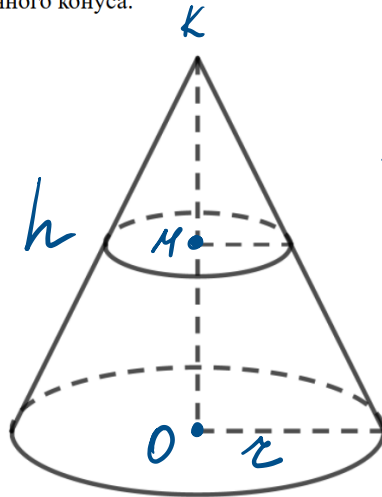
$$S_{\text{полн}} = 84$$

$$KM = MO$$

$$1) S_{\text{полн}}^{\text{с}} = 84 = \pi r(\ell + r)$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\pi r(\sqrt{h^2 + r^2} + r) = 84$$



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} =$$

$$= \pi r \ell + \pi r^2 =$$

$$= \pi r(\ell + r)$$

$$2) S_{\text{полн}}^{\text{с}} = \pi \cdot \frac{r}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{r}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi r \left(\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{r^2}{4}} + \frac{r}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi r \left(\sqrt{\frac{1}{4}(h^2 + r^2)} + \frac{r}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi r \left(\frac{1}{2} \sqrt{h^2 + r^2} + \frac{1}{2} r \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi r \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{\dots} + r) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\pi r(\sqrt{h^2 + r^2} + r)}_{S_{\text{полн}} = 84} = \frac{1}{4} \cdot 84 = 21$$

Задание 16

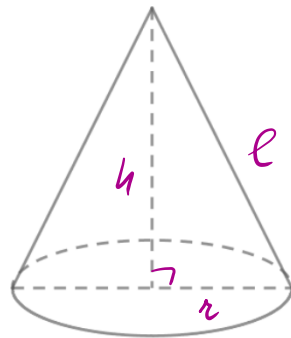
Образующая конуса равна 26, а диаметр основания равен 48. Найдите высоту конуса.

$$\ell = 26$$

$$d = 48$$

$$h = ?$$

$$d = 2r \Rightarrow r = 24$$



$$h^2 = \ell^2 - r^2$$

$$h = \sqrt{26^2 - 24^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 50} =$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

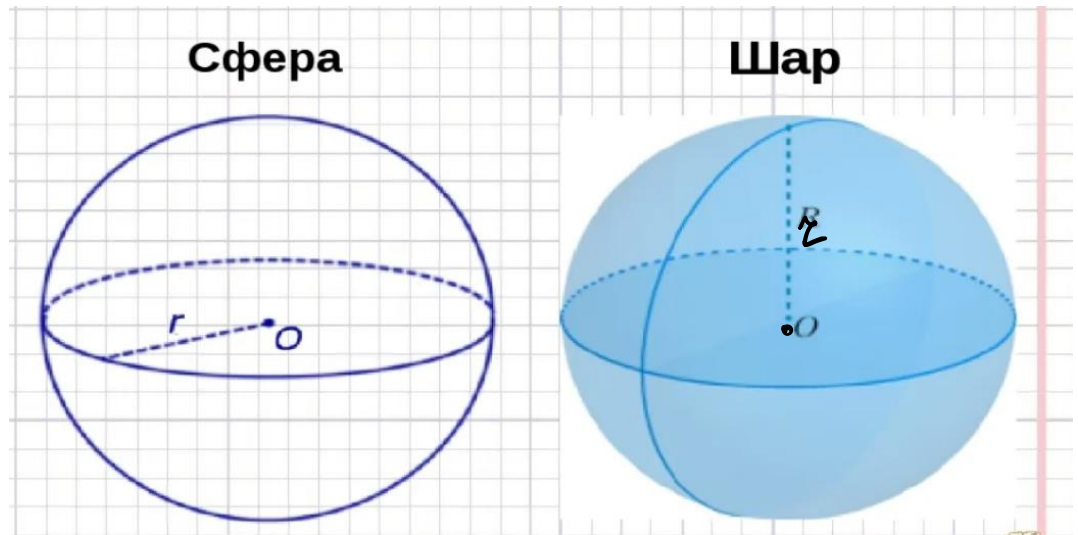
Сфера, шар

Площадь
поверхности
шара/сферы

$$S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$$

Объём шара

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Задание 17

Объём шара равен $\frac{36}{\sqrt{\pi}}$. Чему будет равна площадь поверхности шара, если его радиус увеличить на $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$?

