

ПОКАЗАТЕЛИ

$$a^x, a^{f(x)}, \dots$$

$$a > 0, a \neq 1$$

1. Уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$a^{f(x)} = b, b = \text{const} \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^c, c = \text{const} \Rightarrow f(x) = c$$

Задача 1

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Найдите корень уравнения $4^{x-7} = \frac{1}{64}$.

$$4^{x-7} = 64^{-1}$$

$$4^{x-7} = 4^{-3}$$

$$x-7 = -3$$

$$x = 4$$

Задача 2

Найдите корень уравнения $3^{x-5} = \frac{1}{27}$.

$$2$$

Задача 3

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 125$.

$$2$$

Задача 4

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} = \frac{1}{16}$.

$$7$$

Задача 5

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} = 6^x$.

1

Задача 6

Решить уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} = 0,04$.

-1

2. Прикладные задачи

Задача 7

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса m (в мг) уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время (в минутах), прошедшее от начального момента, T — период полураспада (в минутах). В начальный момент времени масса изотопа равна 20 мг. Период его полураспада составляет 10 минут. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

$$m_0 = 20$$

$$t = ?$$

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$T = 10$$

$$5 = 20 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$m = 5$$

$$t = 20$$

Задача 8

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}^4,$$

где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$.

Найдите, какой объём V в кубических метрах будет занимать газ при давлении p , равном $2 \cdot 10^7$ Па.

$$k = \frac{4}{3}$$

$$V = ?$$

$$p = 2 \cdot 10^7$$

$$2 \cdot 10^7 \cdot V^{\frac{4}{3}} = 3,2 \cdot 10^4 \quad | : (2 \cdot 10^7)$$

$$V^{\frac{4}{3}} = \frac{3,2 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^7}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\sqrt[3]{V^4} = 1,6 \cdot 10^{-3}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$$\sqrt[3]{V^4} = 1,6 \cdot 0,001 = 0,0016 \quad | \text{ возвести в куб}$$

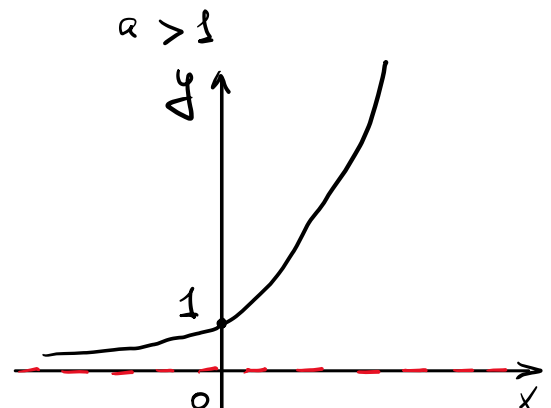
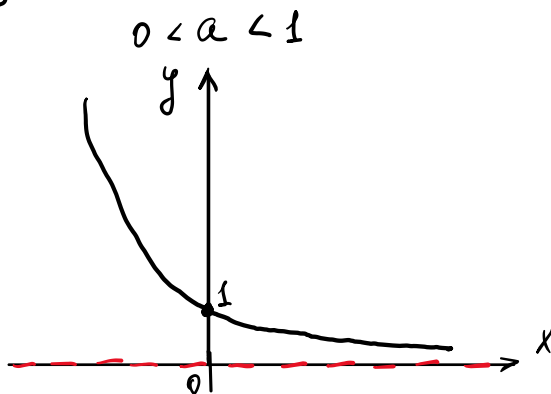
$$V^4 = (0,0016)^3 = (0,2^4)^3$$

