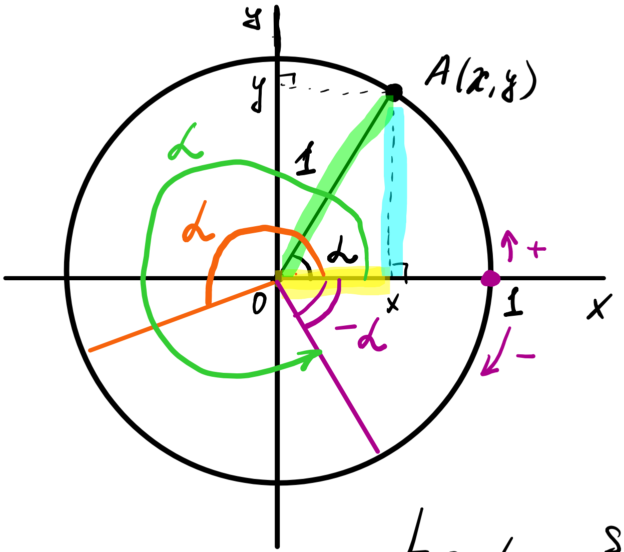


$$\sin\alpha = \frac{y}{1}$$

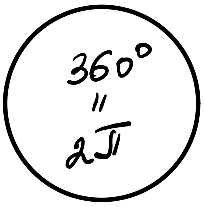
$$\cos\alpha = \frac{x}{1}$$

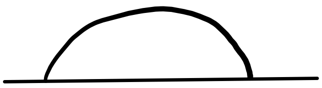
$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= y\\ \cos\alpha &= x\end{aligned}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ;\quad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}-1 \le \sin\alpha \le 1\\ -1 \le \cos\alpha \le 1\end{aligned}}$$





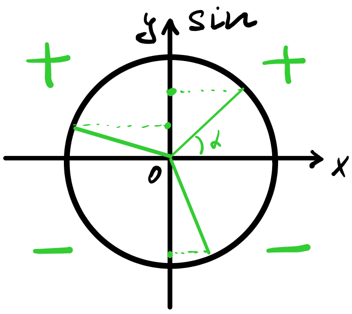
$180° = \pi$

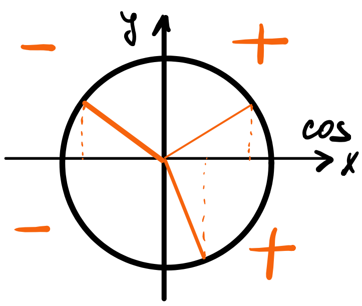
α в градусах → α в радианах

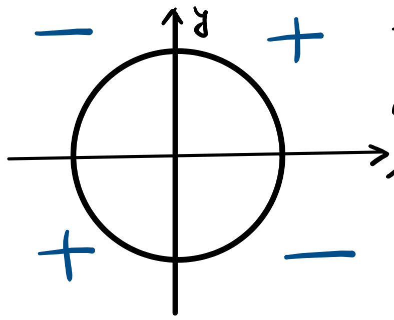
$$\boxed{\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\cdot\pi}$$

$$30^\circ \longrightarrow \frac{30^\circ}{180^\circ}\cdot\pi = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4} : \pi \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$$