$$V = \frac{36}{\sqrt{\pi}}$$

$$S_{\text{пов}} = ?$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{36}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$$

$$S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{36}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{27}{\pi^{3/2}} = \frac{3^3}{(\pi^{1/2})^3}$$

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow r + \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$$

$$S_{\text{пов}} = 4\pi \cdot \left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{81}{\pi} = 324$$

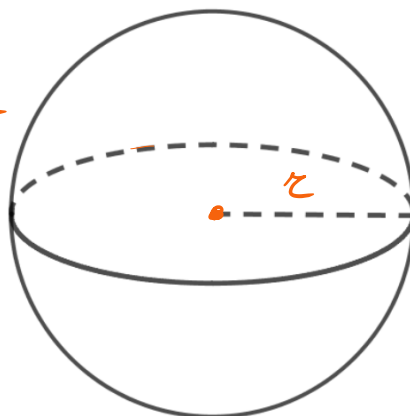
Задание 18

Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

$$S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$$

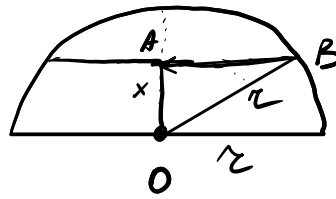
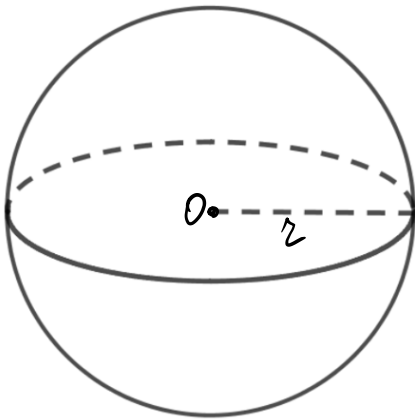
$$S_{\text{круга}} = 3 = \pi r^2$$

$$S_{\text{пов}} = 4 \cdot 3 = 12$$



Задание 19

Площадь поверхности шара равна 64. На расстоянии $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ от центра шара проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.



$$x = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$$

$$S_{\text{сеч}} = \pi R^2 = \pi \cdot AB^2$$

$$AB^2 = r^2 - x^2$$

$$S_{\text{шар}} = 4\pi r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = \frac{64}{4\pi} = \frac{16}{\pi}$$

$$AB^2 = \frac{16}{\pi} - \left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{16}{\pi} - \frac{9}{4\pi} = \frac{64}{4\pi} - \frac{9}{4\pi}$$

$$AB^2 = \frac{55}{4\pi}$$

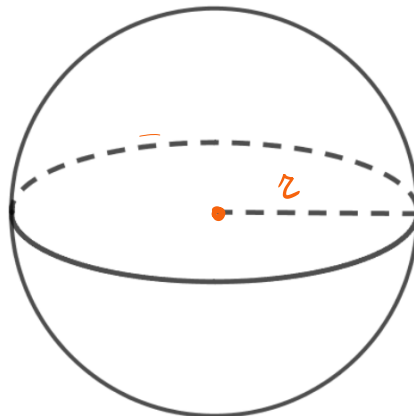
$$S_{\text{сеч}} = \pi \cdot \frac{55}{4\pi} = \frac{55}{4} = 13,75$$

Задание 20

Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.

$$S_{\text{шар}} = 24$$

$$S_{\text{больш. кр.}} = ?$$



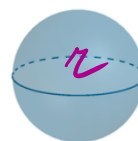
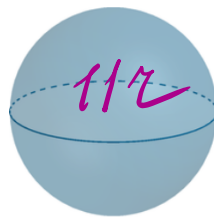
$$S_{\text{шар}} = 4\pi r^2$$

$$S_{\text{сеч}} = \pi r^2$$

Ответ: 6

Задание 21

Радиус первого шара в 11 раз больше радиуса второго шара. Во сколько раз площадь поверхности второго шара меньше площади поверхности первого шара?