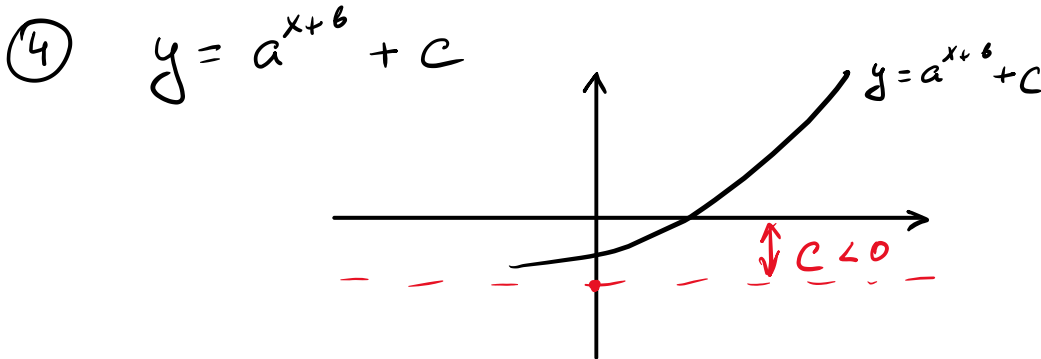
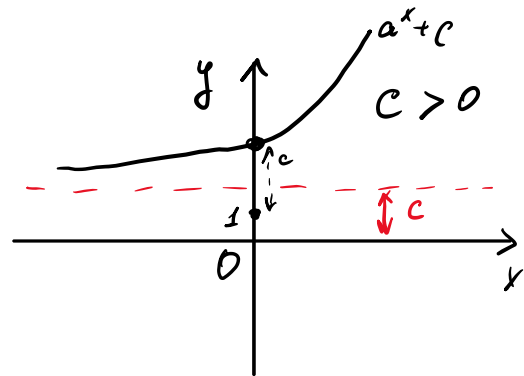
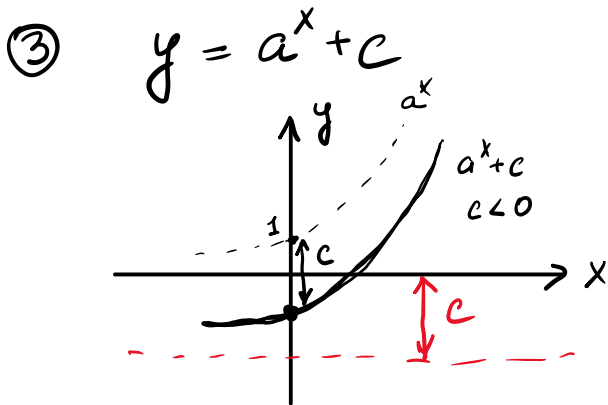
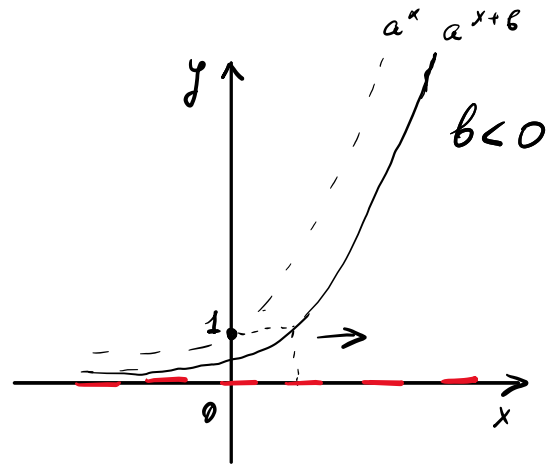
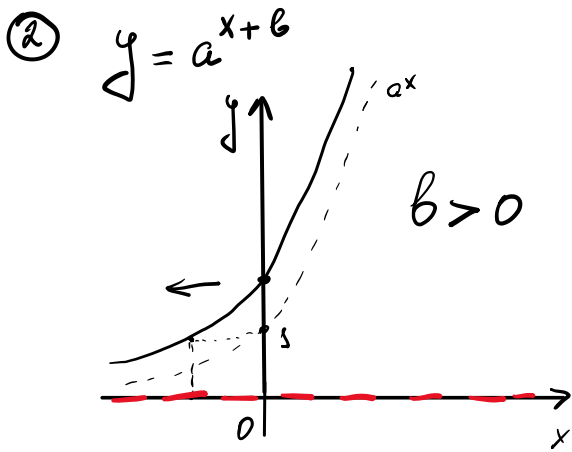
$$V^4 = (0,2^3)^4 \quad | \text{ извлечь } \sqrt[4]{}$$

$$V = 0,2^3 = 0,008$$

3. Графики функций

① $y = a^x$





Задача 9

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.