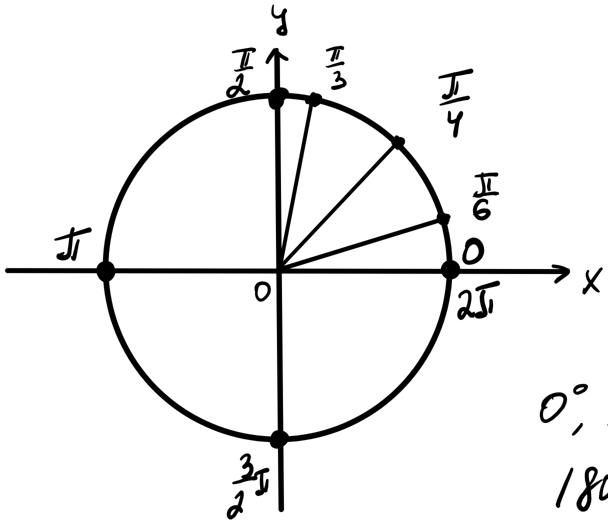


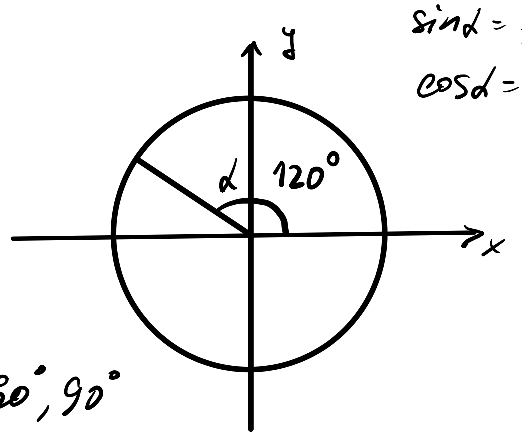




$tg = \frac{\sin}{\cos}$

$ctg = \frac{\cos}{\sin}$





$\sin\alpha = ?$

$\cos\alpha = ?$

$0°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 90°$

$180°,\ 270°,\ 360°$

$120° = 90° + 30°$

$120° = 180° - 60° = 180° + (-60°)$

I способ формулы из справочных материалов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin 120° = \sin(\overset{\alpha}{90°} + \overset{\beta}{30°}) = \underbrace{\sin 90°}_{1}\cdot\cos 30° + \underbrace{\cos 90°}_{0}\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = \cos(180° + (-60°)) =$$

$$= \underbrace{\cos 180°}_{-1}\cdot\underbrace{\cos(-60°)}_{\text{четн.}} - \underbrace{\sin 180°}_{0}\cdot\sin(-60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

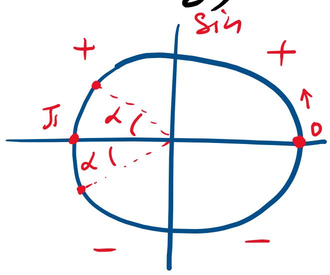
II способ ф-лы приведения $(\alpha < 90° = \frac{\pi}{2})$

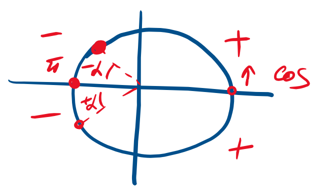
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \cancel{\sin(-\alpha)} = +\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = \cancel{\cos(-\alpha)} = -\cos\alpha$



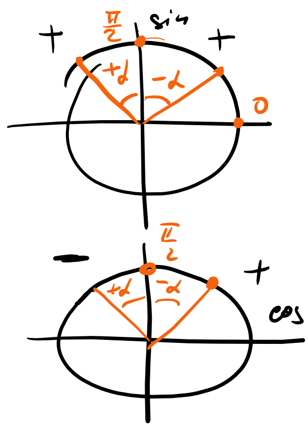


$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cancel{\cos(-\alpha)}=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cancel{\sin(-\alpha)}=+\sin\alpha$$



Период можно убрать (если он полный $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$)

$$\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{19}{4}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi=$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Часть 1. Преобразование выражений (ЕГЭ-7)

Задача 1

Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8} =$

$$= 3\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sin^2\frac{9\pi}{8}\right) = 3\sqrt{2}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{9\pi}{8}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{9\pi}{4} = 3\sqrt{2}\cdot\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

Задача 2

Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\cos^2\frac{23\pi}{12} - 4\sqrt{3}\sin^2\frac{23\pi}{12}$. 6

Задача 3

Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\cos^2\frac{13\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{13\pi}{12} - 1\right) =$

$$= \sqrt{3}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{13}{12}\pi\right) = \sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Задача 4

