

# ЛОГАРИФМЫ

## Определение

**Логарифм** числа  $x$  по основанию  $a$  — это показатель степени, в которую нужно возвести основание  $a$ , чтобы получить число  $x$ .

Математически это записывается так:

$$\log_a x = y$$

- $a$  — основание логарифма ( $a > 0, a \neq 1$ );
- $x$  — аргумент логарифма ( $x > 0$ );
- $y$  — значение логарифма (искомый показатель степени).

По определению, нахождение  $y = \log_a x$  равносильно решению уравнения

$$a^y = x$$

## Примеры применения определения логарифма для вычисления

1.  $\log_2 32 = y$

$$2^y = 32 \Rightarrow y = 5$$

$$\begin{aligned} \log_2 32 &= y \cdot 1 \\ \log_2 32 &= y \cdot \log_2 2 \\ \log_2 32 &= \log_2 2^y \\ 32 &= 2^y \end{aligned}$$

2.  $\log_7 343 = y$

$$7^y = 343 \Rightarrow y = 3$$

3.  $\log_{\frac{1}{3}} 27 = y$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = 27 \Rightarrow 3^{-y} = 3^3 \Rightarrow y = -3$$

4.  $\log_{\sqrt{5}} 625 = y$

$$(\sqrt{5})^y = 625 \Rightarrow 5^{\frac{1}{2} \cdot y} = 5^4 \Rightarrow y = 8$$

5.  $\log_4 3 = y$

$$4^y = 3$$

$y$  — иррацион. число

## Свойства логарифмов

1.  $\log_a 1 = 0$
2.  $\log_a a = 1$
3.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5.  $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
6.  $\log_a^m x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$
7. Формула перехода к новому основанию

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

В частном случае

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

8.  $a^{\log_a x} = x$

## Частные случаи логарифмов

1. Натуральный логарифм (основание  $e \approx 2,71828182845904523536028747$ )

$$\ln x = \log_e x$$

2. Десятичный логарифм (основание равно 10)

$$\lg x = \log_{10} x$$

## Преобразование выражений (ЕГЭ-7)

### Задача 1

Найдите значение выражения  $\log_2 6,4 + \log_2 10 = \log_2 (6,4 \cdot 10) =$   
 $= \log_2 64 = y \Rightarrow 2^y = 64 \Rightarrow y = 6$

### Задача 2

Найдите значение выражения  $\log_2 56 - \log_2 7 = \log_2 \frac{56}{7} = \log_2 8$   
 $3$

### Задача 3

Найдите значение выражения  $\log_{0,6} 50 - \log_{0,6} 18$ .

-2

### Задача 4

Найдите значение выражения  $\frac{\log_7 32}{\log_7 2} = \log_2 32 = 5$

### Задача 5

Найдите значение выражения  $\frac{\log_6 17}{\log_{36} 17}$ .

~~0,5~~ 2

$$\frac{\log_6 17}{\log_{6^2} 17} = \frac{\log_6 17}{\frac{1}{2} \cdot \log_6 17} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

### Задача 6

Найдите значение выражения  $8 \log_5 \sqrt[4]{5}$ .

2

$$1) \dots = \log_5 (\sqrt[4]{5})^8 = \log_5 5^2 = 2$$

$$2) \dots = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$$

### Задача 7

Найдите значение выражения  $6 \log_{\sqrt[6]{13}} 13$ .

36

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$$

## Логарифмические уравнения (ЕГЭ-6)

- $\log_a x = b, b = const$   
Решение:  $x = a^b$
- $\log_a f(x) = b, b = const$   
Решение:  $f(x) = a^b$ , ОДЗ  $f(x) > 0$
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$   
Решение:  $f(x) = g(x)$ , ОДЗ  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- $\log_{f(x)} a = b, b = const$   
Решение:  $f^b(x) = a$ , ОДЗ  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$

### Задача 8

Решите уравнение  $\log_x 32 = 5$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ ОДЗ} \quad x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

### Задача 9

Решите уравнение  $\log_3(2x - 7) = 3$

$$\begin{array}{l} \text{ОДЗ} \\ 2x - 7 > 0 \\ x > 3,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x - 7 = 3^3 \\ 2x - 7 = 27 \\ 2x = 34 \Rightarrow x = 17 \end{array}$$