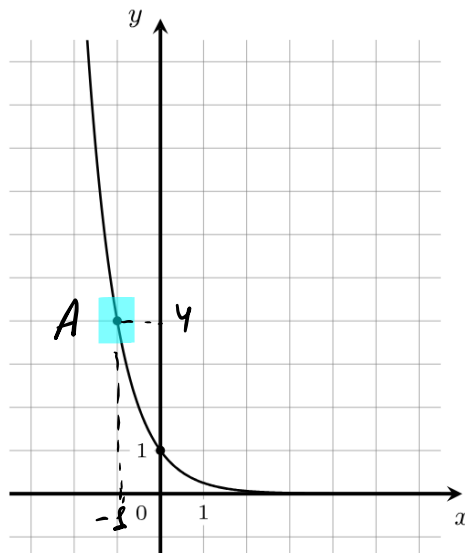
$(-1; 4)$ в $y = a^x$

$$a^{-1} = 4$$

$$\frac{1}{a} = 4$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

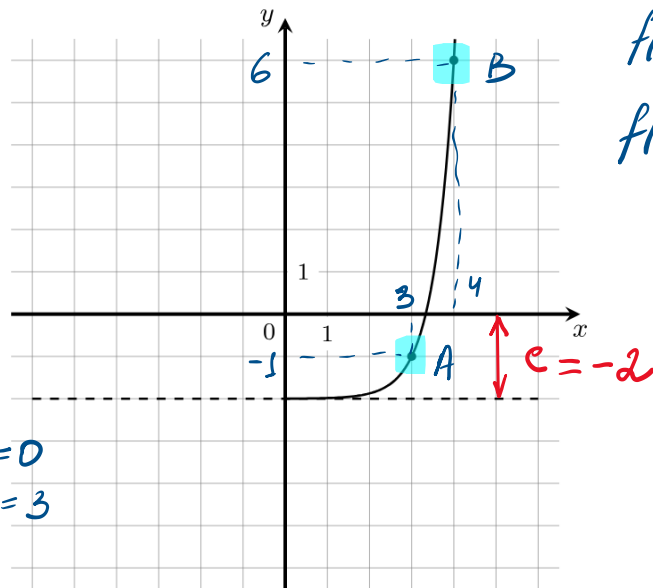


$$f(-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$$

Задача 10

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{(x-b)} + c$. Найдите $f(5)$.

$A(3; -1)$
 $B(4; 6)$
представим в
 $y = a^{x-b} - 2$
$$\begin{cases} -1 = a^{3-b} - 2 \\ 6 = a^{4-b} - 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^{3-b} = 1 \Rightarrow 3-b=0 \\ a=8 \end{cases} \quad b=3$$



$$f(x) = 8^{x-3} - 2$$
$$f(5) = 8^2 - 2 = 64 - 2 = 62$$

Задача 11

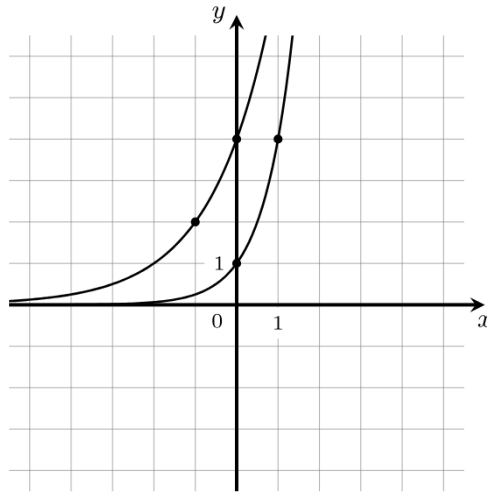
На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



27

Задача 12

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a^x$ и $g(x) = k \cdot b^x$, пересекающиеся в точке А. Найдите абсциссу точки А.



