Задача 1

а) Решите уравнение $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение

а) $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{2} - 4$

$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x - 4(1 - \sin^2 x) - \sqrt{2} + 4 = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{2}\sin x \cancel{-4} + 4\sin^2 x - \sqrt{2} \cancel{+4} = 0$

$4\sin^2 x + (2 - 2\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$

Замена $t = \sin x$

$4t^2 + (2 - 2\sqrt{2})t - \sqrt{2} = 0$

$D = (2 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 + 16\sqrt{2} =$

$= 8\sqrt{2} + 12$

$2\sin x(1 + 2\sin x) - \sqrt{2}(2\sin x + 1) = 0$

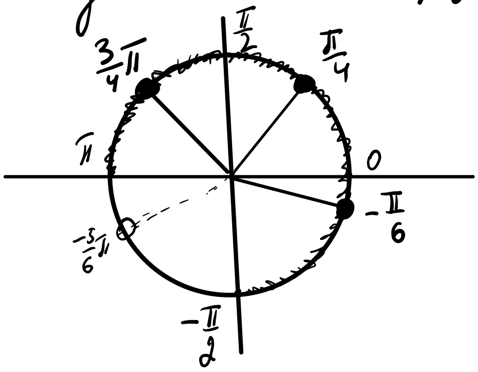
$(1 + 2\sin x) \cdot (2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$1 + 2\sin x = 0$ или $2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) Изобразим решения ур-я на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ на единичной окружности



Ответ:

а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{4}\pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$

Задача 2

а) Решите уравнение $2 + 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение

а) $2 + 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\sin x$

$2 - 2\cos 2x - \sqrt{8}\sin x - \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x = 0$

$2 - 2(1 - 2\sin^2 x) - \sqrt{8}\sin x - \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x = 0$

$\cancel{2} - \cancel{2} + 4\sin^2 x - \sqrt{8}\sin x - \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x = 0$

$2\sqrt{2}\sin x(\sqrt{2}\sin x - 1) - \sqrt{6}(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$

$(\sqrt{2}\sin x - 1)\cdot(2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}) = 0$

$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

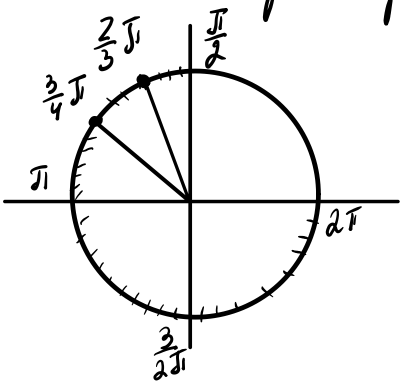
$2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6} = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) Изобразим на единичной окружности корни ур-я, к-рые принадлежат отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3}\pi + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$

Задача 3

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение

а) $\cos 2x + 0{,}75 = \cos^2 x$

$2\cos^2 x - 1 + 0{,}75 - \cos^2 x = 0$

$\cos^2 x - 0{,}25 = 0$

$\cos^2 x = 0{,}25$

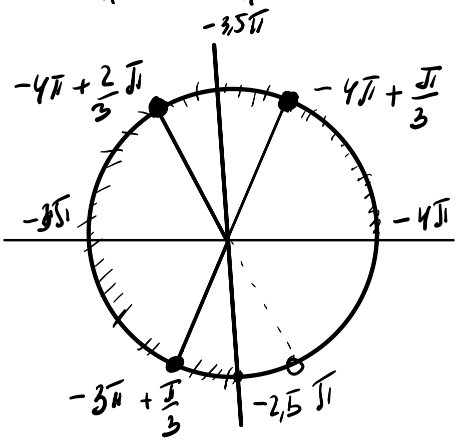
$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

б) — 4 — 4 —



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11}{3}\pi$; $-\frac{10}{3}\pi$; $-\frac{8}{3}\pi$

Задача 4

а) Решите уравнение $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x=2+\sqrt{6}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение

а) $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x=2+\sqrt{6}\cos x$

$2\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x-2-\sqrt{6}\cos x=0$

$\cancel{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cos x\right)+2\cos^2 x-2-\sqrt{6}\cos x=0$

$\sqrt{2}\sin x+\cancel{\sqrt{6}\cos x}+2\cos^2 x-2-\cancel{\sqrt{6}\cos x}=0$

$\sqrt{2}\sin x+2(1-\sin^2 x)-2=0$

$\sin x(\sqrt{2}-2\sin x)=0$

$\sin x=0$

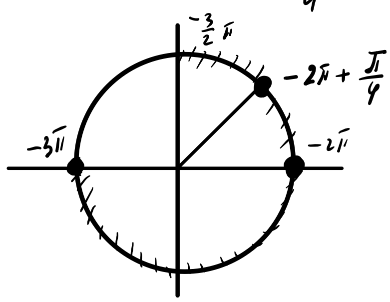
$x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{3}{4}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

б) — и —



Ответ: а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $\frac{3}{4}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

б) -3π; -2π; $-\frac{7}{4}\pi$

Задача 5

а) Решите уравнение $4\cos^3 x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

Решение

а) $4\cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$4\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$