### Задача 10

Решите уравнение  $\log_{0.5}(7 - x) = -3$

$$\begin{array}{l} 7 - x > 0 \\ x < 7 \text{ (ОДЗ)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 - x = (0,5)^{-3} \\ 7 - x = 8 \\ x = -1 \end{array}$$

### Задача 11

Решите уравнение  $4 \log_5(x+1) = \log_5 16$

ОДЗ:  
 $x+1 > 0$   
 $x > -1$

$$\log_5(x+1)^4 = \log_5 16$$
$$(x+1)^4 = 2^4$$

$$|x+1| = 2 \quad \text{или} \quad x+1 = \pm 2$$

$$x+1 = 2$$
$$x_1 = 1$$

$$x+1 = -2$$
$$x_2 = -3$$

НЕ удовл.  
услов. ОДЗ

### Задача 12

Решите уравнение  $\log_2(10 - 5x) = \underline{\underline{3}} \log_2 5$

ОДЗ  
 $10 - 5x > 0$   
 $x < 2$

$$\log_2(10 - 5x) = \log_2 5^3$$
$$10 - 5x = 125$$
$$-5x = 115$$
$$x = -23$$

## Задачи с прикладным характером (ЕГЭ-9)

### Задание 13

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени  $\nu = 3$  моля воздуха объёмом  $V_1 = 32$  л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма  $V_2$ . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ , где  $\alpha = 11,5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — постоянная, а  $T = 300 \text{ К}$  — температура воздуха. Найдите, какой объём  $V_2$  (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 20700 Дж.

$$\nu = 3$$
$$V_1 = 32$$
$$\alpha = 11,5$$
$$T = 300$$
$$A = 20700$$
$$A = \alpha \cdot \nu \cdot T \cdot \log_2 \frac{V_1}{V_2}$$
$$V_2 = ?$$

$$20700 = 11,5 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{32}{V_2}$$
$$\log_2 \frac{32}{V_2} = \frac{20700}{11,5 \cdot 3 \cdot 300} = \frac{690}{115 \cdot 3}$$

$$\log_2 32 - \log_2 V_2 = 2$$
$$5 - \log_2 V_2 = 2$$
$$-\log_2 V_2 = -3$$
$$\log_2 V_2 = 3$$
$$V_2 = 2^3 = 8$$

Ответ: **8**

## Задание 14

Водолазный колокол, содержащий  $\nu = 3$  моль воздуха при давлении  $p_1 = 1,4$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления  $p_2$  (в атмосферах). Работа  $A$  (в Дж), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ , где  $\alpha = 10,9 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — постоянная,  $T = 300 \text{ К}$  — температура воздуха. Найдите давление  $p_2$  воздуха в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа 29430 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

11,2

## Задание 15

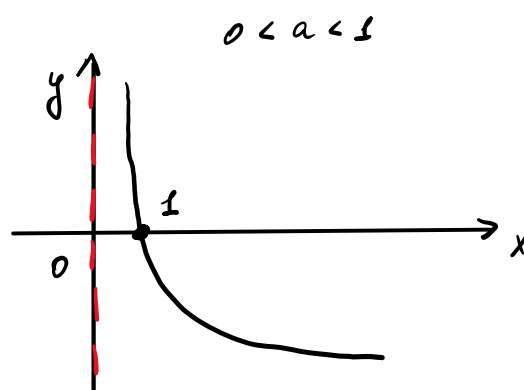
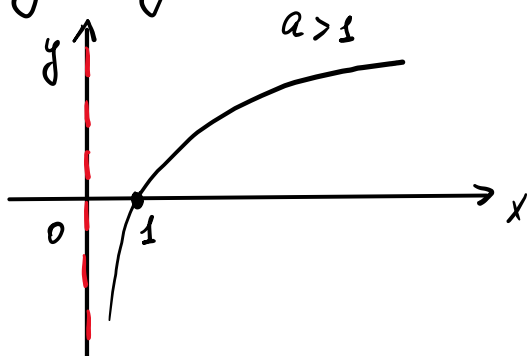
Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна  $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ . Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением  $R = 5 \cdot 10^6 \text{ Ом}$ . Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе  $U_0 = 16 \text{ кВ}$ . После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения  $U$  (кВ) за время  $t = \alpha RC \cdot \log_2 \frac{U_0}{U}$  (с), где  $\alpha = 0,7$  — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