4. Анализ показательной функции

$$\boxed{I} \quad y = f \cdot g \Rightarrow y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Пример:

$$1) \quad y = (x-3) \cdot (x^2+8) = x^3 + 8x - 3x^2 - 24$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 8$$

II способ:

$$y' = (x-3)' \cdot (x^2+8) + (x-3) \cdot (x^2+8)'$$

$$y' = 1 \cdot (x^2+8) + (x-3) \cdot 2x$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 8$$

$$2) \quad y = (x-3) \cdot a^x = \underline{x} \cdot \underline{a^x} - 3 \cdot a^x$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$\boxed{2} \quad y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример:

$$y = e^{x^2-4} \Rightarrow y' = (e^{x^2-4})' = e^{x^2-4} \cdot (x^2-4)'$$

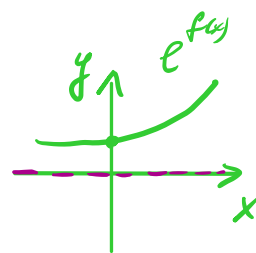
$$y' = e^{x^2-4} \cdot 2x$$

$$e^{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

$$g(x) = 0$$

$$e^x > 0$$

$$e^{f(x)} > 0$$



Задача 13

Найдите точку минимума функции $y = (7-x) \cdot e^{7-x}$.

$$y' = (7-x)' \cdot e^{7-x} + (7-x) \cdot (e^{7-x})'$$

$$y' = -1 \cdot e^{7-x} + (7-x) \cdot e^{7-x} \cdot \underbrace{(7-x)'}_{-1}$$

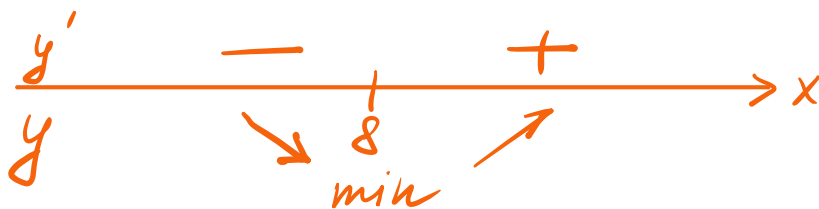
$$y' = -e^{7-x} - (7-x)e^{7-x}$$

$$y' = e^{7-x} (-1 - 7 + x)$$

$$y' = e^{7-x} (x-8)$$

$$y' = 0 : \underbrace{e^{7-x}}_{>0} \cdot (x-8) = 0 \Leftrightarrow x-8 = 0$$

$$x = 8$$



8

Задача 14

Найдите точку максимума функции $y = (4 - x) \cdot e^{x+4}$.

3

Задача 15

Найдите точку минимума функции $y = (8x^2 - 40x + 40) e^{x+4}$.

3

$$y' = (8x^2 - 40x + 40)' \cdot e^{x+4} + (8x^2 - 40x + 40) \cdot (e^{x+4})'$$

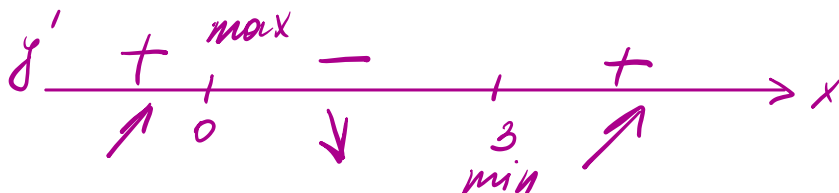
$$y' = (16x - 40) \cdot e^{x+4} + (8x^2 - 40x + 40) e^{x+4} \cdot \underbrace{(x+4)'}_1$$

$$y' = e^{x+4} (16x - 40 + 8x^2 - 40x + 40)$$

$$y' = e^{x+4} \cdot (8x^2 - 24x) = 0$$

$$8x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 8x(x - 3) = 0$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$



Задача 16

Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 13x + 13) e^{5-x}$.

~~13~~ 13

$$y' = (x^2 - 13x + 13)' \cdot e^{5-x} + (x^2 - 13x + 13) \cdot (e^{5-x})'$$

$$y' = (2x - 13) \cdot e^{5-x} + (x^2 - 13x + 13) \cdot e^{5-x} \cdot \underbrace{(5-x)'}_{-1}$$

$$y' = e^{5-x} (2x-13 - x^2 + 13x - 13)$$

$$y' = e^{5-x} (-x^2 + 15x - 26); \quad y' = 0$$

$$-x^2 + 15x - 26 = 0$$

$$x^2 - 15x + 26 = 0$$

$$+ \mid 15 \mid \quad 2 = x_1$$

$$\cdot \mid 26 \mid \quad 13 = x_2$$