Найдите значение выражения $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2\frac{15\pi}{8}$. 1

Задача 5

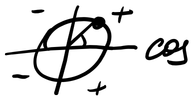
Найдите значение выражения $18\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$. 18

Задача 8

Найдите значение выражения $\frac{3\sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ}$. $= 6$

$$\frac{3\sin(2\cdot 34^\circ)}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ} = \frac{3\cdot 2\cdot \sin 34^\circ \cdot \cancel{\cos 34^\circ}}{\cancel{\cos 34^\circ} \cdot \cos 56^\circ} = \frac{6\sin 34^\circ}{\cos(90^\circ - 34^\circ)} =$$

$$= \frac{6\cdot \cancel{\sin 34^\circ}}{\cancel{\sin 34^\circ}} = 6$$



Задача 9

Найдите значение выражения $\frac{8\sin 64^\circ \cdot \cos 64^\circ}{\sin 128^\circ}$. 4

Задача 10

Найдите $2\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$. $-1{,}96$

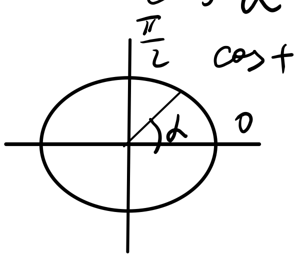
Задача 11

Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$. $0{,}84$

Задача 12

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. $0{,}2$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{26}{26^2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

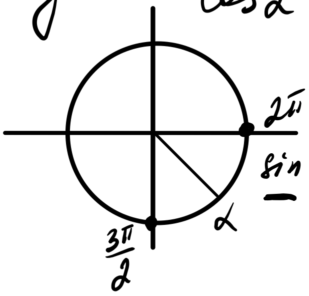
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26} : \frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Задача 13

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

$-2{,}5$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\frac{4}{29}} = -\sqrt{\frac{25}{29}} = -\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}} : \frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

Задачи с прикладным содержанием (ЕГЭ-9)

Задача 14

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

$m = 0{,}08$

$T = 12$

$v_0 = 0{,}5$

$t = 1$

1) $v = 0{,}5 \cdot \sin\dfrac{2\pi \cdot 1}{12} = 0{,}5 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

2) $E = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}08 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 0{,}04 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{0{,}01}{4} =$

$= \dfrac{1}{400} = 0{,}0025$

Задача 15

Два тела, массой $m = 9$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2\alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 81 Дж. Ответ дайте в градусах.

60

Задача 16

Расстояние, которое пролетит камень, брошенный с Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 м/с, может быть найдено по формуле

$$l = \frac{{v_0}^2 \sin(2\alpha)}{g},$$

21

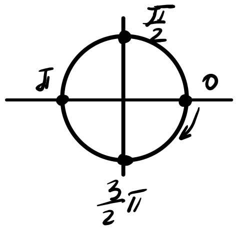
где l — расстояние в метрах, $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения.

С какой начальной скоростью следует бросить камень под углом 30° к горизонту, чтобы расстояние, которое он пролетит, было равно $\dfrac{45\sqrt{3}}{2}$ метра? Ответ дайте в м/с.

Тригонометрические уравнения

① $\sin x = 0$

$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

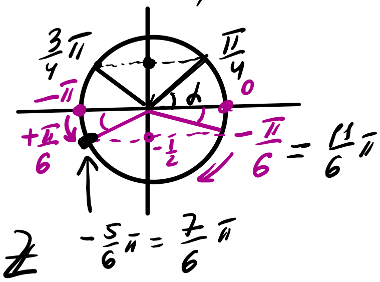
$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = a, \quad |a| \leq 1$

$x = (-1)^k \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

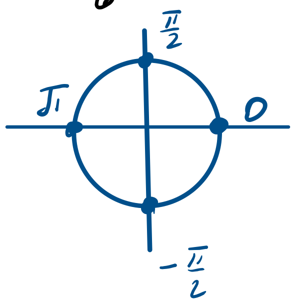
$\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k \\ x = \frac{11}{6}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