4

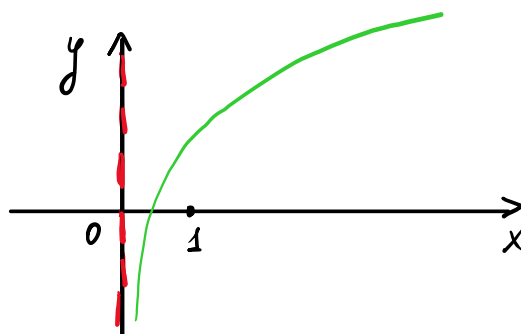
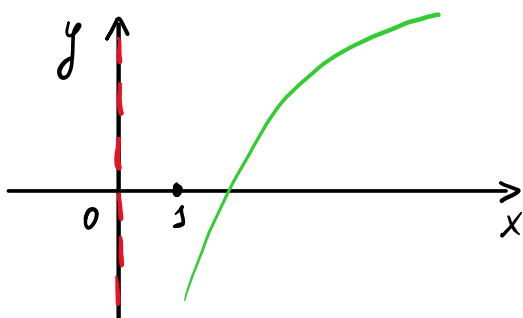
$$35 = 0,7 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \log_2 \frac{16}{U}$$
$$\log_2 \frac{16}{U} = \frac{35}{0,7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7}{0,7 \cdot 5} = \frac{1}{0,1 \cdot 5} = \frac{1}{0,5} = 2$$
$$\log_2 \frac{16}{U} = 2 \Rightarrow \frac{16}{U} = 2^2 \Rightarrow U = 4$$

## Графики логарифмических функций (ЕГЭ-11)

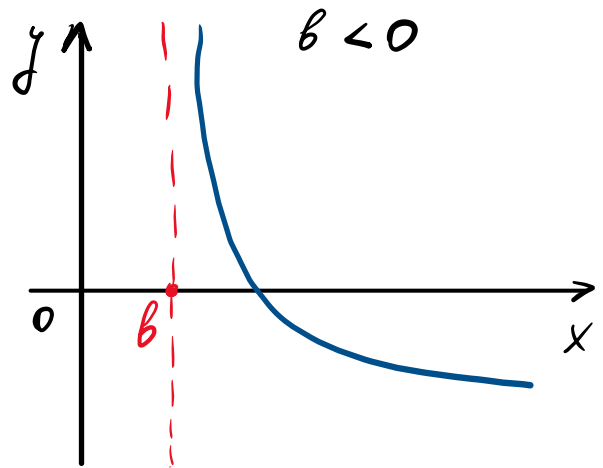
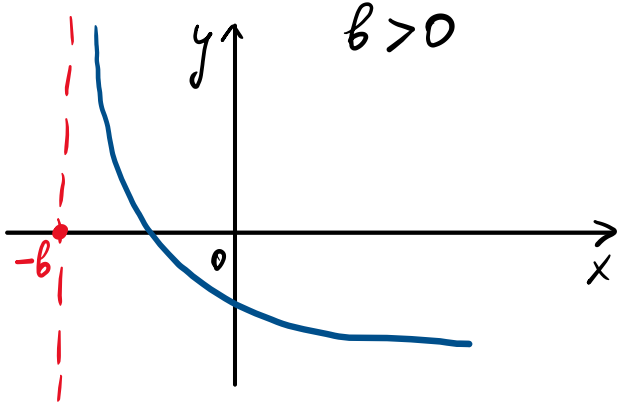
①  $y = \log_a x, \quad x > 0$