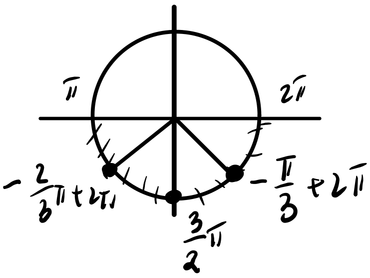
$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

б)



Задача 6

а) Решите уравнение $4\sin x\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin 2x + 3\sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение

а) $4\sin x\cos^2 x - 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\sin x = 0$

$\sin x(4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3) = 0$

$\sin x = 0$

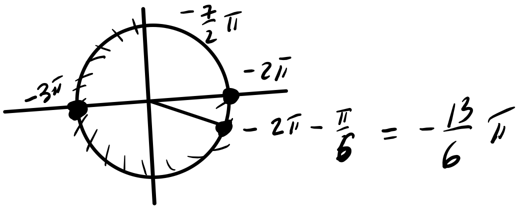
$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) — " —

-3π; $-\frac{13}{6}\pi$; -2π



Задача 7

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение

а) $\sin x(2\cos^2 x - 1) - \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$2\sin x\cos^2 x - \cancel{\sin x} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cancel{\sin x} = 0$

$\cos^2 x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

$\cos^2 x = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

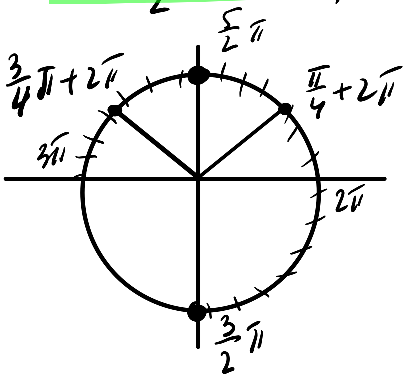
$2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б)



$\frac{3}{2}\pi;\ \frac{9}{4}\pi;\ \frac{5}{2}\pi;\ \frac{11}{4}\pi$

Задача 8

а) Решите уравнение $7\,\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение

а) $7\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$

$$\frac{7\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{7(1-\cos^2 x)-\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$\frac{-6\cos^2 x-\cos x+7}{\cos^2 x}=0$$

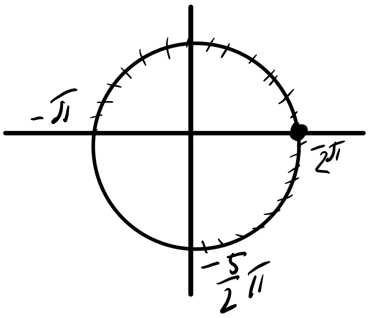
ОДЗ: $\cos x \neq 0$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in\right)$

$-6\cos^2 x-\cos x+7=0$

$\cos x = 1$ $\qquad$ $\cos x = -\frac{14}{12}$

$x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ не имеет решений

б)



Ответ: а) $2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

б) -2π

Задача 9

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение б) $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0 \;\Big|\; : \cos 2x$

$a\sin x + b\cos x = 0 \;\Big|\; : \cos x$

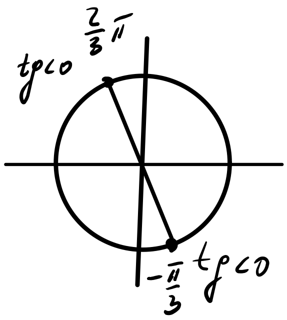
$a\,tg\,x + b = 0$

$\sqrt{3}\,tg\,2x + 3 = 0$

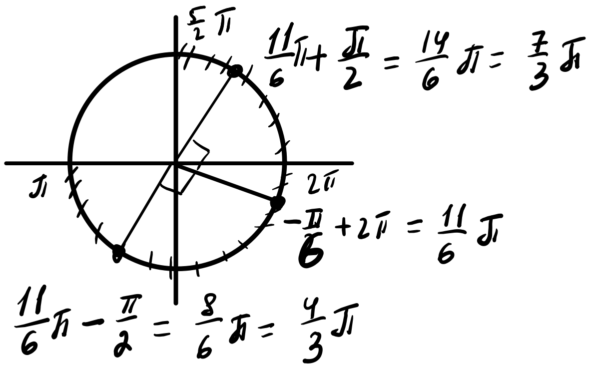
$tg\,2x = -\sqrt{3}$

$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



б)



$\frac{4}{3}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; $\frac{7}{3}\pi$

Задача 10

а) Решите уравнение $27^x - 10 \cdot 3^{x+1} + \dfrac{81}{3^x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_7 2; \log_7 15]$.

Задание 11

а) Решите уравнение $2 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 4 = 0$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 12

а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 14x\right) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

Задание 13

а) Решите уравнение $6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2,5]$.

Задание 14

а) Решите уравнение $\log_3(x^3 + 6x^2 - 3x - 19) = \log_3(x+5)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{0,5} 100; \log_{0,5} 0,3]$.

Задание 15

а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \dfrac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

Задание 16

а) Решите уравнение $1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

Задание 17

а) Решите уравнение $\log_3 x \cdot \log_3(4x^2-1)=\log_3\frac{x(4x^2-1)}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 27]$.

Задание 18

а) Решите уравнение $\log_5(\cos x+\sin 2x+25)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задание 19

а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 20

а) Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x\right)=x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.