② $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

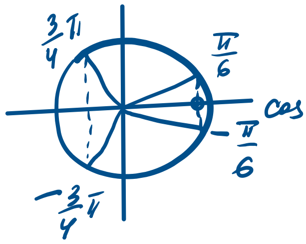


$\cos x = 1$

$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



$\cos x = a, \quad |a| \leq 1$

$x = \pm \arccos a + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

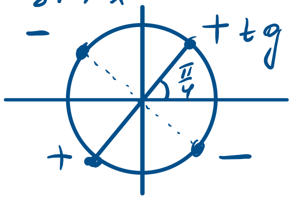
$k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = 0$

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\operatorname{tg} x = 1$

$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in$



$\operatorname{tg} x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

$k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = a$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$

Простые тригонометрические уравнения (ЕГЭ-6)

Задача 17

Решите уравнение $\sin y = 0$. В ответе укажите целый корень уравнения.

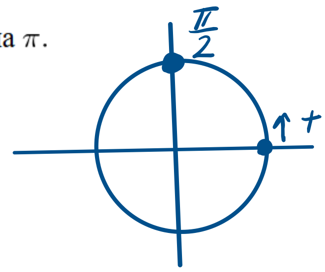
$y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Только при $k = 0$ $\quad y = 0$ – целое

Ответ: 0

Задача 18

Решите уравнение $\sin \alpha = 1$.
В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения, деленный на π.



$\sin \alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

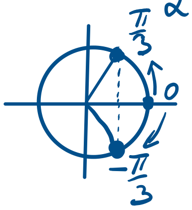
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ – наименьш. полож.

Ответ: 0,5

Задача 19

Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.
В ответе укажите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней.

$\cos x = \frac{1}{2}$



$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

min полож : $\frac{\pi}{3}$

max отриц : $-\frac{\pi}{3}$

Ответ: 0

Задача 20

Решите уравнение $\cos x = -1$.
В ответе укажите сумму наименьших трех положительных корней уравнения, деленную на π.

9

Задача 21

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из его отрицательных корней.

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-0,125$

$t = \frac{4\pi}{3}x \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача 22

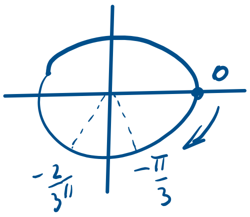
Решите уравнение

$$\sin \underbrace{\boxed{\frac{\pi(2x+7)}{6}}}_{t} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

$-4,5$

$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ t = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

max отриц : $t = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi(2x+7)}{6} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -4,5$

Задача 23

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из его положительных корней.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \sqrt{3}$$

2

Задача 24

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из его положительных корней.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

0,5

Графики тригонометрических функций (ЕГЭ-11)

Задача 25

На рисунке изображен график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.

$(0;\ 1{,}5)$

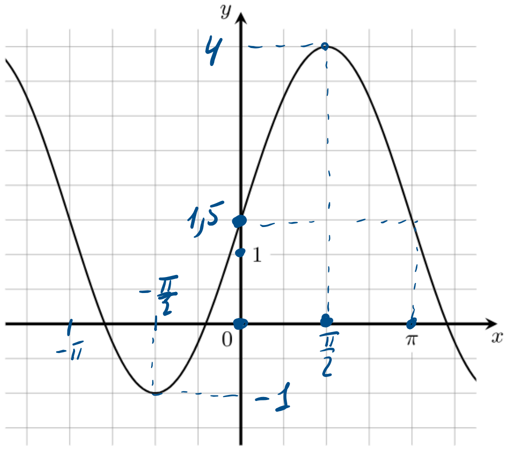
$\left(\frac{\pi}{2};\ 4\right)$

$$\begin{cases} 1{,}5 = a\cdot\overbrace{\sin 0}^{0} + b \\ 4 = a\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} + b \end{cases}$$

$b = 1{,}5$

$a + 1{,}5 = 4$

$a = 2{,}5$



Задача 26

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cdot\cos x + b$. Найдите b.