②  $y = \log_a x + c$

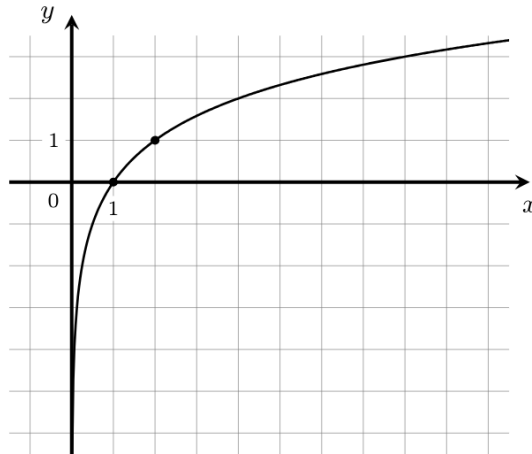


③  $y = \log_a(x+b)$



### Задание 16

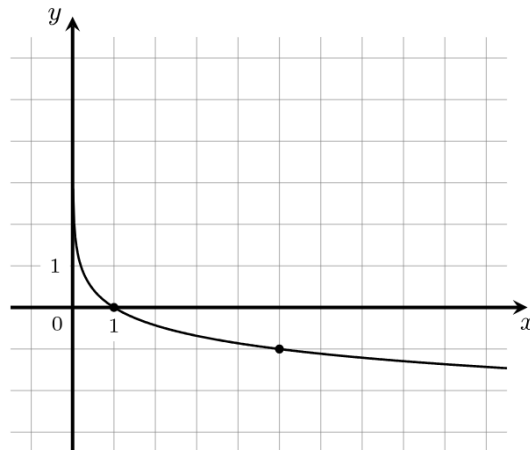
На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(8)$ .



3

### Задание 17

На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(25)$ .



-2

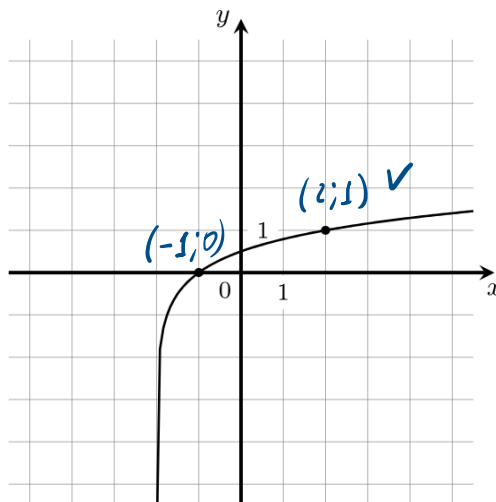
### Задание 18

На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a(x+2)$ . Найдите  $f(62)$ .

$$\log_a(-1+2) = 0$$
$$a^0 = 1 \quad \parallel$$

$$\log_a(2+2) = 1$$
$$a^1 = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$y = \log_4(x+2)$$



3

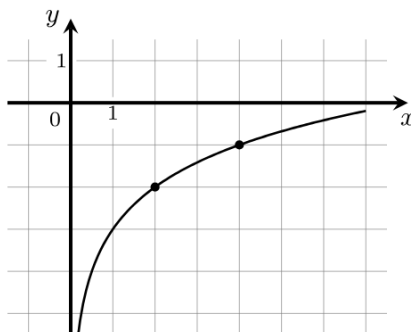
$$y = \log_4(62+2)$$

$$y = \log_4 64$$

$$y = 3$$

### Задание 19

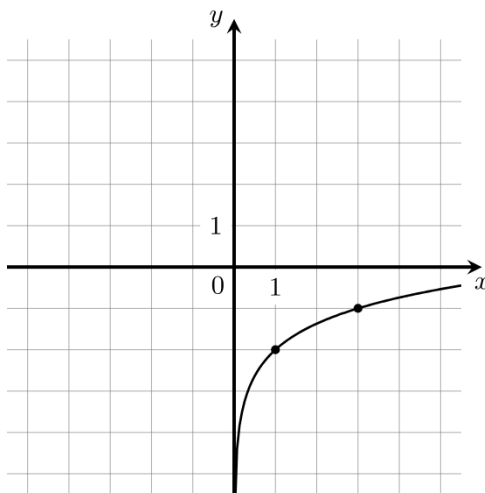
На рисунке изображен график функции  $f(x) = a + \log_b x$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 1$ .



16

### Задание 20

На рисунке изображен график функции  $f(x) = b + \log_a x$ . Найдите  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ .



-3

### Задание 21

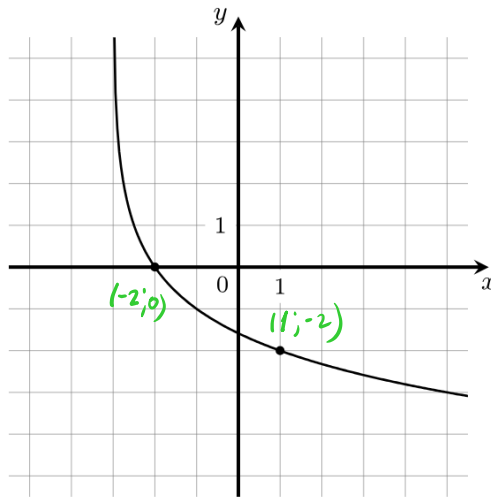
На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = -4$ .

