Тригонометрия

Пусть $A(x;y)$ — точка на единичной окружности с центром в начале координат $O(0;0)$. Через угол α обозначим угол, образованный положительным направлением оси Ox и отрезком OA. **Синусом угла** α называется ордината точки A, а **косинусом** — её абсцисса. Отсюда следует

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \quad |\cos\alpha| \leqslant 1.$$

Некоторые значения тригонометрических функций

радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Свойства тригонометрических функций

чётность/нечётность : $\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$

периодичность : $\quad \sin(\alpha \pm 2\pi k) = \sin\alpha; \quad \cos(\alpha \pm 2\pi k) = \cos\alpha.$

Формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha; \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha.$$

Зависимость между тригонометрическими функциями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha \pm \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}.$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа x называется угол $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x:

$$\arcsin x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = x, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Арккосинусом числа x называется угол $\varphi \in [0;\pi]$, косинус которого равен x:

$$\arccos x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = x, \quad \varphi \in [0;\pi].$$

Арктангенсом числа x называется угол $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x:

$$\operatorname{arctg} x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = x, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Арккотангенсом числа x называется угол $\varphi \in (0;\pi)$, котангенсом которого равен x:

$$\operatorname{arcctg} x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}\varphi = x, \quad \varphi \in (0;\pi).$$

Свойства обратных тригонометрических функций

$$\sin(\arcsin x) = x; \qquad \cos(\arccos x) = x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1;1];$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Решения простейших тригонометрических уравнений в общем случае

$$\sin x = a \quad (|a| \leqslant 1) \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad (|a| \leqslant 1) \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad (x \neq \pi n) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решения простейших тригонометрических уравнений в частных случаях

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg} x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$