$$S_{\text{мал}} = 4\pi r^2$$

$$S_{\text{больш}} = 4\pi (11r)^2$$

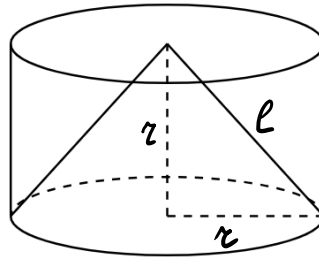
Вписанные и описанные тела

Задание 22

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

$$S_{\text{бок.ц}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2$$

$$\begin{aligned} S_{\text{бок.к}} &= \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \\ &= \pi r \sqrt{2r^2} = \pi r \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2 \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$S_{\text{бок.ц}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2\pi r^2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\pi r^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\text{бок.к}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 3$$

Задание 23

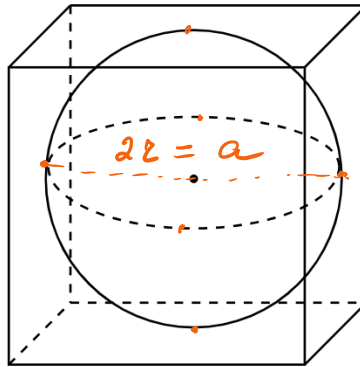
Куб описан около шара, объем которого равен 3π . Найдите объем куба.

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = 3\pi$$

$$V_{\text{к}} = a^3$$

$$a = 2r$$

$$V_{\text{к}} = ?$$



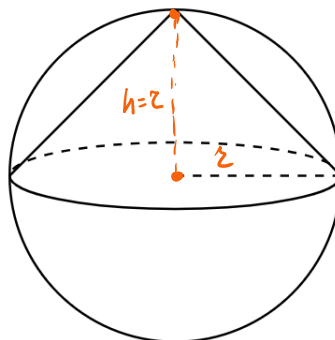
18

Задание 24

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 60. Найдите объем конуса.

$$V_{\text{ш}} = 60 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

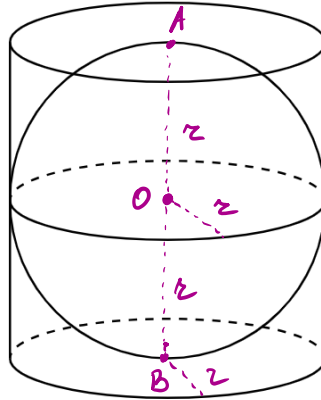


15

Задание 25

Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 21. Найдите площадь поверхности шара.

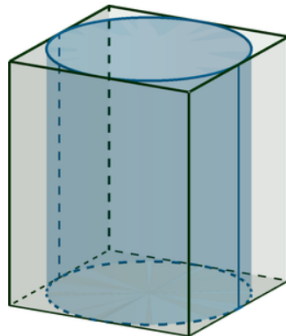
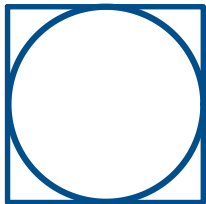
Шар
 r ; $S_{\text{пов}} = 4\pi r^2$
 $S_{\text{пов}} = 4 \cdot \frac{7}{2} =$
 $= 2 \cdot 7 = 14$



Используя
 r ; $h = 2r$
 $S_{\text{пов}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$
 $S_{\text{пов}} = 21$
 $2\pi r(h+r) = 21 \Rightarrow$
 $2\pi r(2r+r) = 21 \Rightarrow$
 $2\pi r \cdot 3r = 21 \Rightarrow$
 $6\pi r^2 = 21 \Rightarrow$
 $\sqrt{\pi r^2} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Задание 26

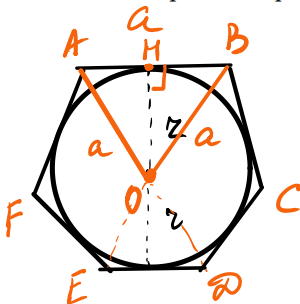
Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, объем которого равен 7π . Найдите объем призмы.



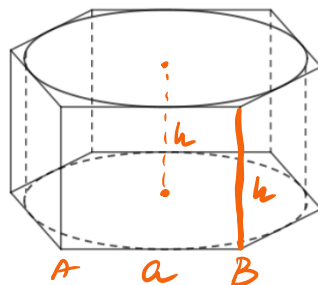
28

Задание 27

Цилиндр вписан в правильную шестиугольную призму. Радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



$r = 2\sqrt{3}$
 $h = 4$



$S_{\text{бок. пр}} = 6 \cdot h \cdot a$

$\triangle ABO$; кривая гипотенуза.

$r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$(2\sqrt{3})^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$

$4 \cdot 3 = \frac{3}{4} a^2$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$S_{\text{бок. пр}} = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$