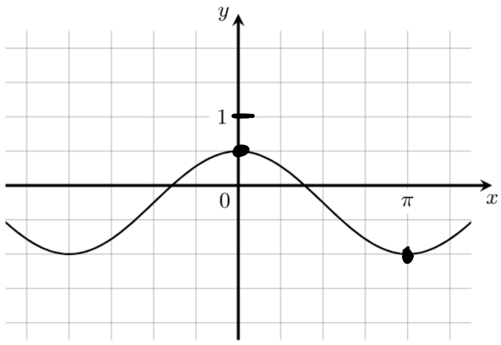
$(0;\ 0{,}5)$

$(\pi;\ -1)$

$$\begin{cases} a\cdot\cos 0 + b = 0{,}5 \\ a\cdot\cos\pi + b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0{,}5 \\ -a + b = -1 \end{cases}$$

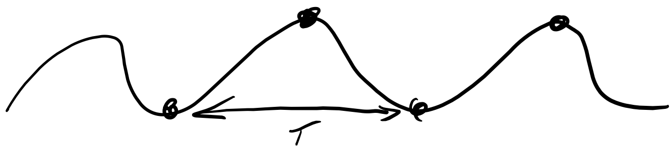
$2b = -0{,}5 \Rightarrow b = -0{,}25$



~~-0,5~~

-0,25

Экстремумы тригонометрических функций (ЕГЭ-12)



$\sin' x = \cos x$

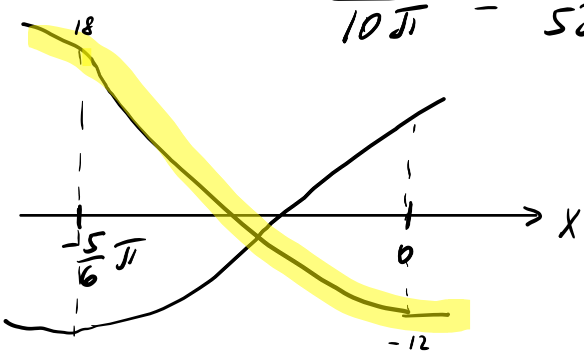
$\cos' x = -\sin x$

Задача 27

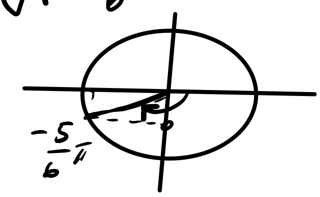
Найдите наибольшее значение функции $y = 10\sin x - \dfrac{42x}{\pi} - 12$ на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; 0\right]$.

$y' = 10 \cdot \cos x - \dfrac{42}{\pi} \cdot 1 - 0 \quad = 0$

$\cos x = \dfrac{42}{10\pi} = \dfrac{21}{5\pi}$



$y\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ и $y(0)$



$y\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = 10 \cdot \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) - \frac{42}{\pi} \cdot \left(-\frac{5}{6}\pi\right) - 12 =$

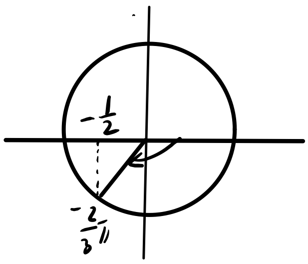
$= 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 35 - 12 = 30 - 12 = 18$

$y(0) = 10 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} - \frac{42}{\pi} \cdot 0 - 12 = 0 - 0 - 12 = -12$

Задача 28

Найдите наименьшее значение функции $y = 10\cos x + \dfrac{36x}{\pi} - 6$ на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$.

$\sin x = \dfrac{36}{10\pi}$



$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cancel{-29} \quad -35$

$y(0) = 4$

$10\cos = -5$

$\frac{36}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -12 \cdot 2 = -24$

$-5 - 24 - 6 = -35$