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-2a+b) = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(a+b) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+b = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ a+b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+b = 1 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a = -3 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$



13

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) = -4$$

$$x+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$x+3 = 16$$

$$x = 13$$

### Задание 22

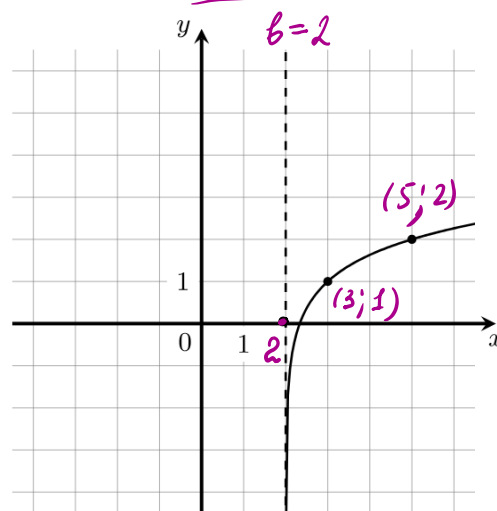
На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a(x-b) + c$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 4$ .

$$\begin{cases} \log_a(3-2) + c = 1 \\ \log_a(5-2) + c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a 1 + c = 1 \\ \log_a 3 + c = 2 \end{cases}$$

$$c = 1$$

$$\log_a 3 = 1 \Rightarrow a = 3$$



$$\log_a 1 = 0$$

29

$$\log_3(x-2) + 1 = 4$$

$$\log_3(x-2) = 3$$

$$x-2 = 3^3$$

$$x = 29$$

### Исследование логарифмических функций с помощью производной (ЕГЭ-12)

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\ln e = 1$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

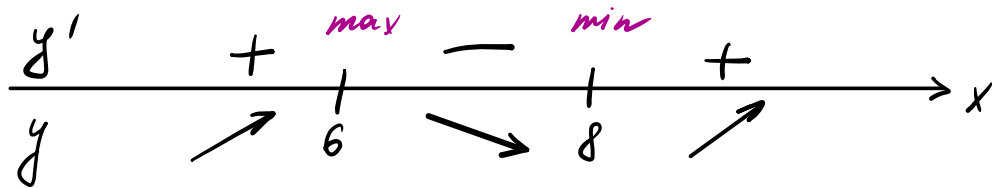
### Задание 23

Найдите точку минимума функции  $y = x^2 - 28x + 96 \cdot \ln x + 31$ .

$$y' = 2x - 28 + 96 \cdot \frac{1}{x} + 0 = 2x - 28 + \frac{96}{x}$$

$$y' = 0: 2x - 28 + \frac{96}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 28x + 96}{x} = 0$$

$$2x^2 - 28x + 96 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \quad + | \begin{matrix} 14 \\ 48 \end{matrix}$$
$$x_1 = 6, x_2 = 8$$



Ответ: 8

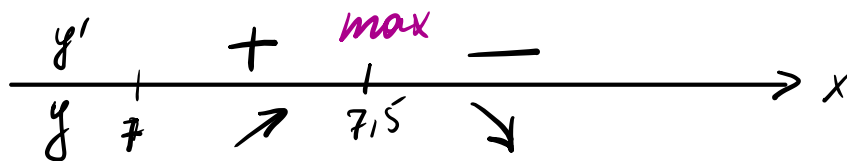
### Задание 24

Найдите точку максимума функции  $y = \ln(x - 7) - 2x - 3$ .

$$y' = \frac{1}{x-7} \cdot (x-7)' - 2 - 0 = \frac{1}{x-7} - 2$$

$$y' = 0: \frac{1}{x-7} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-7} = 2 \Rightarrow 2(x-7) = 1$$

$$2x = 15 \Rightarrow x = 7,5$$



Ответ: 7,5

### Задание 25

Найдите точку минимума функции  $y = x^2 - 15x + 28 \ln x - 42$ .

4

**Задание 26**

Найдите точку максимума функции  $y = \ln(x - 9) - 10x + 12$ .

9,1

**Задание 27**

Найдите точку максимума функции  $y = 3,5x^2 - 29x + 30 \ln x + 67$ .

2