Лабораторная работа №1

П. С. Углич

кафедра теории упругости

2 апреля 2024 г.

Оглавление

Решение задачи о свободных поперечных колебаниях балки длины L может быть сведено к отысканию стационарной точки функционала Гамильтона-Остроградского

$$S = \int_0^L \left\{ \mu(x) p^2 \varphi^2(x) - EJ \left[\varphi''(x)\right]^2 \right\} dx \tag{1}$$

EJ — жесткость балки на изгиб (может зависеть от продольной координаты $x \in [0, L]$);
$\mu(x) = \rho(x) A(x)$ — произведение плотности материала балки на площадь поперечного сечения;
$\varphi(x)$ — поперечный изгиб;
p — частота колебаний;

Сущность метода Ритца заключается в сведении вариационной задачи к задаче об отыскании экстремума функции многих независимых переменных. Ищем поперечный прогиб в виде:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \psi_i(x), \tag{2}$$

где α_i — параметры, подлежащие определению из условия стационарности функционала, $\psi_i(x)$ — базисные или координатные функции. Базисные функции являются достаточно гладкими и удовлетворяют главным краевым условиям задачи.

Рассмотрим для примера случай, когда главные краевые условия заданы на левом конце балки.
К главным условиям относятся условия глухой заделки

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

или шарнирного опирания

$$\varphi(0) = 0$$

Если для функции φ заданы главные краевые условия, то они должны быть заданы и для функций ψ_i.

Подставляем (2) в (1). Функционал Гамильтона-Остроградского обращается в квадратичную форму параметров α_i

$$S(\alpha_1, ..., \alpha_n) = p^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} T_{ik}\alpha_i\alpha_k - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_{ik}\alpha_i\alpha_k \qquad (3)$$

где

$$T_{ik} = \int_0^L \mu(x)\psi_i(x)\psi_k(x)dx,$$

$$U_{ik} = \int_0^L EJ(x)\psi_i''(x)\psi_k''(x)dx$$

Значения параметров α_i ищем из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0.$$

Они принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(p^2 T_{11} - U_{11}\right) \alpha_1 + \ldots + \left(p^2 T_{1n} - U_{1n}\right) \alpha_n = 0, \\ \left(p^2 T_{21} - U_{21}\right) \alpha_1 + \ldots + \left(p^2 T_{2n} - U_{2n}\right) \alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(p^2 T_{n1} - U_{n1}\right) \alpha_1 + \ldots + \left(p^2 T_{nn} - U_{nn}\right) \alpha_n = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Система (4) имеет решение, если её определитель равен нулю

$$\left| p^2 T_{ij} - U_{ij} \right| = 0 \tag{5}$$

Из уравнения (5) находим верхние оценки собственных частот

Рассмотрим однородную по длине балку длины L, жёстко защемлённую на левом конце и будем искать форму колебаний в виде

$$\varphi(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3$$

Подставляя решение в (3), получаем:

$$T_{11} = \frac{\rho A L^5}{5},\ T_{12} = T_{21} = \frac{\rho A L^6}{6},\ T_{22} = \frac{\rho A L^7}{7}$$

$$U_{11} = 4EJL,\ U_{12} = U_{21} = 6EJL^2,\ U_{22} = 12EJL^3$$

Уравнение (5) имеет решение:

$$p_1 = \frac{3.5327}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{A\rho}},\ p_2 = \frac{34.8069}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

В книге [1] приводятся оценки, найденные при помощи функций Крылова

$$p_1 = \frac{3.515625}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{A\rho}},\ p_2 = \frac{22.034}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

Как видно из полученных результатов, метод Ритца даёт оценку сверху, при этом оценка второй частоты намного грубее, чем у первой

Рассмотрим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int\limits_{\Omega} G(x,\xi)u(\xi)d\Omega_\xi \qquad (6)$$

Предположим, что ядро уравнения симметрично и

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} G^2(x,y)d\Omega_x d\Omega_\xi < \infty$$

Введём обозначение

$$G_m(x,\xi),\ m = 1,2....$$

— итерированные ядра, которые определяются рекуррентными соотношениями

$$G_1(x,\xi) = G(x,\xi),\ G_m(x,\xi) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)G_{m-1}(y,\xi)d\Omega_y = 0$$

Введём в рассмотрение следы итерированных ядер

$$a_m = \int\limits_{\Omega} G_m(x,x)d\Omega$$

Для следов с чётными индексами верна формула

$$a_{2m} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} G_m^2(x,y)d\Omega_x d\Omega_y$$

Следы связаны с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ соотношением, которое вытекает из теоремы Мерсера

