

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Напоминание для a^x : основание показателя $a > 0, a \neq 1$

1) $a^x \leq C$, где $C \equiv \text{const}$

Преобразовать правую часть неравенства: $C = a^p$

Если $0 < a < 1$, то решение исходного неравенства будет $x \leq p$.

Если $a > 1$, то $x \geq p$ является решением данного показательного неравенства.

2) $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$

I способ решения

Если $0 < a < 1$, то $f(x) \leq g(x)$.

Если $a > 1$, то $f(x) \geq g(x)$.

II способ решения

Теорема о знаке показателя: выражения $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ и $(a - 1)(f(x) - g(x))$ имеют одинаковые знаки на ОДЗ показательного выражения.

Так как исходное неравенство можно переписать в виде $a^{f(x)} - a^{g(x)} \leq 0$, то согласно теореме о знаке показателя, получаем равносильное неравенство $(a - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0$.

Решите неравенство

1)
$$\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0,5} \leq 0.$$

2)
$$\frac{27x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{64x^2 - 4 \cdot 8x^2 + 4} \geq 0.$$

3)
$$\frac{52}{(3^{3-x^2} - 1)^2} - \frac{28}{3^{3-x^2} - 1} + 1 \geq 0.$$

4)
$$\frac{2^x + 8}{2^x - 8} + \frac{2^x - 8}{2^x + 8} \geq \frac{2^{x+4} + 96}{4^x - 64}.$$

5)
$$\frac{9^{x-1}}{9^{x-1} - 1} - \frac{5}{9^x - 1} \geq \frac{36}{81^x - 10 \cdot 9^x + 9}.$$

6)
$$\frac{2 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^x \cdot 2^{x+1} + 4^{x+1}}{10^x - 2^{2x}} \leq 1.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Напоминание для $\log_a x$: основание логарифма $a > 0, a \neq 1$, а аргумент $x > 0$

1) $\log_a f(x) \leq C$, где $C \equiv \text{const}$

I способ решения. Преобразовать правую часть неравенства: $C = \log_a a^C$

Если $0 < a < 1$, то решение исходного неравенства будет равносильно решению системы вида $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \geq a^C \end{cases}$.

Если $a > 1$, то решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq a^C \end{cases}$ является решением данного показательного неравенства.

II способ решения

Теорема о знаке логарифма: выражения $\log_a b$ и $(a - 1)(b - 1)$ имеют одинаковые знаки на ОДЗ логарифма.

Таким образом, решение исходного логарифмического неравенства равносильно решению неравенства $(a - 1)(f(x) - a^C) \leq 0$.

2) $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$

I способ решения

Если $0 < a < 1$, то решение исходного неравенства будет равносильно решению системы вида $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$.

Если $a > 1$, то решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$ является решением данного показательного неравенства.

II способ решения

По теореме о знаке логарифма решение исходного логарифмического неравенства равносильно решению неравенства $(a - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0$.

3) $\log_{h(x)} f(x) \leq \log_{h(x)} g(x)$

Решение исходного неравенства будет равносильно решению системы вида

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{cases}$$

II способ решения

По теореме о знаке логарифма решение исходного неравенства равносильно решению неравенства $(h(x) - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0$.

Решите неравенство

7) $\log_3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \log_3 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \geq \log_3(8x - 1).$

8) $\frac{\log_5(5x - 27)}{\log_5(x - 5)} \geq 1.$

9) $\frac{12}{(\log_3^2 x + 4 \log_3 x)^2} + \frac{7}{\log_3^2 x + 4 \log_3 x} + 1 \geq 0.$

10) $9 \log_7 (x^2 + x - 2) \leq 10 + \log_7 \frac{(x - 1)^9}{x + 2}.$

11) $\frac{\log_3 x}{\log_3 \left(\frac{x}{27} \right)} \geq \frac{4}{\log_3 x} + \frac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$

12) $\log_{0,2} (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \leq \log_{0,04}(x - 2)^4$

13) $(\log_{0,25}^2(x + 3) - \log_4 (x^2 + 6x + 9) + 1) \cdot \log_4(x + 2) \leq 0.$

14) $\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2(2x^2 - 5x + 12,5) + 1} \leq 0.$

15) $2 \log_{(x^2 - 6x + 10)^2} (5x^2 + 3) \leq \log_{x^2 - 6x + 10} (4x^2 + 7x + 3).$

16) $\log_{|x-5|} \sqrt{x-3} \leq \frac{1}{4}.$