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m},\ m \geq 2$$

Это неравенство даёт оценку первой собственной частоты снизу

Пусть характеристические числа расположены в порядке возрастания. Заменяя в последнем равенстве m на $2m$ и отбрасывая все члены ряда кроме последнего, получаем:

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}}$$

Рассмотрим задачу о колебаниях глухо заделанной балки. Уравнение колебаний следующее:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \rho A p^2 w \tag{7}$$

Краевые условия имеют вид:

$$w\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{8}$$

$$\left.\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right|_{x=L} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right|_{x=L} = 0 \tag{9}$$

Предположим, что E, A, J, ρ — постоянны по длине балки

Для сведения задачи к однородному интегральному уравнению построим функцию Грина. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} = \delta(x - \xi) \tag{10}$$

Краевые условия имеют вид:

$$G|_{x=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|_{x=L} = \left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0$$

Проинтегрируем (10):

$$\frac{\partial^3 G}{\partial x^3} = \varphi_0(x-\xi) + C_0 \tag{11}$$

На правом конце балки:

$$\left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0 = 1 + C_0$$

следовательно

$$C_0 = -1$$

Проинтегрируем (11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \varphi_1(x-\xi) - x + C_1 \tag{12}$$

На правом конце балки

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0 = L - \xi - L + C_1$$

Следовательно

$$C_1 = \xi$$

Проинтегрируем (12):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi_2(x-\xi) - \frac{x^2}{2} + x\xi \tag{13}$$

$$G = \varphi_3(x-\xi) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\xi}{2} \tag{14}$$

Выражения (13), (14) удовлетворяют краевым условиям на левом конце балки.
Раскроем (14) при $x > \xi$:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2\xi + 3x\xi^2 - \xi^3\right) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\xi}{2}$$

При $x < \xi$:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{6}\left(3x^2\xi - x^3\right)$$

Объединяя эти два выражения, получаем:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(3x^2\xi - x^3\right), & x < \xi \\ \frac{1}{6}\left(3x\xi^2 - \xi^3\right), & x \geq \xi \end{cases}$$

Уравнение (7) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\rho A p^2}{EJ} w \tag{15}$$

Интегральное уравнение для краевой задачи для уравнения (15) при краевых условиях (8)-(9) имеет вид:

$$w(x) - \frac{\rho A p^2}{EJ} \int_0^L G(x,\xi) w(\xi) d\Omega_\xi$$

или

$$w(x) - \lambda \int_0^L G(x,\xi) w(\xi) d\Omega_\xi \qquad (16)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho A p^2}{EJ}$$

Находим (используем Maple)

$$a_2 = \int_0^L \int_0^L G^2(x,\xi) dx d\xi = \frac{11 L^8}{1680}$$

Следовательно

$$\lambda_1 = \frac{\rho A p_1^2}{EJ} \geq \frac{\sqrt{1680}}{\sqrt{11} L^4}$$

Окончательно получаем:

$$p_1 \geq \sqrt[4]{\frac{1680}{11}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}} = \frac{3.515435}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

Таким образом, построена оценка первой собственной частоты

В следующих трёх вариантах рассматривается балка длины L, сечение которой является правильным квадратом со стороной h, а механические параметры E, ρ неизменны по длине при следующих краевых условиях:

Вариант 1: Левый конец балки глухо заделан, правый — шарнирно опёрт

$$w(0) = w'(0) = w(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 x^2 (x - L) + \alpha_2 x^3 (x - L),$$

Вариант 2: Оба конца балки глухо заделаны

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \left[(L/2)^2 - x^2\right]^2 + \alpha_2 x \left[(L/2)^2 - x^2\right]^2,$$

Вариант 3: Оба конца балки свободны Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3,$$

Вариант 4:
Оба конца балки шарнирно опёрты.
Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L},$$

В следующих двух вариантах рассматривается балка длины L, сечение которой является правильным квадратом со стороной $0.5 * h$ при $x < L/2$ и h при $x > L/2$, а механические параметры E, ρ неизменны по длине при следующих краевых условиях:

Вариант 5:
Оба конца балки шарнирно опёрты.
Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L},$$

Вариант 6: Оба конца балки глухо заделаны

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = x(L - x)\left[\alpha_1 \sin\frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin\frac{2\pi x}{L}\right],$$

Содержание задания:

- При помощи метода Ритца найти оценку сверху для двух первых собственных частот колебаний. Первую свободную частоту оценить снизу.

Литература I

- И. М. Бабаков.
  Теория колебаний.
  М.:Наука, 1968.
- С. Г. Михлин.
  Вариационные метода в математической физике.
  М.:Главная редакция физико-математической литературы, 1970.